

정답 및 해설

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	④	12	③	23	④	23	②	23	②
2	⑤	13	⑤	24	②	24	②	24	⑤
3	①	14	③	25	③	25	④	25	①
4	①	15	②	26	③	26	③	26	②
5	③	16	2	27	①	27	④	27	③
6	④	17	11	28	⑤	28	①	28	③
7	②	18	4	29	48	29	17	29	80
8	④	19	6	30	47	30	11	30	48
9	⑤	20	8						
10	②	21	24						
11	②	22	61						

2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의고사

해설 작성 : YoonSol(윤재원)

검토자 : Evolved Slave II

본 해설지에 대한 저작권은 윤재원에게 있으며, 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 무단복제/2차적 저작물 작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련 법률에 따라 금지되어 있으며 처벌받을 수 있습니다.

본 해설지에 관한 모든 문의는 yoonsol229@gmail.com 으로 연락해주시기 바랍니다.

공통과목

1 ④

$$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = 4$$

2 ⑤

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수이다.)}$$

$$f(1) = 1 = 1^3 - 1^2 + C = C$$

$$\therefore f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

$$f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$$

3 ①

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$ 이다.

$$\tan\theta = \frac{12}{5} \rightarrow \cos\theta = -\frac{5}{13}, \sin\theta = -\frac{12}{13}$$

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\frac{12}{13} + \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{17}{13}$$

4 ①

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 0 = -2$$

5 ③

$$g(x) = (x^2 + 3)f(x)$$

$$g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 3)f'(x)$$

$$\therefore g'(1) = 2 \times 1 \times f(1) + (1^2 + 3) \times f'(1) = 4 + 4 = 8$$

6 ④

곡선 $y = 3x^2 - x$ 와 $y = 5x$ 가 만나는 점의 x 좌표는 각각 0과 2이다.

\therefore 곡선 $y = 3x^2 - x$ 와 직선 $y = 5x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2 |(3x^2 - x) - (5x)| dx = \int_0^2 (6x - 3x^2) dx = [3x^2 - x^3]_0^2 = 4$$

다.

7 ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$S_3 - S_2 = a_3 = 2 + 2d$$

$$a_6 = 2 + 5d$$

$$a_6 = 2(S_3 - S_2) \rightarrow 2 + 5d = 2(2 + 2d)$$

$$\therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = 2n$$

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$$

8 ④

함수 $f(x)$ 는 $x > a$, $x < a$ 에선 연속이므로

함수 $\{f(x)\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^+} \{f(x)\}^2 \text{이며}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^2 = \{f(a)\}^2 \text{이어야 한다.}$$

$$(6-2a)^2 = (2a-a)^2$$

$$4a^2 - 24a + 36 = a^2$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$a = 2, a = 6$$

\therefore 모든 상수 a 의 값의 합은 $2 + 6 = 8$ 이다.

9 ⑤

$$a_{12} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{2} \rightarrow a_{11} = 2$$

$$a_{11} = 8a_{10} = 2 \rightarrow a_{10} = \frac{1}{4}$$

$$a_{10} = \frac{1}{a_9} = \frac{1}{4} \rightarrow a_9 = 4$$

$$a_9 = 8a_8 = 4 \rightarrow a_8 = \frac{1}{2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 4 & (n = 4k-3) \\ \frac{1}{4} & (n = 4k-2) \\ 2 & (n = 4k-1) \\ \frac{1}{2} & (n = 4k) \end{cases}$$

$$a_1 = 4, a_4 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_1 + a_4 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

10 ②

$y = \log_n x$ 와 $y = -\log_n(x+3)+1$ 의 교점의 x 좌표를 t 라고 하면

$$\log_n t = -\log_n(t+3)+1$$

$$\log_n t(t+3) = 1$$

$$t(t+3) = n$$

$$t^2 + 3t - n = 0$$

$$1 < t < 2 \rightarrow (1^2 + 3 \times 1 - n)(2^2 + 3 \times 2 - n) < 0$$

$$4 < n < 10$$

$$n = 5, 6, 7, 8, 9$$

\therefore 모든 n 의 값의 합은 $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$

11 ②

$g(x+2) = g(x)$ 이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)dx = \int_{-3}^{-1} g(x)dx + \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx$$

$$= 3 \int_{-1}^0 g(x)dx + 2 \int_0^1 g(x)dx$$

$$\int_{-1}^0 g(x)dx = \int_{-1}^0 \{-f(x+1)+1\}dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \int_{-3}^2 g(x)dx = 3 \int_{-1}^0 g(x)dx + 2 \int_0^1 g(x)dx$$

$$= 3 \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

12 ③

$\angle BAC = \theta$ 라 하자.

$$\cos \theta = \frac{1}{8} \rightarrow \sin \theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{1}{2} \overline{AD} = \overline{AB} \times \cos \theta = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{AD} = 1 \rightarrow \overline{CD} = 5 - 1 = 4$$

$\angle BAD = \angle BDA \rightarrow$ 삼각형 BAD 는 $\overline{BA} = \overline{BD}$ 인 이등변 삼각형이다.

$$\therefore \overline{BD} = \overline{AB} = 4$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta = \overline{BC}^2$$

$$4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8} = 36$$

$$\therefore \overline{BC} = 6$$

점 D 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형

BCD 는 $\overline{BD} = \overline{CD}$ 인 이등변 삼각형이므로 $\overline{BH} = \overline{CH} = 3$ 이다.

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{DE}} = \sin \theta$$

$$\therefore \overline{DE} = \frac{\overline{DH}}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{8}{3}$$

{별해}

위의 풀이에서 $\overline{BC} = 6$ 을 구하는 과정까지는 동일하게 진행됩니다.

$\angle BDC = \angle DEC = \pi - \theta$, $\angle DCE$ 공통이므로 삼각형 BDC 와 삼각형 DEC 는 AA 닮음이다.

$$\overline{BD} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{CD} \rightarrow 4 : 6 = \overline{DE} : 4$$

$$\therefore \overline{DE} = \frac{8}{3}$$

13 ⑤

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}, f(x+1) = f(x) \text{이므로}$$

자연수 n 에 대하여 $f(\sqrt{n})$ 은 자연수 k 에 대하여 다음과 같다.

$$f(\sqrt{n}) = \begin{cases} 1 & (n = k^2) \\ 3 & (n \neq k^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(k)}{3} &= \sum_{k=1}^{20} k - (1+4+9+16) + \frac{1}{3}(1+4+9+16) \\ &= \frac{20 \times 21}{2} - 20 = 210 - 20 = 190 \end{aligned}$$

14 ③

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 12, f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 2(x+1)(x-3)$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) - 12 = -7$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 - 12 = -39$$

(가) 조건을 해석하면 함수 $g(x)$ 의 식은

$$g(x) = \begin{cases} |f(x-p)+q| & (x \geq 0) \\ -|f(x-p)+q| & (x < 0) \end{cases} \text{가 된다.}$$

해석의 편의를 위해서 $h(x) = |f(x-p)+q|$ 라고 하자.

함수 $h(x)$ 는 함수 $f(x)$ 는 x 축 방향으로 p 만큼, y 축 방향으로 q 만큼 평행이동 시킨 함수에 절댓값을 씌운 함수입니다.

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(x) & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $h(0) = 0$ 이다.

만약 $h'(0) \neq 0$ 일 경우 (해당 케이스에선 엄밀하겐 $h'(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되지 않지만 서술의 편의를 위해 다음과 같이 작성하였습니다.)

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(0+h)-h(0)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(0+h)-h(0)}{h} \text{이므로 함수}$$

$g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분 가능합니다.

또한 $h'(0) = 0$ 일 경우 $g'(0) = 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는

$x=0$ 에서 미분 가능합니다.

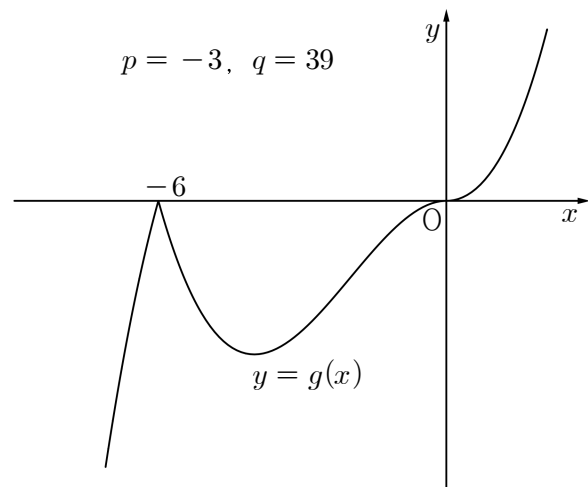
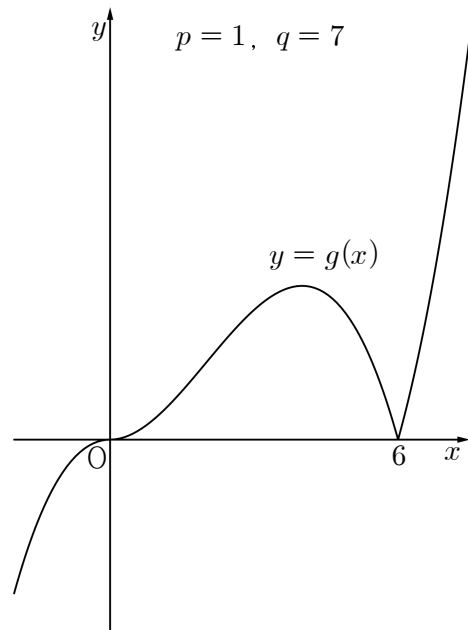
즉 함수 $g(x)$ 가 한 점에서 미분가능하지 않으려면 함수 $h(x)$ 가 $h'(0) = 0$ 이고 $x=0$ 이 아닌 한 점에서 미분가능하지 않아야 합니다.

그러기 위해선 점 $(-1+p, -7+q)$ 가 원점이 되거나 점

$(3+p, -39+q)$ 가 원점이 되어야 합니다.

p, q 가 양수이므로 $p=1, q=7$ 이다.

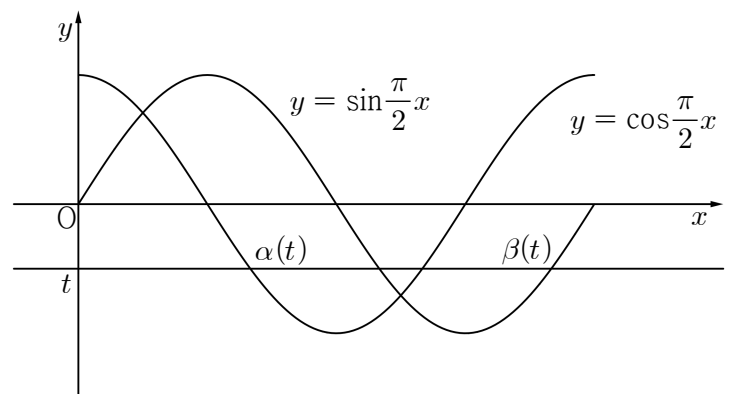
$$\therefore p+q = 1+7 = 8$$



15 ②

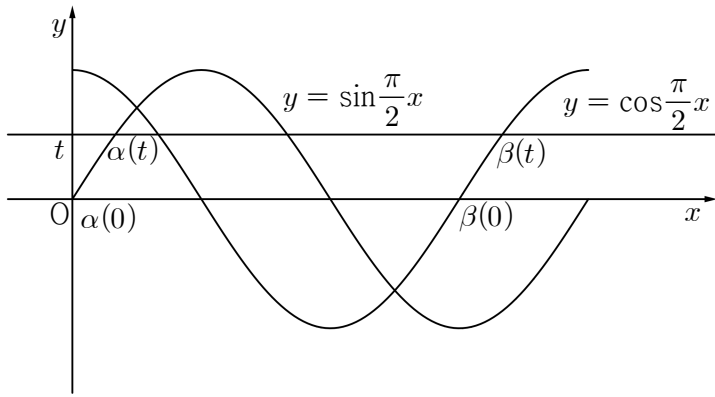
$\alpha(t)$ 는 $(\sin \frac{\pi x}{2} - t)(\cos \frac{\pi x}{2} - t) = 0$ 의 실근 중 가장 작은

값이고 $\beta(t)$ 는 $(\sin \frac{\pi x}{2} - t)(\cos \frac{\pi x}{2} - t) = 0$ 의 실근 중 가장 큰 값이다.



$-1 \leq t < 0$ 인 실수 t 에서는 $\alpha(t)$ 와 $\beta(t)$ 가 $x = \frac{5}{2}$ 에 대하여 대칭인 상태이다. 따라서 $-1 \leq t < 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$ 이다.

$\therefore \neg$ (참)



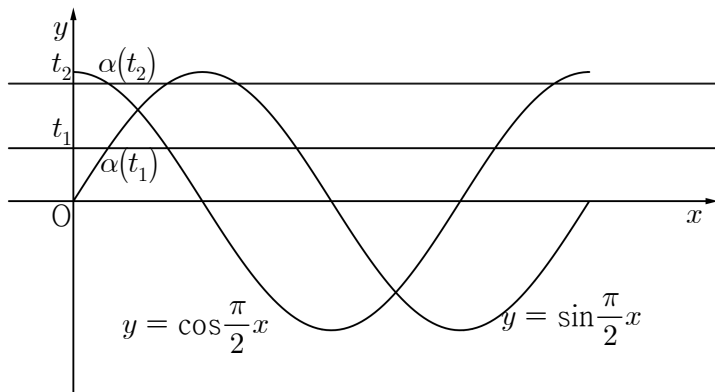
$$\alpha(0) = 0, \beta(0) = 3 \rightarrow \beta(0) - \alpha(0) = 3$$

$$-1 \leq t < 0 : \beta(t) - \alpha(t) < 3$$

$$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} : \beta(t) - \alpha(t) = 3$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < t \leq 1 : \beta(t) - \alpha(t) > 3$$

$\therefore \text{ㄴ}$ (참)



$\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ 이려면 $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = k$ 라 하면

$t_1 = \sin k, t_2 = \cos k$ 혹은 $t_1 = \cos k, t_2 = \sin k$ 이다.

$$\therefore t_1^2 + t_2^2 = 1$$

문제 조건에 의하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$(t_2 - t_1)^2 = t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 \times t_2 = \frac{1}{4}$$

$$t_1 \times t_2 = \frac{3}{8}$$

$\therefore \text{ㄷ}$ (거짓)

따라서 ㄱ, ㄴ이 옳은 선지이다.

16 2

$$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 \left(\frac{2}{3} \times 24 \right) = \log_4 16 = 2$$

17 11

$$f(x) = x^3 - 3x + 12, f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소를 가지므로 $a = 1$ 이다.

$$f(a) = f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 12 = 10$$

$$\therefore a + f(a) = 1 + 10 = 11$$

18 4

$$a_7 = \frac{1}{3} a_5 = a_5 \times r^2$$

$$r^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_6 = a_2 \times r^4 = 36 \times \frac{1}{9} = 4$$

19 6

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

점 P 의 시각 t ($t \geq 0$) 에서의 위치를 $x(t)$ 라 하자.

$$x(t) = t^3 - 2t^2 + kt + C \text{ (단, } C \text{ 는 적분상수이다.)}$$

$$x(0) = 0 = C \rightarrow x(t) = t^3 - 2t^2 + kt$$

$$x(1) = -3 = 1^3 - 2 \times 1^2 + k \times 1 = k - 1$$

$$k = -2 \rightarrow x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$$

$$x(3) = 3^3 - 2 \times 3^2 - 2 \times 3 = 3$$

\therefore 시각 $t = 1$ 에서 $t = 3$ 까지 점 P 의 위치 변화량은

$$|x(3) - x(1)| = |3 - (-3)| = 6 \text{ 이다.}$$

20 8

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x-3)(x-5)$$

$$f(3) = 57, f(5) = 53$$

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

$$= f(x) \times \int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

$$g'(x) = f'(x) \times \int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$\{f(x)\}^4 \geq 0$ 이므로 $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$ 는 $x = a$ 에서만 부호의

변화를 가진다.

함수 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 가지기 위해선 $g'(x)$ 가 오직 한 점에서만 부호의 변화가 일어나야 한다.

$f'(x)$ 는 $x = 3$ 과 $x = 5$ 에서 부호의 변화가 일어나므로 함수

$g'(x)$ 가 오직 한 점에서만 부호의 변화가 일어나려면

$a = 3$ 이거나 $a = 5$ 이어야 한다.

\therefore 모든 a 의 값의 합은 $3 + 5 = 8$ 이다.

21 24

x 에 대한 방정식 $(x^n - 64) = 0$ 은 n 이 홀수일 경우 하나의 실근을 갖고 n 이 짝수일 경우 두 개의 서로 다른 실근을 갖는다.

따라서 x 에 대한 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이라면 n 의 짝수이고 $f(x) = 0$ 의 두 실근과 $x^n - 64 = 0$ 의 두 실근이 일치해야 한다.

i) $n = 2$ 인 경우

$f(x) = x^2 - 64$, $f(x)$ 의 최솟값은 -64 로 음의 정수이다.

ii) $n = 4$ 인 경우

$f(x) = x^2 - 16$, $f(x)$ 의 최솟값은 -16 으로 음의 정수이다.

iii) $n = 6$ 인 경우

$f(x) = x^2 - 4$, $f(x)$ 의 최솟값은 -4 로 음의 정수이다.

iv) $n = 12$ 인 경우

$f(x) = x^2 - 2$, $f(x)$ 의 최솟값은 -2 로 음의 정수이다.

$\therefore n$ 의 값의 합은 $2 + 4 + 6 + 12 = 24$ 이다.

22 61

(가) 조건에 의하여 함수 $f(x)$ 의 식은 다음과 같다.

$$f(x) = k(x-\alpha)^2(x-\beta) \quad (k \neq 0, \alpha \neq \beta)$$

(나) 조건에 의하여 방정식 $x-f(x) = \alpha$, $x-f(x) = \beta$ 의 서로 다른 실근의 개수의 합은 3이다.

$$f(x) - (x-\alpha) = (x-\alpha)\{k(x-\alpha)(x-\beta)-1\} = 0$$

$$f(x) - (x-\beta) = (x-\beta)\{k(x-\alpha)^2-1\} = 0$$

방정식 $x-f(x) = \alpha$, $x-f(x) = \beta$ 의 서로 다른 실근의 개수의 합은 3이려면 $k(x-\alpha)(x-\beta)-1 = 0$, $k(x-\alpha)^2-1 = 0$ 이 α , β 이외의 실근을 단 하나만 가져야 한다.

k 가 양수일 경우 방정식 $k(x-\alpha)(x-\beta)-1 = 0$ 은 α , β 가 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로 모순이다.

k 가 음수일 경우 $k(x-\alpha)^2-1 < 0$ 이므로 방정식 $k(x-\alpha)^2-1 = 0$ 은 실근을 가지지 않는다.

즉 $k(x-\alpha)(x-\beta)-1 = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

$k(x-\alpha)(x-\beta)-1 = 0$ 이 중근을 가지려면 함수 $y = k(x-\alpha)(x-\beta)$ 의 최솟값이 1이어야 하므로

$$k\left\{\alpha\beta - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right\} = -k\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 1 \text{이 성립한다.}$$

$$f(1) = 4 \rightarrow k(1-\alpha)^2(1-\beta) = 4$$

$$f'(1) = 1 \rightarrow k(1-\alpha)(3-\alpha-2\beta) = 1$$

$$-k\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 1, \quad k(1-\alpha)^2(1-\beta) = 4, \quad k(1-\alpha)(3-\alpha-2\beta) = 1$$

위 세 식을 연립하면 해가

$$\textcircled{1} : \alpha = -3, \beta = 5, k = -\frac{1}{16}$$

$$\textcircled{2} : \alpha = -\frac{31}{5}, \beta = 37, k = -\frac{25}{11664}$$

로 나온다.

$$\text{따라서 함수 } f(x) \text{의 식은 } f(x) = -\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5) \dots \textcircled{1}$$

$$\text{혹은 } f(x) = -\frac{25}{11664}\left(x + \frac{31}{5}\right)^2(x-37) \dots \textcircled{2} \text{이다.}$$

$$\textcircled{2} \text{의 경우 } f'(0) = \frac{3503}{3888} \text{으로 } f'(0) > 1 \text{이라는 조건에}$$

$$\text{위배되지만 } \textcircled{1} \text{의 경우 } f'(0) = \frac{21}{16} \text{으로 } f'(0) > 1 \text{이라는}$$

조건을 만족합니다.

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$$

$$f(0) = \frac{45}{16} \rightarrow p = 16, q = 45$$

$$\therefore p+q = 16+45 = 61$$

크냥 그래프 그려서 푸세요... 저 방정식 푸는거 너무 짝씹너타...

[그래프 활용 풀이]

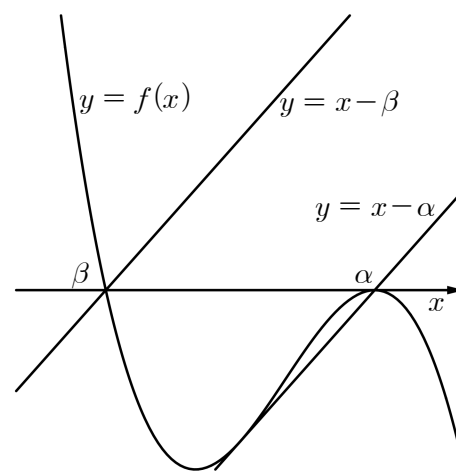
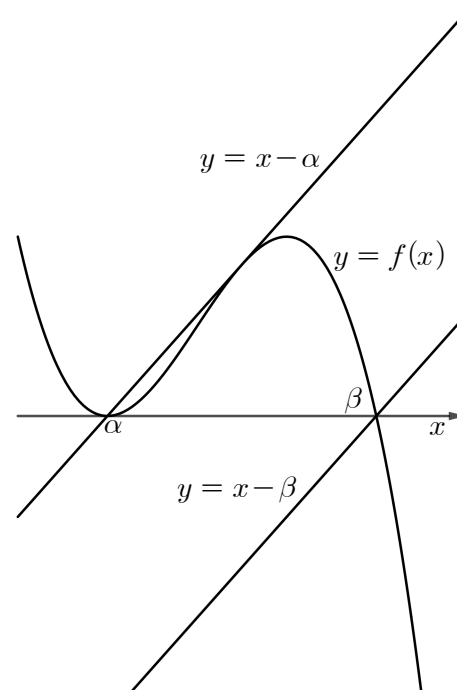
(가) 조건에 의하여 함수 $f(x)$ 의 식은 다음과 같다.

$$f(x) = k(x-\alpha)^2(x-\beta) \quad (k \neq 0, \alpha \neq \beta)$$

(나) 조건에 의하여 방정식 $x-f(x) = \alpha$, $x-f(x) = \beta$ 의 서로 다른 실근의 개수의 합은 3이다.

$x-f(x) = \alpha$, $x-f(x) = \beta$ 이 두 식을 조금 변형하면 방정식 $f(x) = x-\alpha$, $f(x) = x-\beta$ 의 서로 다른 실근의 개수의 합이 3이 되는 함수 $f(x)$ 를 찾으려 한다.

k 가 양수일 경우 방정식 $f(x) = x-\alpha$, $f(x) = x-\beta$ 의 서로 다른 실근의 개수의 합은 적어도 5라서 k 는 음수이다.



위 두 그래프 중에서 아래의 그래프는 $f'(1) = 1$, $f(1) = 4$ 조건을 만족시킬 수 없으므로 첫 번째 그래프의 상황이 맞는 상황입니다.

$$f(x) - (x-\alpha) = k(x-\alpha)(x-1)^2$$

$$f(1) - (1-\alpha) = 0, \quad f(1) = 4 \rightarrow \alpha = -3$$

$$f(x) = (x+3)\{k(x-1)^2+1\}$$

방정식 $k(x-1)^2+1 = 0$ 이 $x = -3$ 을 근으로 가져야 하므로

$$16k+1 = 0 \rightarrow k = -\frac{1}{16}$$

$$\therefore f(x) = (x-3)\left\{-\frac{1}{16}(x-1)^2+1\right\}$$

$$f(0) = 3 \times \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{45}{16} \rightarrow p = 16, q = 45$$

$$\therefore p+q = 16+45 = 61$$

확률과 통계

확률과 통계 23 ④

$${}_5C_3(2x)^3 \times 1^2 = 80x^3$$

확률과 통계 24 ②

학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 1학년인 사건을 A , 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생인 사건을 B 라 하자.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$$

확률과 통계 25 ③

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수는 총 5^4 개다. 이러한 자연수들 중에서 3500보다 큰 자연수는 총 $1 \times 1 \times 5^2 + 2 \times 5^3 = 11 \times 5^2$ 개다.

따라서 문제에서 구하고자하는 확률은 $\frac{11 \times 5^2}{5^4} = \frac{11}{25}$ 이다.

확률과 통계 26 ③

세명의 학생을 각각 A, B, C라고 하고 학생 A가 받은 빨간색 카드, 파란색 카드, 노란색 카드의 장수를 각각 R_A, B_A, Y_A 학생 B가 받은 빨간색 카드, 파란색 카드, 노란색 카드의 장수를 각각 R_B, B_B, Y_B 학생 C가 받은 빨간색 카드, 파란색 카드, 노란색 카드의 장수를 각각 R_C, B_C, Y_C 라고 하자.

$R_A + R_B + R_C = 4, B_A + B_B + B_C = 2, Y_A + Y_B + Y_C = 1$
노란색 카드는 1장밖에 없으므로 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있으려면 노란색 카드를 받은 학생은 빨간색 카드와 파란색 카드도 한 장 이상씩 받아야한다.

Cases 1) 학생 A가 노란색 카드를 받는 경우

$$R_A \geq 1, B_A \geq 1, Y_A = 1$$

$$R_B \geq 0, B_B \geq 0, Y_B = 0$$

$$R_C \geq 0, B_C \geq 0, Y_C = 0$$

$$R_A + R_B + R_C = 4 \rightarrow {}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$$

$$B_A + B_B + B_C = 2 \rightarrow {}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

$$Y_A + Y_B + Y_C = 1 \rightarrow 1$$

$$\therefore 10 \times 3 \times 1 = 30$$

학생 A가 노란색 카드를 받는 경우와 학생 B가 노란색 카드를 받는 경우, 학생 C가 노란색 카드를 받는 경우의 경우의 수는 모두 같으므로 문제에서 구해야 하는 값은 $3 \times 30 = 90$ 이다.

확률과 통계 27 ①

$$\text{앞면이 나온 동전의 개수가 1개} : {}_4C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{36}$$

$$\text{앞면이 나온 동전의 개수가 2개} : {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{2}{36}$$

$$\text{앞면이 나온 동전의 개수가 3개} : {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{2}{36}$$

$$\text{앞면이 나온 동전의 개수가 4개} : {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{3}{36}$$

$$\therefore \frac{4+12+8+3}{2^4 \times 36} = \frac{27}{9 \times 64} = \frac{3}{64}$$

확률과 통계 28 ⑤

얻은 네 점수의 합이 4가 되는 경우는

3점, 1점, 0점, 0점을 얻거나

2점, 2점, 0점, 0점을 얻거나

2점, 1점, 1점, 0점을 얻거나

1점, 1점, 1점, 1점을 얻으면 된다.

$$\therefore \frac{4!}{2!} \times 3^2 + \frac{4!}{2! \times 2!} \times 3^2 + \frac{4!}{2!} \times 3 + \frac{4!}{4!} = 108 + 54 + 36 + 1 = 199$$

확률과 통계 29 48

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수 : $5! = 120$

3과 4가 이웃하는 경우의 수 : $2 \times 4! = 48$

2와 6이 이웃하는 경우의 수 : $2 \times 4! = 48$

3과 4가 이웃하고 2와 6이 이웃하는 경우의 수 :

$$2 \times (2 \times 1 \times 2! + 2 \times 2 \times 2!) = 24$$

$$\therefore 120 - (48 + 48 - 24) = 48$$

확률과 통계 30 47

5개의 수의 곱이 6의 배수이려면 2와 3이 각각 한 개 이상씩 나와야 한다.

$$2 \text{가 하나도 안나오는 경우} : \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$3 \text{가 하나도 안나오는 경우} : \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$2 \text{와 } 3 \text{가 하나도 안나오는 경우} : \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$\therefore 1 - \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right\} = 1 - \frac{63}{3^5} = \frac{20}{27}$$

$$p = 27, q = 20$$

$$\therefore p + q = 27 + 20 = 47$$

미적분

미적분 23 ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1} = 2$$

미적분 24 ②

$$\frac{dx}{dt} = e^t - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{\cos 0}{e^0 - \sin 0} = 1$$

미적분 25 ④

곡선 $y = e^{|x|}$ 는 y 축에 대하여 대칭인 함수이므로 원점에서 곡선 $y = e^{|x|}$ 에 그은 두 접선은 y 축에 대하여 대칭이다. 원점에서 곡선 $y = e^{|x|}$ 의 제 1사분면 위의 점 (t, e^t) 에 그은 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α 라고 하자.

$$\tan \alpha = e^t = \frac{e^t}{t} \rightarrow t = 1, \quad \tan \alpha = e$$

$\alpha > \frac{\pi}{4}$ 이므로 원점에서 곡선 $y = e^{|x|}$ 에 그은 두 접선이 이루는 예각 θ 는 $\theta = \pi - 2\alpha$ 이다.

$$\therefore \tan \theta = \tan(\pi - 2\alpha) = -\tan 2\alpha = -\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2e}{e^2 - 1}$$

미적분 26 ③

부채꼴 $O_1A_1B_1$ 은 반지름이 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인

부채꼴이므로 $S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$ 이다.

선분 O_1A_1 과 O_2A_2 는 서로 평행하므로

$\angle O_2A_2O_1 = \angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{4}$ 이다.

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\sin \frac{\pi}{4}} \rightarrow \overline{O_2A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

부채꼴 $O_2A_2B_2$ 은 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴이다.

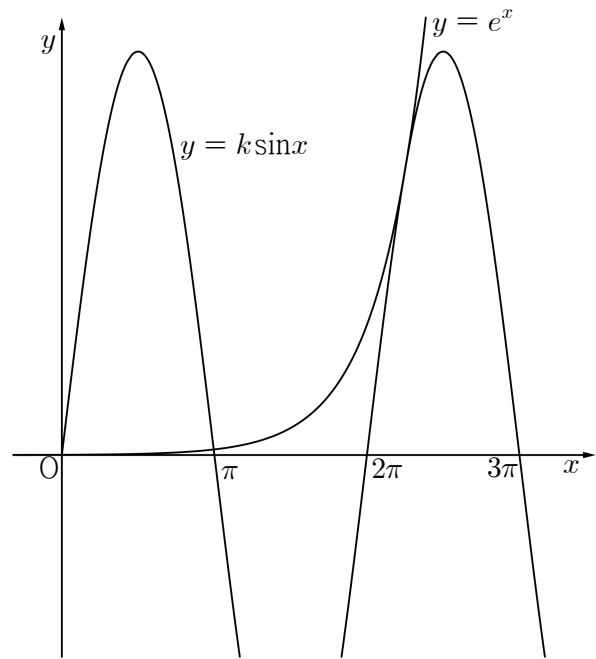
(답음비)² = 넓이버, $S_2 - S_1 = S_1 \times \frac{1}{2}$

\therefore 초항이 $\frac{\pi}{8}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 무한 등비급수가 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 과 같으므로

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{8} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

미적분 27 ④

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이 되려면 두 함수는 다음과 같이 만나야합니다.



함수 $y = k \sin x$ 와 $y = e^x$ 가 접하는 점의 x 좌표를 α 라고 하자.

$$f(\alpha) = g(\alpha), \quad f'(\alpha) = g'(\alpha) \rightarrow e^\alpha = k \sin \alpha, \quad e^\alpha = k \cos \alpha$$

$2\pi < \alpha < 3\pi$ 이므로 $\alpha = \frac{9}{4}\pi$ 이다.

$$e^{\frac{9}{4}\pi} = k \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore k = \sqrt{2} e^{\frac{9}{4}\pi}$$

미적분 28 ①

$$\overline{OA} = \overline{OP} = 1, \quad \angle OAP = \angle OPA = \theta, \quad \angle AOP = \pi - 2\theta$$

$$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 2\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\angle POB = 2\theta \rightarrow \overline{OQ} = \sec 2\theta, \quad \overline{OP} = 1 \rightarrow \overline{PQ} = \sec 2\theta - 1$$

$$\angle OQB = \frac{\pi}{2} - 2\theta \rightarrow \angle PQR = \frac{\pi}{4} - \theta$$

$$\angle QPR = \theta, \quad \angle PQR = \frac{\pi}{4} - \theta \rightarrow \angle PRQ = \frac{3}{4}\pi$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{PQ}}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{\overline{PR}}{\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}$ 이다.

$$\overline{PR} = \overline{PQ} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\sin \frac{3}{4}\pi}$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\sin \frac{3}{4}\pi} \times (\sec 2\theta - 1)^2 \times \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\sin \frac{3}{4}\pi} \times (\sec 2\theta - 1)^2 \times \sin \theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\sin \frac{3}{4}\pi} \times (\sec 2\theta - 1)^2 \times \sin \theta}{\theta^4 \times \frac{1}{2} \sin 2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(\sin^2 2\theta)^2 \times \sin \theta}{\theta^4 \times \sin 2\theta \times (\cos^2 2\theta + \cos 2\theta)^2}$$

$$= \frac{16}{8} = 2$$

미적분 29 17

$$f'(x) = \frac{2t \ln x}{x} - 2x$$

$$f'(g(t)) = \frac{2t \ln g(t)}{g(t)} - 2g(t) = 0$$

$$t \ln g(t) = \{g(t)\}^2$$

위 식에 $t = \alpha$ 를 대입하면

$$\alpha \ln g(\alpha) = \{g(\alpha)\}^2 \rightarrow 2\alpha = e^4$$

$$\therefore \alpha = \frac{e^4}{2}$$

 $t \ln g(t) = \{g(t)\}^2$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\ln g(t) + t \times \frac{g'(t)}{g(t)} = 2g(t)g'(t)$$

위 식에 $t = \alpha$ 를 대입하면

$$\ln g(\alpha) + \alpha \times \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} = 2g(\alpha)g'(\alpha)$$

$$2 + \frac{e^4}{2} \times \frac{g'(\alpha)}{e^2} = 2e^2 \times g'(\alpha)$$

$$g'(\alpha) = \frac{4}{3e^2}$$

$$\therefore \alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{e^4}{2} \times \left(\frac{4}{3e^2}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$p = 9, q = 8$$

$$\therefore p + q = 9 + 8 = 17$$

미적분 30 11

곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$ 와 $y = x + t$ 는 $x = -t$ 인 점에서 만난다.곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$ 와 $y = x + t$ 가 만나는 점 중 x 좌표가 $-t$ 가 아닌 점의 x 좌표를 $g(t)$ 라 하자. $t > \frac{1}{2} \ln 2$ 이므로 $g(t) > -t$ 이다.

$$\therefore f(t) = \sqrt{2} \{g(t) + t\}$$

$$g(t) + t = \ln(1 + e^{2g(t)} - e^{-2t})$$

위의 식에 $t = \ln 2$ 를 대입하면

$$g(\ln 2) + \ln 2 = \ln\left(1 + e^{2g(\ln 2)} - \frac{1}{4}\right)$$

$$2 \times e^{g(\ln 2)} = e^{2g(\ln 2)} + \frac{3}{4}$$

$$g(\ln 2) = \ln \frac{1}{2} \text{ or } g(\ln 2) = \ln \frac{3}{2}$$

 $g(\ln 2) = \ln \frac{1}{2}$ 일 경우 $g(t) > -t$ 에 위배되므로

$$g(\ln 2) = \ln \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

$$g(t) + t = \ln(1 + e^{2g(t)} - e^{-2t})$$

위의 식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$g'(t) + 1 = \frac{e^{2g(t)} \times 2g'(t) + 2e^{-2t}}{1 + e^{2g(t)} - e^{-2t}}$$

위의 식에 $t = \ln 2$ 를 대입하면

$$g'(\ln 2) + 1 = \frac{e^{2g(\ln 2)} \times 2g'(\ln 2) + \frac{1}{2}}{e^{2g(\ln 2)} + \frac{3}{4}}$$

$$g'(\ln 2) + 1 = \frac{\frac{9}{2}g'(\ln 2) + \frac{1}{2}}{3}$$

$$\therefore g'(\ln 2) = \frac{5}{3}$$

$$f(t) = \sqrt{2} \{g(t) + t\}$$

위 식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$f'(t) = \sqrt{2} \{g'(t) + 1\}$$

$$f'(\ln 2) = \sqrt{2} \left(\frac{5}{3} + 1\right) = \frac{8}{3} \sqrt{2}$$

$$p = 3, q = 8$$

$$\therefore p + q = 3 + 8 = 11$$

기하

기하 23 ②

$\vec{a} = (k+3, 3k-1)$ 와 $\vec{b} = (1, 1)$ 가 서로 평행하려면 $k+3 = 3k-1$ 이어야 한다.
 $\therefore k = 2$

기하 24 ⑤

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 $(2, \sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{2x}{8} + \frac{\sqrt{2}y}{4} = 1$ 이다.
 \therefore 접선의 x 절편은 4이다.

기하 25 ①

$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 $|\vec{OP} - \vec{OA}| = |\vec{AP}| = 5$
 \therefore 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이다.
 \therefore 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $5 \times 2\pi = 10\pi$ 이다.

기하 26 ②

\vec{AE} 와 \vec{BC} 를 성분으로 표현하면 다음과 같다.
 $\vec{AE} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{BC} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 $\vec{AE} + \vec{BC} = (2, -\sqrt{3})$
 $\therefore |\vec{AE} + \vec{BC}| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$

기하 27 ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$ 이다.
삼각형 OQR과 SPQ는 서로 닮음이다.
선분 OR의 길이가 선분 PS의 길이의 t 배라고 하면 삼각형 OQR의 넓이는 삼각형 SQP의 넓이의 t^2 배이고 삼각형 SQR의 넓이는 삼각형 SQP의 t 배이다.
 $A_1 : A_2 = 9 : 4 = t^2 : t+1$
 $4t^2 = 9t+9 \rightarrow t = 3$
 $\therefore \overline{OQ} : \overline{SQ} = 3 : 1$
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선의 x 절편은 3이다. $\rightarrow a^2 = 12, a = 2\sqrt{3}$
 \therefore 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a = 4\sqrt{3}$ 이다.

기하 28 ③

원의 중심을 O, 원과 타원이 만나는 한 점을 A라고 하자.
점 A는 타원의 꼭짓점이므로 $\overline{AF} = \overline{AF'}$ 이다.
 $\overline{AF} = \overline{AF'}$, $\overline{OA} = \overline{OF} = 1$, $\angle OFA$ 공통
삼각형 OFA와 삼각형 OFF'은 서로 닮음이다.

$$\overline{OA} : \overline{AF} = \overline{AF} : \overline{FF'} \rightarrow 1 : a : a : \overline{FF'}$$

$$\overline{FF'} = a^2$$

선분 FF'의 중점을 C라 하자.

$$\overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{FF'} = \frac{1}{2}a^2$$

타원의 장축의 길이가 $2a$ 이므로 $\overline{OC} = a$ 이다.

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = a + \frac{1}{2}a^2 = 1 \rightarrow a = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore a = \sqrt{3} - 1 (\because a > 0)$$

기하 29 80

포물선 $(y-2a)^2 = 8(x-a)$ 의 준선은 $x = a-2$ 이다.

두 점 A, B에서 직선 $x = a-2$ 에 내린 수선의 발을 각각 H_A ,

H_B 라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH_A} + \overline{BH_B} = \overline{AB}$ 이다.

$$\overline{AC} = \overline{AH_A} + \overline{CH_A}, \overline{BC} = \overline{BH_B} + \overline{CH_B}$$

$$\overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AB} = \overline{AH_A} + \overline{CH_A} + \overline{BH_B} + \overline{CH_B} - \overline{AB} = \overline{CH_A} + \overline{CH_B} = 2a$$

$$\therefore k = 2a$$

포물선 $y^2 = 8x$ 와 직선 $y = 2x-4$ 가 만나는 점 중 점 A가

아닌 점을 E, 점 E에서 직선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 F라 하자.

포물선 $(y-2a)^2 = 8(x-a)$ 은 포물선 $y^2 = 8x$ 을 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동 시킨 도형이므로

점 A는 점 E를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동 시킨 점이고

점 B는 점 A를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동 시킨 점이다.

$$\therefore \overline{AC} = \overline{EF} + a, \overline{BD} = \overline{AC} + a$$

$$y^2 = 8x, y = 2x-4 \rightarrow (2x-4)^2 = 8x$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}$$

\therefore 점 A의 x 좌표는 $3 + \sqrt{5}$ 이고 점 E의 x 좌표는

$3 - \sqrt{5}$ 이다.

$$\overline{EF} = 5 - \sqrt{5}, \overline{AC} = 5 + \sqrt{5}$$

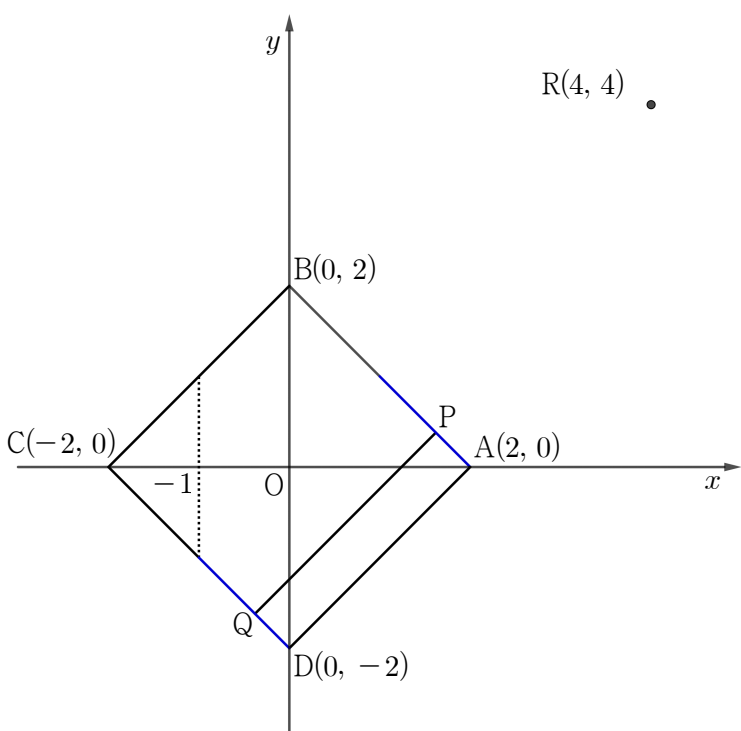
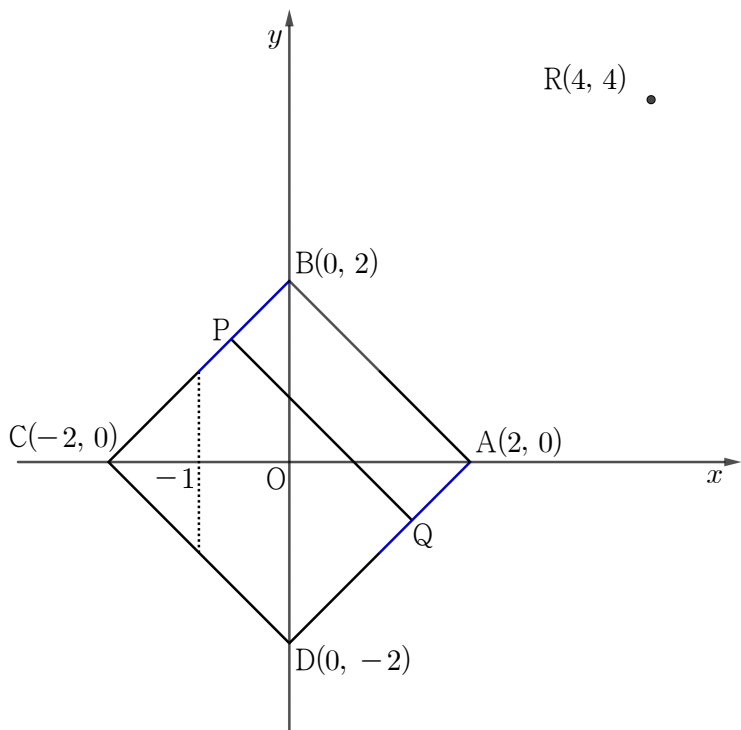
$$\therefore a = 2\sqrt{5}$$

$$k = 2a = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore k^2 = 80$$

기하 30 48

(가) 조건에 의하여 선분 PQ는 선분 AB에 수직이거나 선분 AD에 수직이다.
 $\vec{OA} \cdot \vec{OP} \geq -2$ 에 의하여 점 P의 x좌표는 -1이상이고
 $\vec{OB} \cdot \vec{OP} \geq 0$ 에 의하여 점 P의 y좌표는 0이상이다.
 $\vec{OA} \cdot \vec{OQ} \geq -2$ 에 의하여 점 Q의 x좌표는 -1이상이고
 $\vec{OB} \cdot \vec{OQ} \leq 0$ 에 의하여 점 Q의 y좌표는 0이하이다.
 점 P와 Q가 존재할 수 있는 위치를 각각 파란색으로 나타내면 다음과 같다.



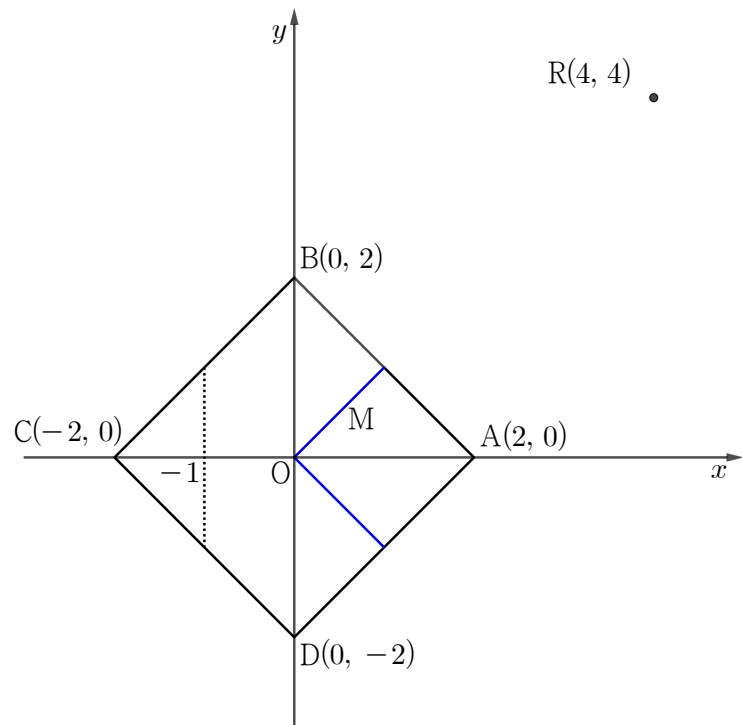
선 PQ의 중점을 M이라 하자.

$$\vec{RP} \cdot \vec{RQ} = (\vec{RM} + \vec{MP}) \cdot (\vec{RM} + \vec{MQ}) = |\vec{RM}|^2 - |\vec{MP}|^2 = |\vec{RM}|^2 - 2$$

$\vec{RP} \cdot \vec{RQ}$ 은 $|\vec{RM}|$ 이 최대일 때 최댓값을 가지고

$\vec{RP} \cdot \vec{RQ}$ 은 $|\vec{RM}|$ 이 최소일 때 최솟값을 가진다.

$|\vec{RM}|$ 의 최대 최소를 파악하기 위해서 점 M의 자취를 파란색으로 그리면 다음과 같다.



$|\vec{RM}|$ 은 M(1, 1)일 때 최솟값 $3\sqrt{2}$ 를 가지고

$|\vec{RM}|$ 은 M(1, -1)일 때 최댓값 $\sqrt{34}$ 를 가진다.

$$\vec{RP} \cdot \vec{RQ} = |\vec{RM}|^2 - 2$$

$\therefore \vec{RP} \cdot \vec{RQ}$ 의 최댓값은 $34 - 2 = 32$ 이고 $\vec{RP} \cdot \vec{RQ}$ 의 최솟값은 $18 - 2 = 16$ 이다.

$$M = 32, m = 16$$

$$\therefore M + m = 32 + 16 = 48$$