제 2 교시

2020년 시행 모의고사 주요 문항 모음

수학 영역

(가 형)

성명	

수험 번호					—				

○ 자신이 선택한 유형('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

미래를 내세워 오늘 할 일을 흐리지 말 것

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Team Math Manual / YoonSol

= 2020년 시행 모의고사 주요 문항 모음 구성 =

• 올해 시행된 학력평가, 모의평가, 2022학년도 대수능 예시문항, 사관학교, 경찰대 1차 시험 문제들을 시행 순서대로 문제 유형별로 구성하였습니다.

= 문제 유형별 문항 수 =

• 미분 적분 (준)킬러 : 33문제
• 미분 적분 ㄱㄴㄷ : 6문제
• 수열 (준)킬러 : 23문제
• 수열 빈칸 추론 : 6문제
• 무한 등비 급수 : 6문제
• 도형의 극한 : 6문제
• 사인·코사인 법칙 활용 : 11문제
• 지수·로그·삼각함수 준킬러 : 21문제
• 확률과 통계 빈칸 추론 : 5문제
• 확률과 통계 준킬러 : 35문제

= 출처 표기법 안내 =

• 교육청 모의고사 : 시행년도를 기준으로 작성
ㄴ 2020년시행 3월 모의고사 가형 29번 : 200329(가)

• 평가원 모의고사 : 당해 수능을 기준으로 작성
ㄴ 2020년시행 6월 모의고사 가형 29번 : 210629(가)

• 사관학교, 경찰대 1차 시험 : 당해 수능을 기준으로 작성
ㄴ 2020년시행 사관학교 가형 29번 : 21사관29(가)

• 2022학년도 수능 예시문항 : 22예비XX(유형)의 형식으로 작성
ㄴ 2022학년도 예시문항 공통 21번 : 22예비21(공통)
ㄴ 2022학년도 예시문항 미적분 30번 : 22예비30(미적분)

= 나형 수험생 분들을 위한 안내 =

원래 나형 버전도 해당 파일에서 미적분 문항 제외해서 나형버전으로 제작하려고 했으나 수2 문항 중에서 제외한 문항들이 많아서 나형 학생들에게 "이것만 봐라"라고 하기에는 조금 위험할 거 같았습니다.
하지만 저도 올해 수능을 보는 수험생이라 따로 시간을 낼 수가 없어서 나형 제작은 포기하기로 결정했습니다.
대신 나형 수험생들을 위한 문항 선별 작업은 해두었으니 이를 참고하여 학습해주시면 감사하겠습니다.

= 문제 유형별 선별 =

• 미분 적분 (준)킬러, ㄱㄴㄷ : 3월까진 전문항, 4월부턴 나형만
• 수열 (준)킬러 : 4월 가형 15번 제외
• 무한 등비 급수, 도형의 극한 : 전체 제외
• 사인코사인 법칙 활용 : 7월 가형 26번 제외
• 지수로그삼각함수 준킬러 : 6월 가형 16번 제외
• 그 외의 파트 : 전문항 풀이 가능

제 2 교시

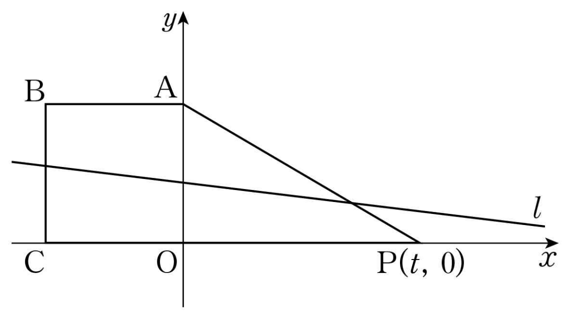
수학 영역(가 형)

미분 적분 (준)킬러

1. $0<a<6$인 실수 a에 대하여 원점에서 곡선 $y=x(x-a)(x-6)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은? 〔200317(가)〕 1)

① -54 ② -51 ③ -48 ④ -45 ⑤ -42

2. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(-2,\ 0)$과 점 $\mathrm{P}(t,\ 0)\ (t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$의 값은? 〔200320(가)〕 2)



① $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

④ 1 ⑤ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}$

3. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=0$
(나) 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.
$f(5)$의 값을 구하시오. 〔200330(가)〕[3)]

4. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(2)$의 값은? 〔200320(나)〕[4)]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

5. 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (나) 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? 〔200321(나)〕 5)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

6. 자연수 a에 대하여 두 함수를

$$f(x)=-x^4-2x^3-x^2,\ g(x)=3x^2+a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a의 값을 구하시오.

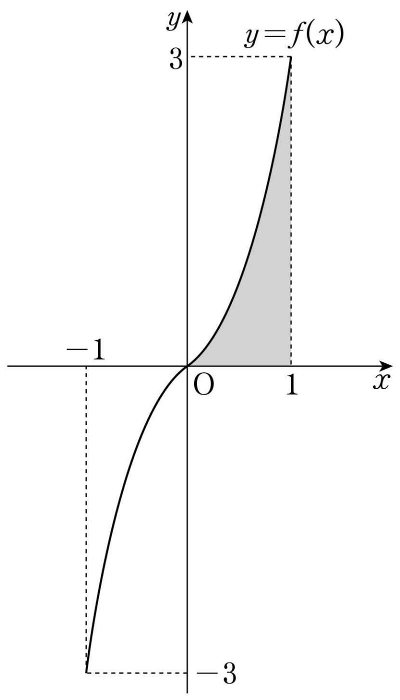
〔200328(나)〕 6)

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le 12x+k\le g(x)$ 를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.

7. 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 는 정의역에서 증가하고 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 $g(x) = f(x)$ 이다.
> (나) 닫힌구간 $[2n-1, 2n+1]$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$ 만큼, y축의 방향으로 $6n$ 만큼 평행이동한 그래프이다. (단, n 은 자연수이다.)

$f(1) = 3$ 이고 $\int_0^1 f(x)dx = 1$ 일 때, $\int_3^6 g(x)dx$ 의 값을 구하시오. 〔200330(나)〕 7)



8. 양의 실수 t 와 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 0 이다.
> (나) x 에 대한 방정식 $f'(x) = g(a)$ 를 만족시키는 x 의 값은 a 와 $\frac{5}{3}$ 이다. (단, $a > \frac{5}{3}$ 인 상수이다.)

자연수 m 에 대하여 집합 A_m 을

$$A_m = \{x \mid f'(x) = g(m),\ 0 < x \le m\}$$

이라 할 때, $n(A_m) = 2$ 를 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합을 구하시오. 〔200430(나)〕 8)

9. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하시오. 〔22예비22(공통)〕 9)

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
(나) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

10. 함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오. 〔22예비29(미적분)〕 10)

11. 두 양수 a, $b\,(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다. 11)

> $\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m)-\lim\limits_{m\to\alpha+} g(m)=1$을 만족시키는 양수 α가 오직 하나 존재하고, 이 α에 대하여 점 $(b,\ f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이다.)

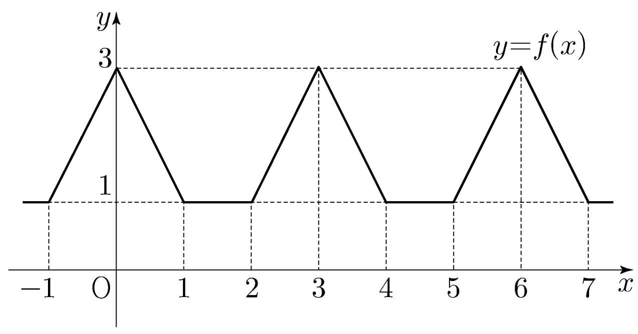
〔22예비30(미적분)〕

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0\le x<3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5,\ 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_n (n은 자연수)라 할 때,

$n+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. 〔210630(가)〕 12)



13. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. 〔210630(나)〕 13)

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다. (나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

14. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $g(x)$가 증가함수일 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=(f \circ g)(x)$$

라 하자. 점 $(2,\ 2)$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고 $\dfrac{h''(2)}{f''(2)}=4$이다. $f'(2)=4$일 때, $h'(2)$의 값은?

〔200715(가)〕 14)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

15. 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt$$

일 때, 함수 $g(x)$와 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖는다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=g'(x)$이다.

$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx$의 값은? 〔200719(가)〕 15)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

16. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ (0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, m 이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) n이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.
(나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 e^3+e^{-3}일 때, $m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.) 〔200730(가)〕 16)

17. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$, $f(x+3)=f(x)$이고 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2\,dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

〔200728(나)〕 17)

18. $t \geq 6-3\sqrt{2}$인 실수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+tx & (x<0) \\ -3x^2+tx & (x \geq 0) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

(가) 닫힌구간 $[k-1,\ k]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖는다.
(나) 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k+1$에서 최솟값을 갖는다.

$3\int_{2}^{4}\{6g(t)-3\}^2\,dt$의 값을 구하시오. 〔200730(나)〕 18)

19. 세 상수 a, b $c(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-ax^2+6ex+b & (x<c)\\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\geq c)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\frac{1}{2e}\right)$의 값은? 〔21사관20(가)〕[19)]

① $-4\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$ ③ $-3\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$
④ $-3\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$ ⑤ $-2\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$

20. 두 함수 $f(x)=x^2-ax+b$ $(a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(0)<h(4)$
> (나) 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2}<e<3$이고, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이다.)

〔21사관30(가)〕[20)]

21. 양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = 2x^2 + ax$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x) + a^2$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. 〔21사관28(나)〕 21)

22. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} x(x+a)^2 & (x < 0) \\ x(x-a)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 4x + t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t = \alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. 〔21사관30(나)〕 22)

23. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt \quad (x\geq 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.
$k^2<a_6<(k+1)^2$인 자연수 k의 값은? 〔210920(가)〕 23)

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

24. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{-x+1}\leq ax+b\leq e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$|M\times m^3|=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔210930(가)〕 24)

25. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \leq 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? 〔210918(나)〕[25)]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

26. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$

(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$

(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은? 〔210920(나)〕[26)]

① $\frac{23}{6}$　② $\frac{13}{3}$　③ $\frac{29}{6}$　④ $\frac{16}{3}$　⑤ $\frac{35}{6}$

27. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
>
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오.

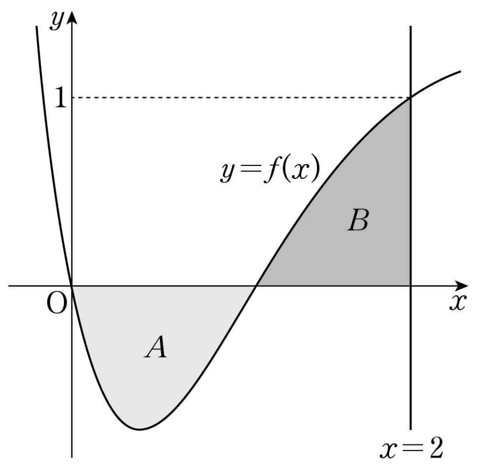
〔210930(나)〕 27)

28. 함수 $f(x)=\cos x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k\pi}{n^2}f\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{n}\right)$의 값은?

〔201014(가)〕 28)

① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

29. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$, $f(2)=1$이다. 그림과 같이 $0 \le x \le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하자. $A=B$일 때, $\int_0^2 (2x+3)f'(x)\,dx$의 값을 구하시오. 〔201027(가)〕 29)



30. 최고차항의 계수가 $k\,(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\neq 0$이다. 함수 $g(x)=(ax+b)e^{f(x)}\ (a<0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\le 0$을 만족시키는 실수 m의 최솟값은 -2이다.

(나) $\int_0^1 g(x)dx = \int_{-2f(0)}^{1} g(x)dx = \frac{e-e^4}{k}$

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

〔201030(가)〕 30)

31. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2x+2\int_0^1 g(t)\,dt$
(나) $g(0)-\int_0^1 g(t)\,dt=\frac{2}{3}$

$g(1)$의 값은? 〔201016(나)〕 31)

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

32. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이고 함수 $g(x)$는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x)\,dx$의 값은?

〔201020(나)〕 32)

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

33. 함수 $f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<1)\\ 2(x-3) & (x\geq 1)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자. $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

〔201030(나)〕 33)

미분 적분 ㄱㄴㄷ

34. 0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수

$$f(x)=2x^3-8x,$$

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{47}{m}x+\dfrac{4}{m^3} & (x<0)\\ 2mx+\dfrac{4}{m^3} & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〔200321(가)〕 34)

〈보 기〉

ㄱ. $m=-1$일 때, $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$이다.

ㄴ. $m=-1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다.

ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$ 에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)\,(0<x<4)$$

라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〔200721(가)〕 35)

<보 기>

ㄱ. $h(1)=0$

ㄴ. 두 양수 a, $b\,(a<b<4)$에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때, $b-a=2$이다.

ㄷ. $h(x)$의 도함수 $h'(x)$의 최댓값은 $\dfrac{7}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는
서로 다른 두 점에서만 만난다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〔200720(나)〕 36)

<보 기>

ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다.

ㄴ. $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\geq 0$이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t\,dt\right|$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〔21사관21(가)〕 37)

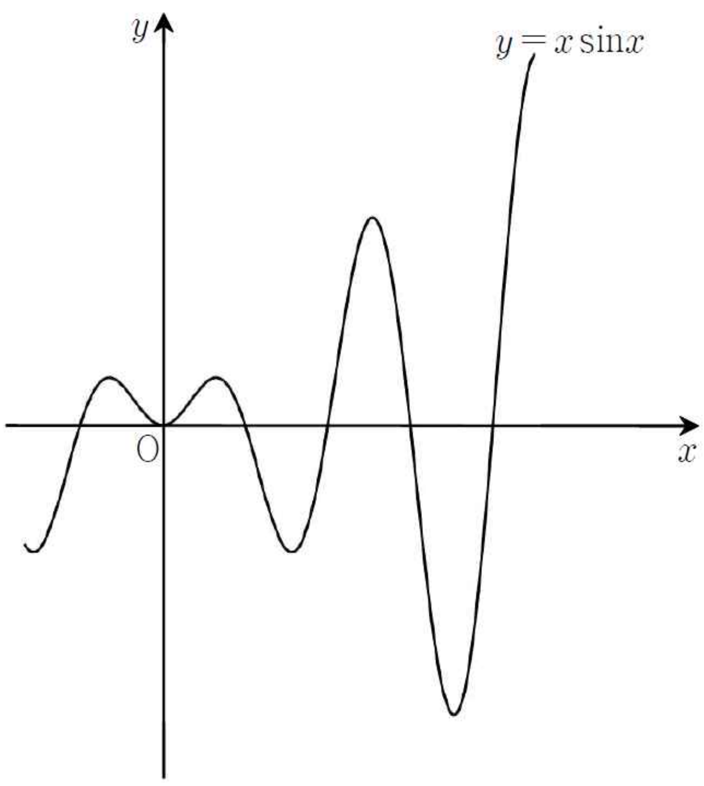
〈보 기〉

ㄱ. $f(2\pi)=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$인 α에 대하여 $\int_0^\alpha t\sin t\,dt=0$이면 $f(\alpha)=\pi$이다.

ㄷ. $2\pi<\beta<3\pi$인 β에 대하여 $\int_0^\beta t\sin t\,dt=0$이면 $\int_\beta^{3\pi} f(x)dx=6\pi(3\pi-\beta)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



38. 함수

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0)\end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〔210918(가)〕 38)

<보 기>

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{nx}{x^n+1} & (x \neq -1) \\ -2 & (x=-1) \end{cases}$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〔201020(가)〕[39)]

< 보 기 >

ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 n에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 구간 $(-1, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수열 (준)킬러

40. 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(0, n+5)$, $\mathrm{B}(n+4, 0)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. 삼각형 AOB의 내부에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하시오. 〔200329(가)〕[40)]

41. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} k a_k$$

를 만족시킨다. $a_1=2$일 때, $a_2+\dfrac{a_{51}}{a_{50}}$의 값은?

〔200315(나)〕 41)

① 47 ② 49 ③ 51 ④ 53 ⑤ 55

42. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3=42$일 때, 다음 조건을 만족시키는 4 이상의 자연수 k의 값은? 〔200317(나)〕 42)

(가) $a_{k-3}+a_{k-1}=-24$
(나) $S_k=k^2$

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

43. 첫째항이 양수이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값은?
〔200415(가)〕 43)

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\log a_n + \log a_{n+1} + \log b_n = 0$
(나) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{12}$

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

44. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3의 값은? 〔200417(가)〕 44)

(가) $\sum_{k=1}^{4} a_k = 45$
(나) $\sum_{k=1}^{6} \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

45. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n} = b_n + 2$
> (나) $a_{2n+1} = b_n - 1$
> (다) $b_{2n} = 3a_n - 2$
> (라) $b_{2n+1} = -a_n + 3$

$a_{48} = 9$이고 $\sum_{n=1}^{63} a_n - \sum_{n=1}^{31} b_n = 155$일 때, b_{32}의 값을 구하시오.

〔200430(가)〕 45)

46. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + 3a_n = (-1)^n \times n$$

를 만족시킨다. a_5의 값을 구하시오. 〔200427(나)〕 46)

47. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? 〔22예비15(공통)〕 47)

(가) $a_5 = 5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \ge 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$
이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

48. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 + a_5 = 0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k| + a_k) = 30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오. 〔22예비20(공통)〕 48)

49. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? 〔210621(가)〕 49)

① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

50. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 9$, $a_2 = 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k| = 3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. 〔210624(가)〕 50)

51. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오.

〔210626(가)/210618(나)〕 51)

52. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$$

을 만족시킨다. $a_5\times a_7\times a_9=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔210628(나)〕 52)

53. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은? 〔200717(가)/200717(나)〕 53)

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

54. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이다.
(나) 점 P_n의 x좌표는 a_n이다.
(다) 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$이다.

$x \geq 1$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n, a_{n+1}]$에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 일치할 때, $\int_1^{11} f(x)dx$의 값은?

〔200719(나)〕 54)

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

55. 첫째항이 양수이고 공차가 -1보다 작은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 다음과 같다.

$$b_n = \begin{cases} a_{n+1} - \dfrac{n}{2} & (a_n \geq 0) \\ a_n + \dfrac{n}{2} & (a_n < 0) \end{cases}$$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5 < b_6$ (나) $S_5 = S_9 = 0$

$S_n \leq -70$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

〔200721(나)〕 55)

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

56. 자연수 n에 대하여 $0 \leq x < 2^{n+1}$일 때, 부등식

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \leq -\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오. 〔200727(나)〕 56)

57. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1} = -a_n + 3a_{n+1}$
(나) $a_{2n+2} = a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? 〔21사관18(가)〕 57)

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

58. 두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(m+2)$개의 수 $a,\ \log_2 c_1,\ \log_2 c_2,\ \log_2 c_3,\ \cdots,\ \log_2 c_m,\ b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 구하시오.
〔21사관26(가)/21사관16(나)〕 58)

59. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + cn \ (c\text{는 자연수})$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수가 아닌 수를 작은 것부터 크기순으로 모두 나열하여 얻은 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $b_{20} = 199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. 〔21사관29(나)〕 59)

60. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. 〔210927(가)〕 60)

61. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? 〔210921(나)〕 61)

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

62. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5=5$이고 $\sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|=20$이다. a_6의 값은? 〔201014(나)〕 62)

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

수열 빈칸 추론

63. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ 을 구하는 과정이다.

> $n=1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{a_1} = 2$이다.
>
> $n=2$일 때, $a_2 = S_2 - S_1 = -\frac{7}{6}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7}$ 이다.
>
> $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\frac{S_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k!} = -\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$
>
> 즉, $S_n = -\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$ 이므로
>
> $$a_n = S_n - S_{n-1} = -\left(\boxed{(나)}\right)$$
>
> 이다. 한편 $\sum_{k=3}^{n} k(k+1) = -8 + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ 이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7} - \sum_{k=3}^{n} k(k+1)$$
>
> $$= \frac{64}{7} - \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \boxed{(다)}$$
>
> $$= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(5) \times g(3) \times h(6)$의 값은? [22예비13(공통)] 63)

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

64. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \left(2^{2n} - 1\right) \times 2^{n(n-1)} + (n-1) \times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 (*)이 성립한다.
>
> (ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$
>
> 이다. $n=m+1$일 때,
>
> $$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$
>
> $$+ \left(2^{2m+2} - 1\right) \times \boxed{(가)} + m \times 2^{-m-1}$$
>
> $$= \boxed{(가)} \times \boxed{(나)} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m}$$
>
> $$= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)}$$
>
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(7)}{f(3)}$ 의 값은? [210615(가)] 64)

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

65. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
>
> (좌변) $= \dfrac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1} = 1$이고, (우변) $=$ $\boxed{(가)}$ 이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> (ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2m)!}{2^m}$$
>
> 이다. $n=m+1$일 때,
>
> $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!} \\ &\le \frac{(2m)!}{2^m} + \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!} \\ &= \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}} \times \left\{ \frac{1}{\boxed{(다)}} + \frac{1}{(m+1)!} \right\} \\ &< \frac{(2m+2)!}{2^{m+1}} \end{aligned}$$
>
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p + \dfrac{f(2)}{g(4)}$의 값은?

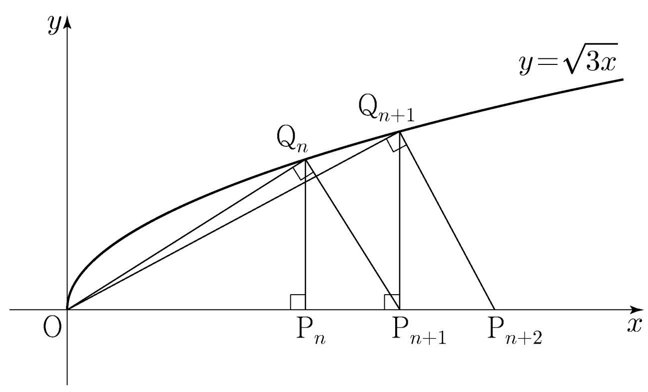
〔21사관17(가)/21사관18(나)〕 65)

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

66. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

> - 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
> - 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

> 
>
>
> 모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.
>
> $\overline{\mathrm{OP}_{n+1}} = \overline{\mathrm{OP}_n} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로
>
> $$a_{n+1} = a_n + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$
>
> 이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로
>
> $$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$
>
> 이고, 점 Q_n의 좌표는 $\left(a_n, \sqrt{3a_n}\right)$이므로
>
> $$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \boxed{(가)}$$
>
> 이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은
>
> $$A_n = \frac{1}{2} \times \left(\boxed{(나)}\right) \times \sqrt{9n-6}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? 〔210916(가)/210916(나)〕 66)

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

67. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$
>
> 이다. $n=m+1$일 때,
>
> $$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{k}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{k}+\boxed{(가)}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}({}_{m}\mathrm{C}_{k}+{}_{m}\mathrm{C}_{k-1})}{k}+\boxed{(가)}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\frac{\boxed{(나)}}{(m-k+1)!(k-1)!}\right\}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{\boxed{(다)}}\times\frac{(m+1)!}{(m-k+1)!\,k!}\right\}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\frac{1}{m+1}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$
>
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(3)+h(3)}{f(4)}$의 값은? 〔201019(가)〕 67)

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

68. 3 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$$A_n=\{(p,\,q)\,|\,p<q\text{이고 } p,\ q\text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\}$$

이다. 집합 A_n의 모든 원소 $(p,\,q)$에 대하여 q의 값의 평균을 a_n이라 하자. 다음은 3 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{2n+2}{3}$임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

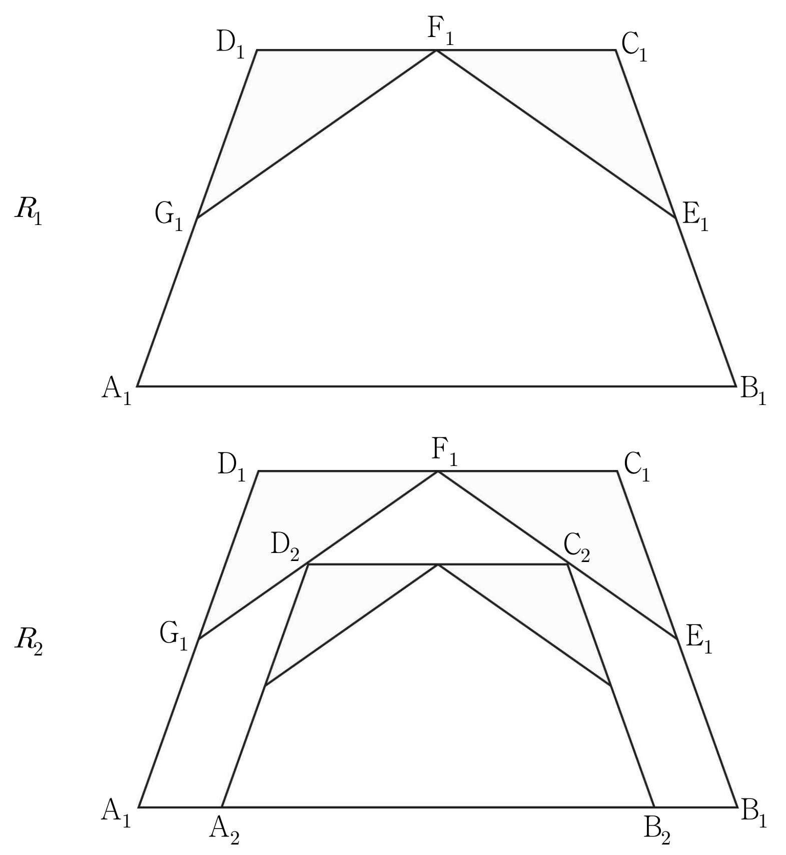
> (ⅰ) $n=3$일 때, $A_3=\{(1,\,2),\,(1,\,3),\,(2,\,3)\}$이므로
>
> $a_3=\dfrac{2+3+3}{3}=\dfrac{8}{3}$이고 $\dfrac{2\times3+2}{3}=\dfrac{8}{3}$이다.
>
> 그러므로 $a_n=\dfrac{2n+2}{3}$가 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k\ (k\ge 3)$일 때, $a_k=\dfrac{2k+2}{3}$가 성립한다고 가정하자. $n=k+1$일 때,
>
> $A_{k+1}=A_k\cup\{(1,\,k+1),\,(2,\,k+1),\,\cdots,\,(k,\,k+1)\}$
>
> 이고 집합 A_k의 원소의 개수는 $\boxed{(가)}$이므로
>
> $$a_{k+1}=\frac{\boxed{(가)}\times\dfrac{2k+2}{3}+\boxed{(나)}}{{}_{k+1}\mathrm{C}_{2}}$$
>
> $$=\frac{2k+4}{3}=\frac{2(k+1)+2}{3}$$
>
> 이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 $a_n=\dfrac{2n+2}{3}$가 성립한다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 3 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{2n+2}{3}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(10)+g(9)$의 값은? 〔201018(나)〕 68)

① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

무한 등비 급수

69. 그림과 같이 두 선분 A_1B_1, C_1D_1이 서로 평행하고 $\overline{A_1B_1}=10$, $\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}=6$인 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 세 선분 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하고 두 개의 삼각형 $C_1F_1E_1$, $D_1G_1F_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 A_1B_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 F_1G_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 두 선분 A_2B_2, C_2D_2가 서로 평행하며 $\overline{B_2C_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{D_2A_2}$, $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=5:3$인 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$에 두 개의 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이과 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? 〔200418(가)〕 69)

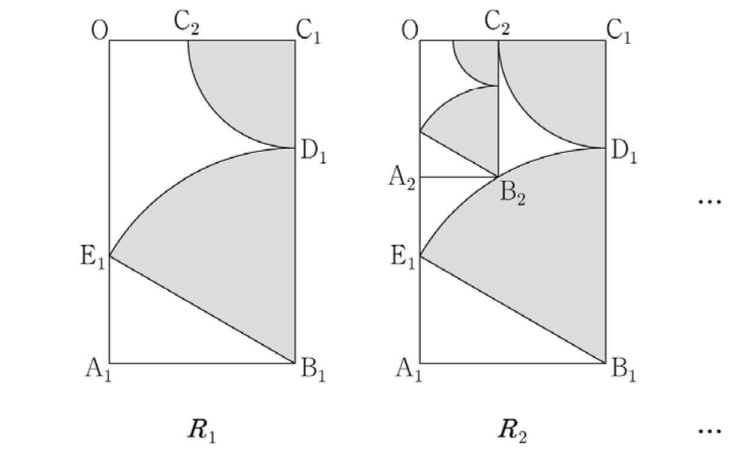


⋮ ⋮

① $\frac{234}{19}\sqrt{2}$ ② $\frac{236}{19}\sqrt{2}$ ③ $\frac{238}{19}\sqrt{2}$
④ $\frac{240}{19}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{242}{19}\sqrt{2}$

70. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=\sqrt{3}$, $\overline{OC_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1 위의 $\overline{B_1D_1}=2\overline{C_1D_1}$인 점 D_1에 대하여 중심이 B_1이고 반지름의 길가 $\overline{B_1D_1}$인 원과 선분 OA_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 C_2라 하자. 부채꼴 $B_1D_1E_1$의 내부와 부채꼴 $C_1C_2D_1$의 내부로 이루어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2, 호 D_1E_1 위의 점 B_2와 점 C_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

〔22예비26(미적분)〕 70)



① $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$ ③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$
④ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

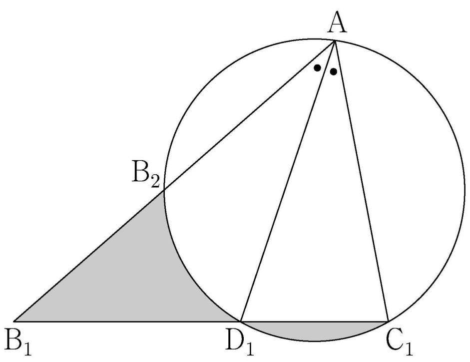
71. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

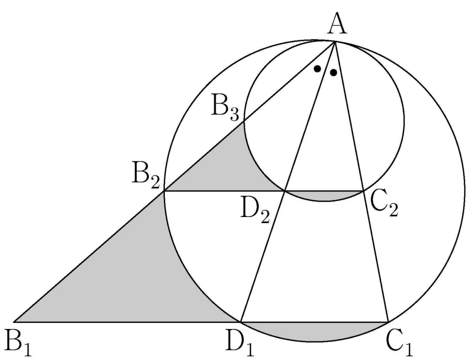
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

〔210620(가)〕 71)

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$
④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

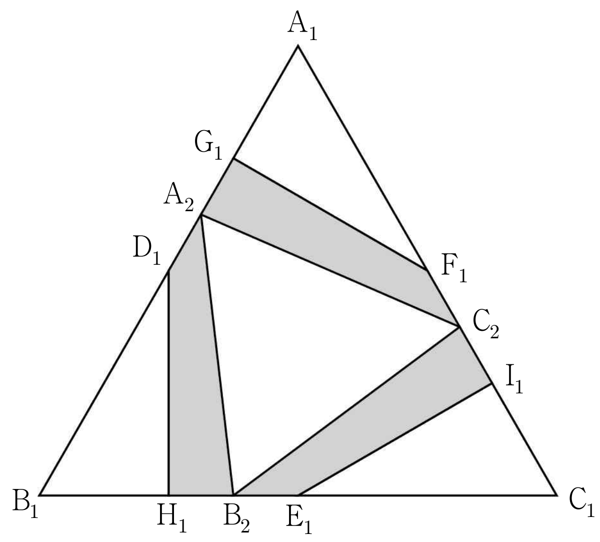
72. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하고, 세 선분 A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1의 중점을 각각 G_1, H_1, I_1이라 하고, 세 선분 G_1D_1, H_1E_1, I_1F_1의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 사각형 $A_3C_3F_2G_2$, $B_3A_3D_2H_2$, $C_3B_3E_2I_2$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

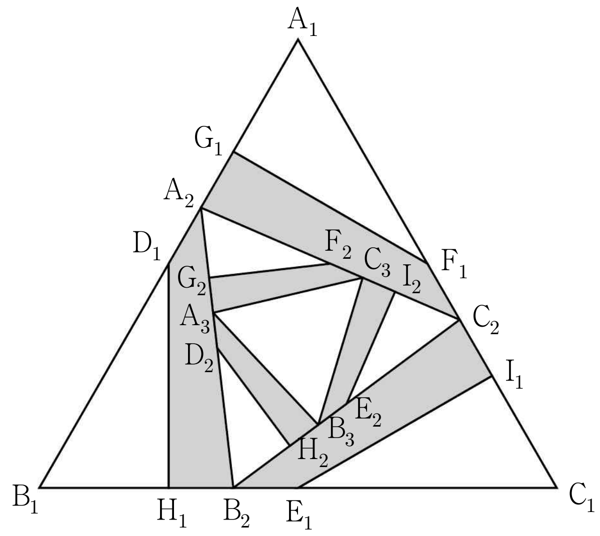
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

〔200718(가)〕 72)

R_1



R_2

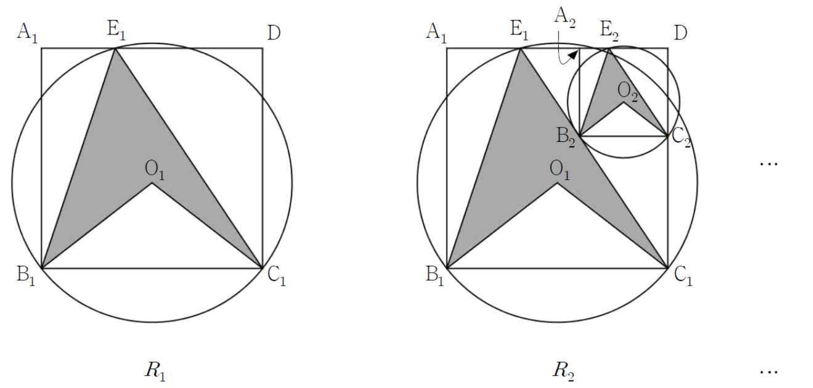


⋮ ⋮

① $\frac{109\sqrt{3}}{15}$ ② $\frac{112\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{23\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{118\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{121\sqrt{3}}{15}$

73. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D$에서 선분 A_1D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1을 지나는 원의 중심을 O_1이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 E_1D 위의 점 A_2, 선분 E_1C_1 위의 점 B_2, 선분 C_1D 위의 점 C_2와 점 D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D$에서 선분 A_2D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_2라 하고, 세 점 B_2, C_2, E_2를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 삼각형 $E_2B_2C_2$의 내부와 삼각형 $O_2B_2C_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

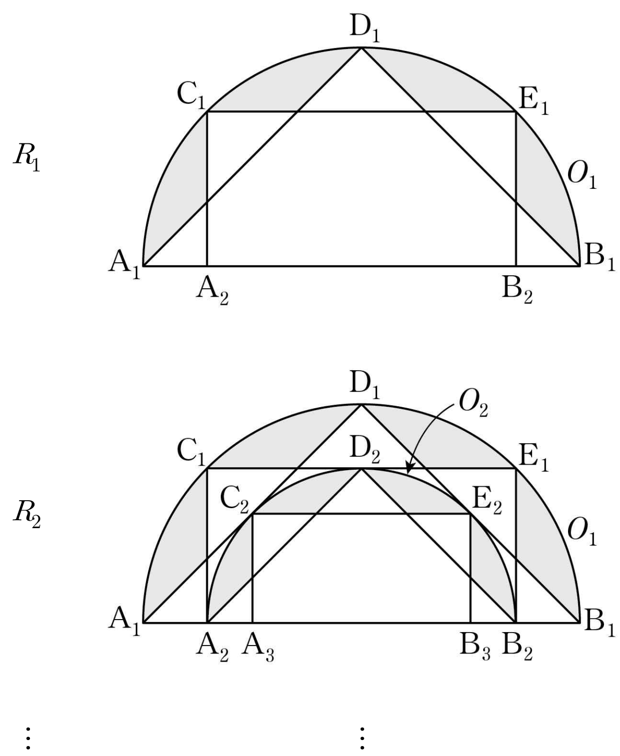
〔21사관19(가)〕 73)



① $\frac{90}{7}$ ② $\frac{275}{21}$ ③ $\frac{40}{3}$ ④ $\frac{95}{7}$ ⑤ $\frac{290}{21}$

74. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원 O_1의 호 A_1B_1을 4등분하는 점을 점 A_1에서 가까운 순서대로 각각 C_1, D_1, E_1이라 하고, 두 점 C_1, E_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2라 하자. 사각형 $C_1A_2B_2E_1$의 외부와 삼각형 $D_1A_1B_1$의 외부의 공통부분 중 반원 O_1의 내부에 있는  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원 O_2를 반원 O_1의 내부에 그리고, 반원 O_2의 호 A_2B_2를 4등분하는 점을 점 A_2에서 가까운 순서대로 각각 C_2, D_2, E_2라 하고, 두 점 C_2, E_2에서 선분 A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 A_3, B_3이라 하자. 사각형 $C_2A_3B_3E_2$의 외부와 삼각형 $D_2A_2B_2$의 외부의 공통부분 중 반원 O_2의 내부에 있는  모양의 도형에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

〔201018(가)〕 74)

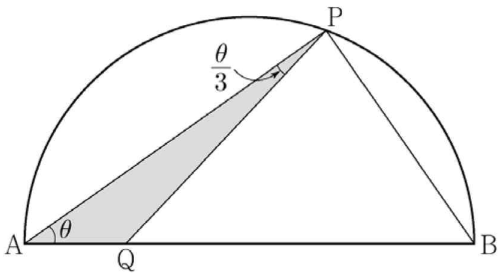


① $4\pi+4\sqrt{2}-16$ ② $4\pi+16\sqrt{2}-32$ ③ $4\pi+8\sqrt{2}-20$
④ $2\pi+16\sqrt{2}-24$ ⑤ $2\pi+8\sqrt{2}-12$

도형 극한

75. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$이고 $\angle \mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은?

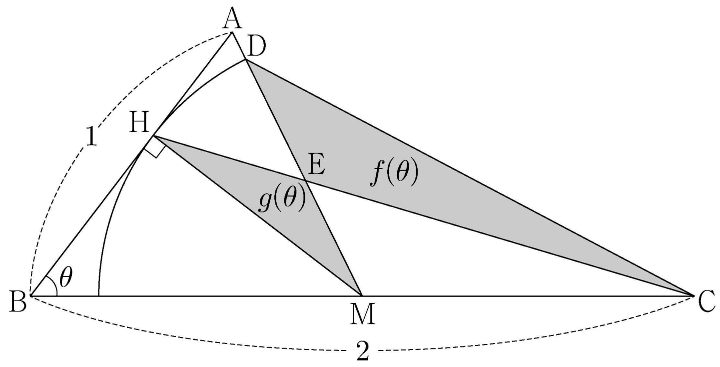
$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ 〔22예비28(미적분)〕 75)



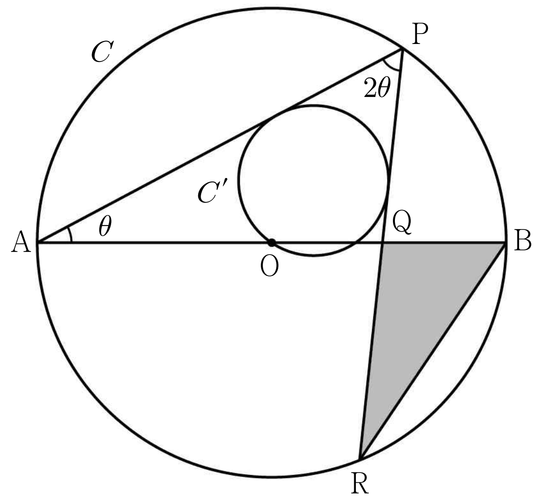
① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{12}$

76. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{MH}}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{ABC}=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오.

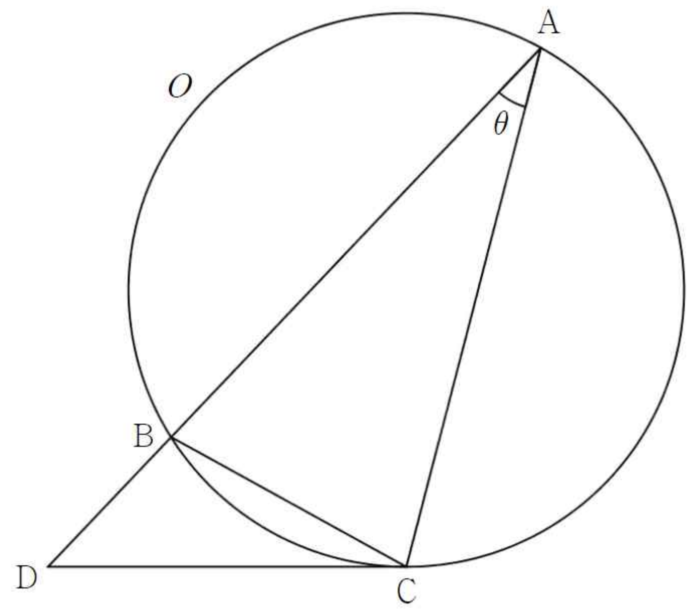
(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) 〔210628(가)〕 76)



77. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle \mathrm{APQ}=2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$일 때, $45a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) 〔200729(가)〕 77)



78. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle \mathrm{CAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$ 〔21사관28(가)〕 78)

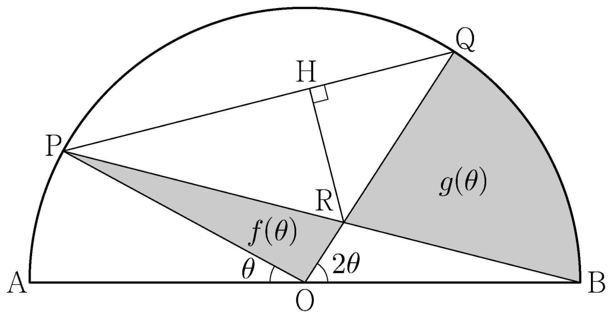


79. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle\mathrm{POA}=\theta$, $\angle\mathrm{QOB}=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

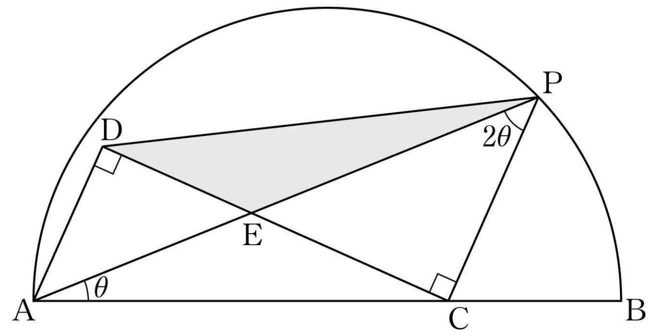
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔210928(가)〕 79)



80. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 C에 대하여 $\angle\mathrm{PAC}=\theta$일 때, $\angle\mathrm{APC}=2\theta$이다. $\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{PCD}=\frac{\pi}{2}$인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?

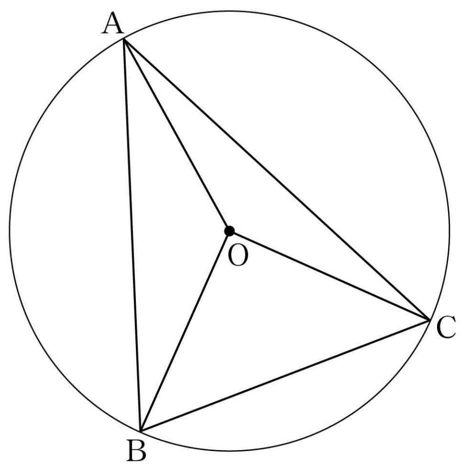
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) 〔201021(가)〕 80)



① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1

사인·코사인 법칙 활용

81. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1 = 4S_2$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는? 〔200319(가)〕 81)



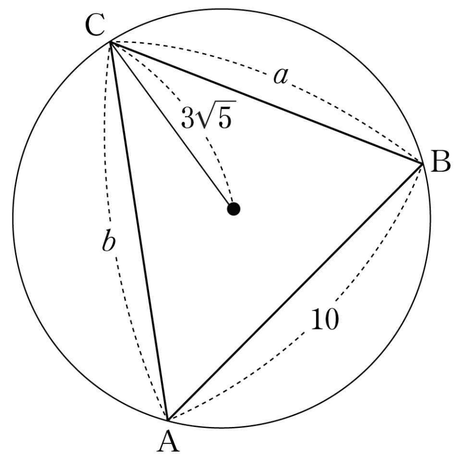
① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

82. 길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고

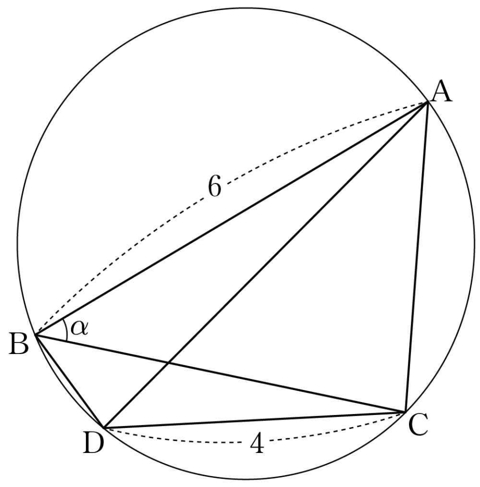
$\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab} = \dfrac{4}{3}$일 때, ab의 값은?

〔200319(나)〕 82)

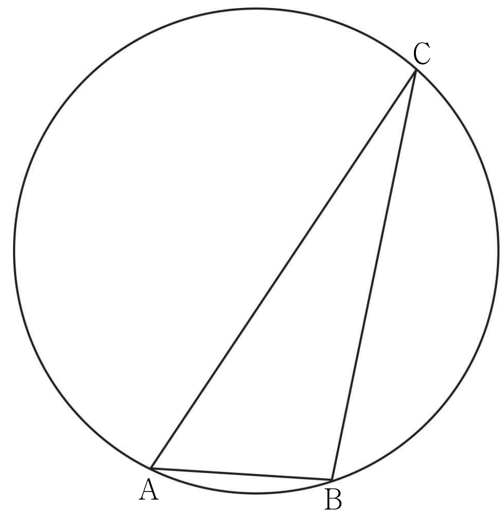
① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180



83. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=6$이고, $\angle ABC=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1:S_2=9:5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [200329(나)] 83)



84. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [200419(가)] 84)



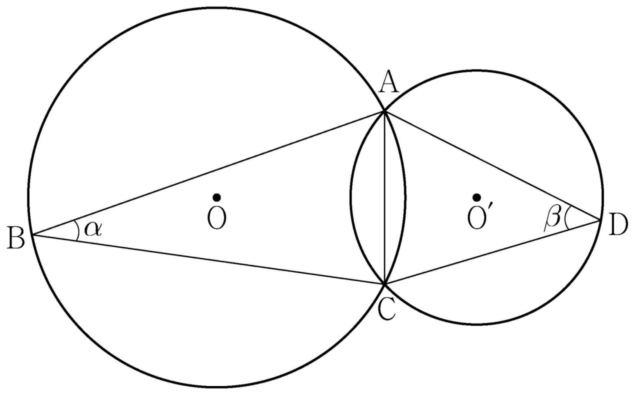
① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

85. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$라 할 때,

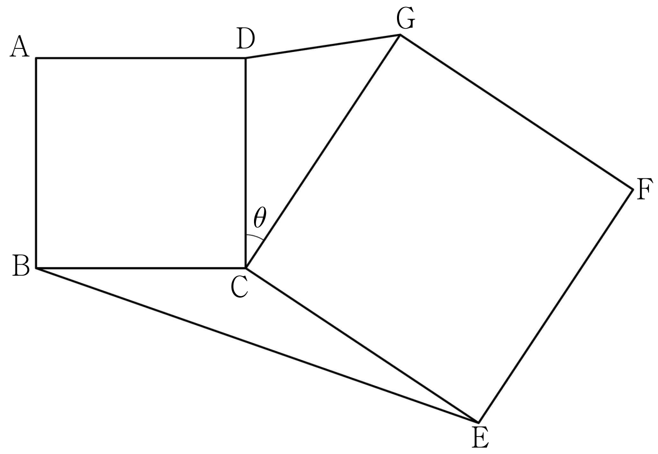
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3},\ \overline{OO'} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔22예비21(공통)〕 85)



86. 그림과 같이 평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD와 한 변의 길이가 4인 정사각형 CEFG가 있다. $\angle DCG = \theta\ (0 < \theta < \pi)$라 할 때, $\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ 이다. $\overline{DG} \times \overline{BE}$의 값은? 〔200715(나)〕 86)

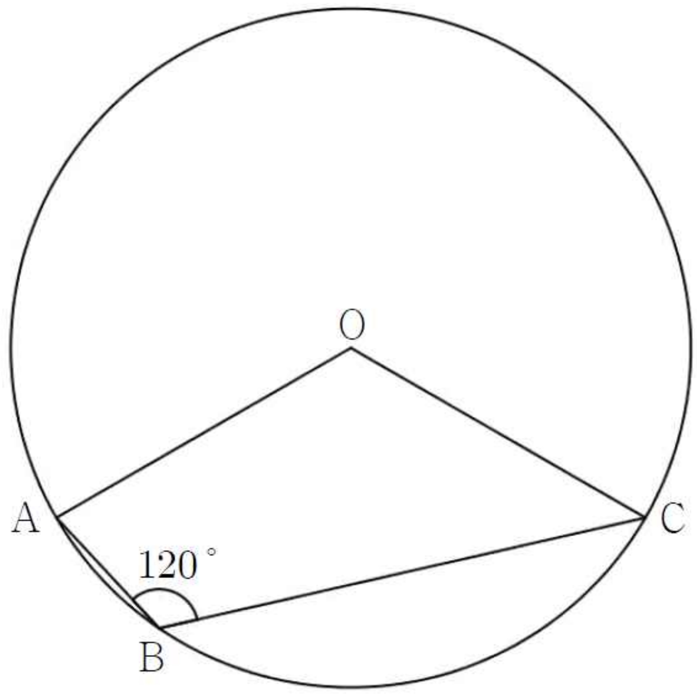


① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

87. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ,\ \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는? 〔21사관15(가)〕 87)

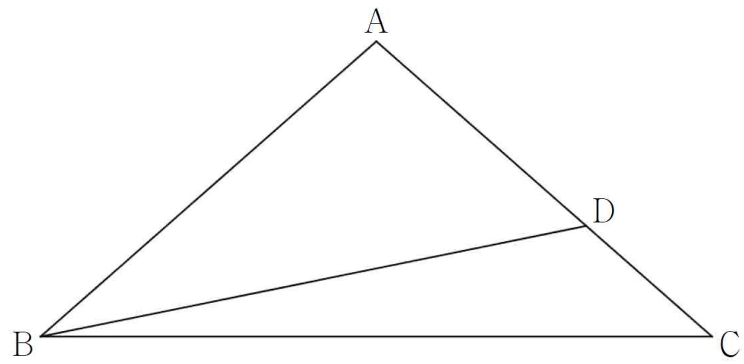


① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

88. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 5 : 3으로 내분하는 점을 D라 하자.

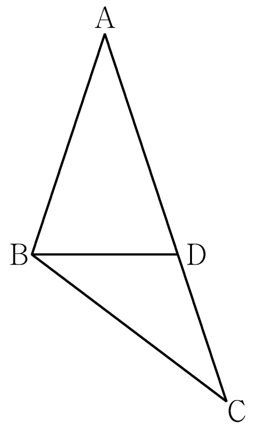
$2\sin(\angle\mathrm{ABD}) = 5\sin(\angle\mathrm{DBC})$일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$의 값은?

〔21사관19(나)〕 88)

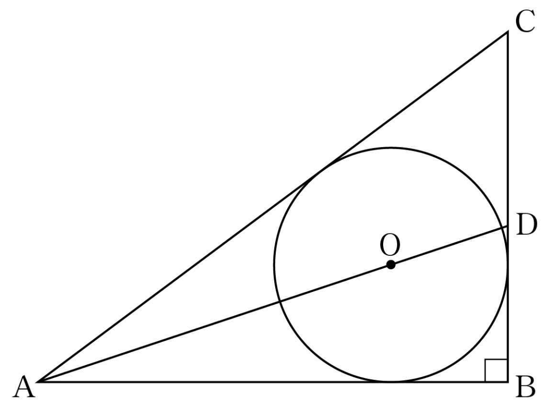


① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

89. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오.
〔210912(가)/210925(나)〕 89)



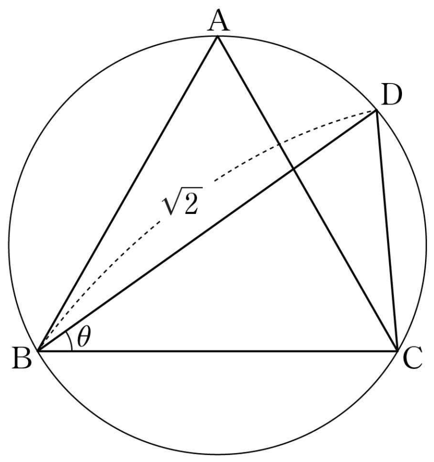
90. 그림과 같이 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB}=4$이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는?〔201017(가)〕 90)



① $\frac{125}{2}\pi$ ② 63π ③ $\frac{127}{2}\pi$
④ 64π ⑤ $\frac{129}{2}\pi$

91. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle \mathrm{DBC}=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은? 〔201019(나)〕 91)

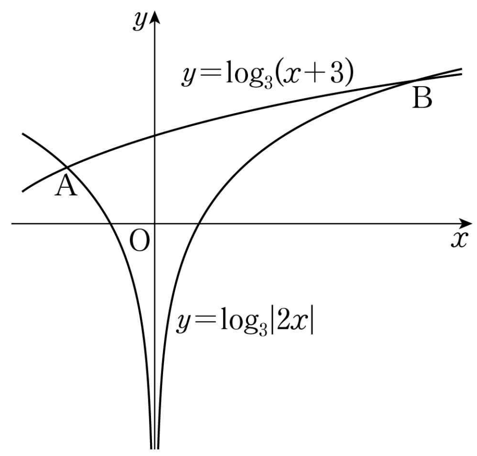
① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$



지수・로그・삼각함수 준킬러

92. 함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) 〔200314(가)〕 92)

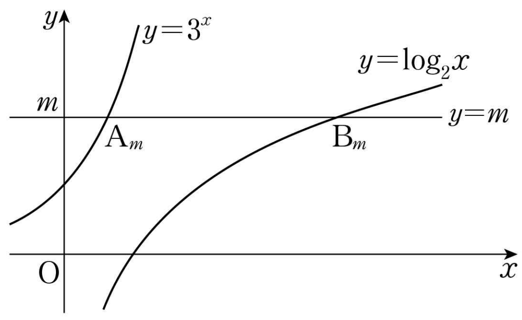
① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$



93. $0 < a < \frac{4}{7}$ 인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$가 있다.

함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오. 〔200328(가)〕 93)

94. 그림과 같이 자연수 m에 대하여 두 함수 $y = 3^x$, $y = \log_2 x$의 그래프와 직선 $y = m$이 만나는 점을 각각 A_m, B_m이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 이라 할 때, a_3의 값은? 〔200316(나)〕 94)



① 502 ② 504 ③ 506 ④ 508 ⑤ 510

95. 2이상의 자연수 n에 대하여 $(n-5)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은?

〔200414(가)〕 95)

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

96. 두 함수 $f(x)=x^2-6x+11$, $g(x)=\log_3 x$가 있다. 정수 k에 대하여

$$k<(g\circ f)(n)<k+2$$

를 만족시키는 자연수 n의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(0)+h(3)$의 값은? 〔200416(가)〕 96)

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

97. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k = \left\{ \sin\frac{2(m-1)}{k}\pi \;\middle|\; m\text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〔200421(가)〕 97)

〈보 기〉

ㄱ. $A_3 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

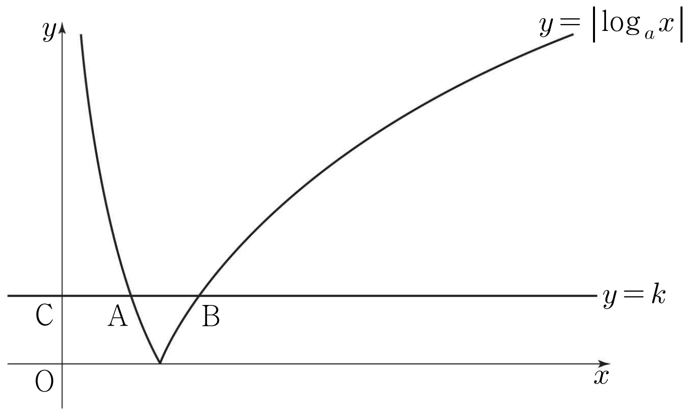
ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k) = 11$ 을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 33 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

98. 그림과 같이 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y = |\log_a x|$가 직선 $y = k\ (k > 0)$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y = k$가 y축과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{OC} = \overline{CA} = \overline{AB}$일 때, 곡선 $y = |\log_a x|$와 직선 $y = 2\sqrt{2}$가 만나는 두 점 사이의 거리는 d이다. $20d$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

〔200428(가)〕 98)



99. 두 함수

$$f(x)=2^x,\ g(x)=2^{x-2}$$

에 대하여 두 양수 a, b $(a<b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? 〔200420(나)〕 99)

(가) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이다.
(나) $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_2 6$

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

100. $0\le\theta<2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta-2\alpha$의 값은? 〔210614(가)〕 100)

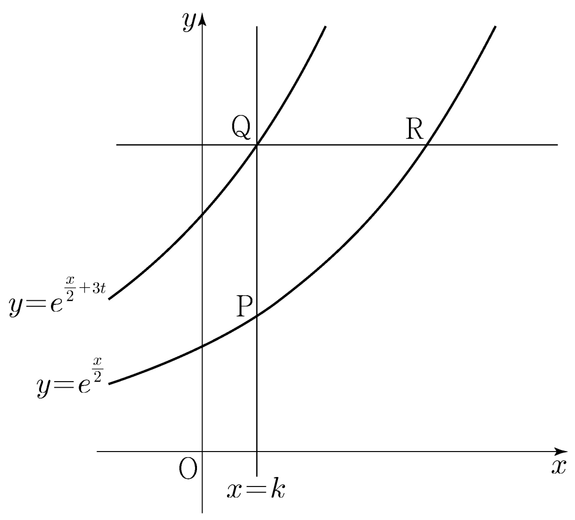
① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

101. 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자.

> 직선 $x=k$와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이다.

함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t\to 0+} f(t)$의 값은? 〔210616(가)〕 101)

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$



102. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔210618(가)/210621(나)〕 102)

〈보 기〉

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

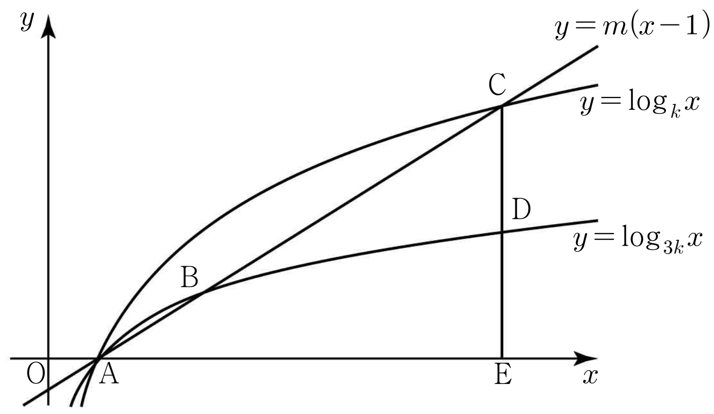
103. 삼각형 ABC에 대하여 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$라 할 때, α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\tan\alpha\tan\gamma$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$)

〔200726(가)〕 103)

104. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.
(나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오. 〔200727(가)〕 104)



105. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔21사관(나)〕 105)

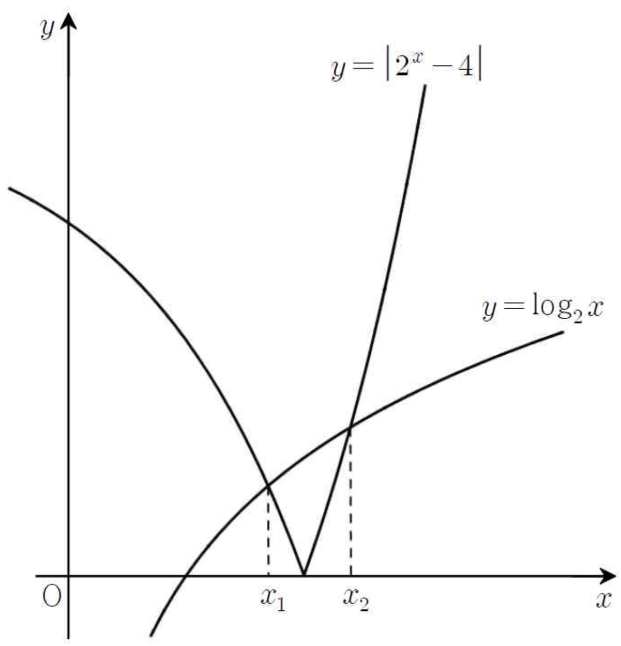
〈보 기〉

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)\left(2^{x_2}-2^{x_1}\right) < 3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2} > 8+\log_2(\log_3 6)$

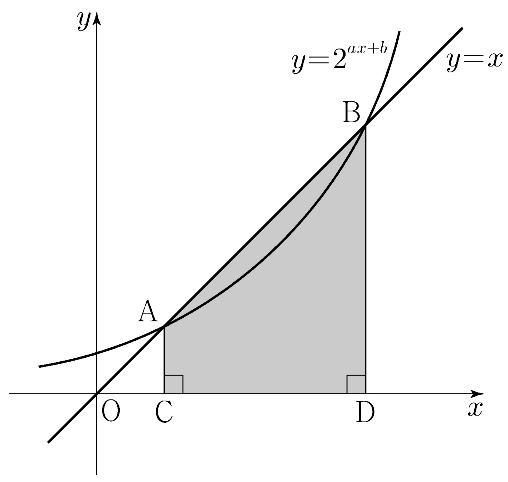
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



106. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

〔210913(가)/210915(나)〕 106)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



107. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2,\quad g(x)=3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는?

〔210921(가)〕 107)

실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면 $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$ 이다.

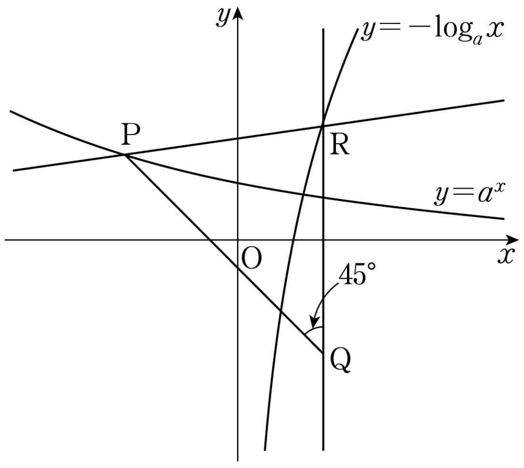
① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

108. $\angle A=90°$이고 $\overline{AB}=2\log_2 x$, $\overline{AC}=\log_4 \dfrac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$)

〔210917(나)〕 108)

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

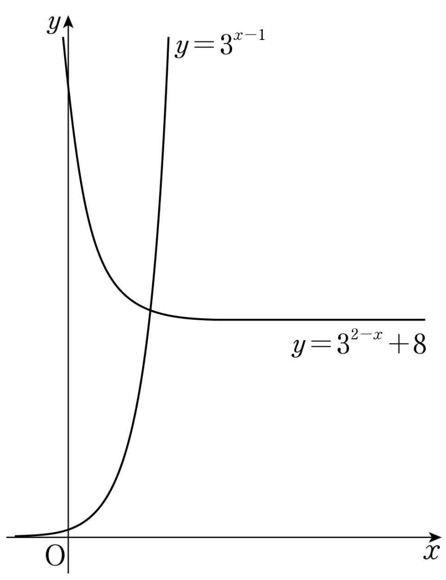
109. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x\,(0<a<1)$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점 R에 대하여 $\angle\mathrm{PQR}=45°$이다. $\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\dfrac{1}{7}$일 때, 상수 a의 값은? 〔201015(가)〕 109)



① $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

110. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 곡선 $y=3^{2-x}+8$과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라 하자.
직선 $x=t+1$이 x축과 만나는 점을 C, 곡선 $y=3^{x-1}$과 만나는 점을 D라 하자.
사각형 ABCD가 직사각형일 때, 이 사각형의 넓이는?
〔201013(나)〕 110)

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



111. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=\left|\log_2 x\right|$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1 < x_2$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔201021(나)〕 111)

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$

ㄷ. $y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

112. 함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 직선 $y=-x$와 만나는 점의 x좌표가 구간 $(-\pi,\ \pi)$에 속하는 점의 개수를 a_n이라 할 때, a_2+a_3의 값을 구하시오. 〔201026(나)〕 112)

확률과 통계 빈칸 추론

113. 다음은 $1 \le |m| < n \le 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

> (ⅰ) $m>0$인 경우
> n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) 이다.
>
> (ⅱ) $m<0$인 경우
> n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (나) 이다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? 〔200318(가)〕 113)

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

114. 세 숫자 1, 2, 3 만을 사용하여 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 세 숫자 1, 2, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하고 숫자 2를 반드시 짝수 번째 자리에만 오도록 놓는 경우의 수를 구하려고 한다. 다음은 이것을 구하는 과정의 일부이다.

> 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.
> (ⅰ) 숫자 2를 한 번 사용한 경우
> 2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는
> 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는 (가) 이다.
> 2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1$이다.
> 그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 (나) 이다.
> (ⅱ) 숫자 2를 두 번 사용한 경우
> ⋮ (중략)
> (ⅲ) 숫자 2를 세 번 사용한 경우
> 2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 나열한 것이므로 그 경우의 수는 (다) 이다.
> 따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는 290이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? 〔200314(나)〕 114)

① 262 ② 267 ③ 272 ④ 277 ⑤ 282

115. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> ○ $n(A) \geq 3$
> ○ 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수이다.
> ○ $n(A) > n(B)$

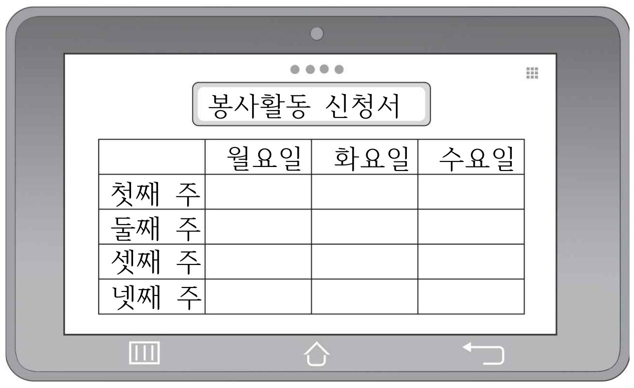
다음은 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

> (ⅰ) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는
> $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$
> 이다.
> $A=\{1, 2, 3\}$인 경우 $n(B)<3$이므로
> 집합 B는
> $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$
> 이다.
> $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인 경우
> 함수 f의 개수는 (가) 이고,
> $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 경우
> 함수 f의 개수는 (나) 이므로
> $n(A)=3$, $n(B)<3$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는
> $4\times\left(3\times \boxed{(가)}+3\times \boxed{(나)}\right)$이다.
>
> (ⅱ) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1, 2, 4, 5\}$뿐이므로 이 경우 $n(B)<4$를 만족시키는 함수 f의 개수는 (다) 이다.
>
> (ⅲ) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고 $n(B)=5$이므로 $n(A)>n(B)$를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.
>
> (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
> $4\times\left(3\times \boxed{(가)}+3\times \boxed{(나)}\right)+\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [200420(가)] 115)

① 164 ② 168 ③ 172 ④ 176 ⑤ 180

116. 매주 월요일부터 수요일까지 총 4주에 걸쳐 서로 다른 세 종류의 봉사활동 A, B, C를 반드시 하루에 한 종류씩 다음 규칙에 따라 신청하려고 한다.



> ○ 봉사활동 A, B, C를 각각 3회, 3회, 6회 신청한다.
> ○ 첫째 주에는 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한다.
> ○ 같은 요일에는 두 종류 이상의 봉사활동을 신청한다.

다음은 봉사활동을 신청하는 경우의 수를 구하는 과정이다.

> 규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는
> 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한 후
> ‘(ⅰ) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는 경우’에서 ‘(ⅱ) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에
> 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우’를 제외하면 된다.
>
> 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청하는 경우의 수는 3!이다.
> (ⅰ)의 경우:
> 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회 신청하는 경우의 수는 (가) 이다.
> (ⅱ)의 경우:
> 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 (나) 이다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의해
> 구하는 경우의 수는 $3!\times\left(\boxed{(가)}-\boxed{(나)}\right)$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [200419(나)] 116)

① 825 ② 832 ③ 839 ④ 846 ⑤ 853

117. 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자. $a+b+c$의 값을 확률변수 X라 할 때, 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

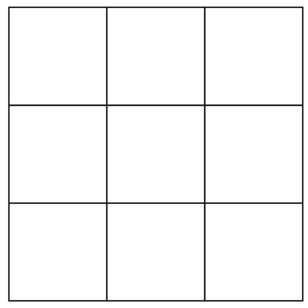
> $3 \le a+b+c \le 18$이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, $\cdots$, 18이다.
> a, b, c가 각각 6 이하의 자연수이므로
> $7-a$, $7-b$, $7-c$는 각각 6 이하의 자연수이다.
> $3 \le k \le 18$인 자연수 k에 대하여
> $a+b+c=k$일 확률 $\mathrm{P}(X=k)$와
> $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률 $\mathrm{P}(X=3\times\boxed{(가)}-k)$는 서로 같다.
> 그러므로 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는
> $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=3}^{18}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\ &= 3\times\mathrm{P}(X=3)+4\times\mathrm{P}(X=4)+5\times\mathrm{P}(X=5)\\ &\quad +\cdots+17\times\mathrm{P}(X=17)+18\times\mathrm{P}(X=18)\\ &= \boxed{(나)}\times\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)\end{aligned}$$
> 이때, 확률질량함수의 성질에 의하여
> $\sum_{k=3}^{18}\mathrm{P}(X=k)=1$이므로
> $\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\boxed{(다)}$이다.
> 따라서 $\mathrm{E}(X)=\boxed{(나)}\times\boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $\frac{p+q}{r}$의 값은? 〔200716(가)/200716(나)〕 117)

① 49 ② $\frac{105}{2}$ ③ 56 ④ $\frac{119}{2}$ ⑤ 63

확률과 통계 준킬러

118. 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.



빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

> (가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
> (나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
> (다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

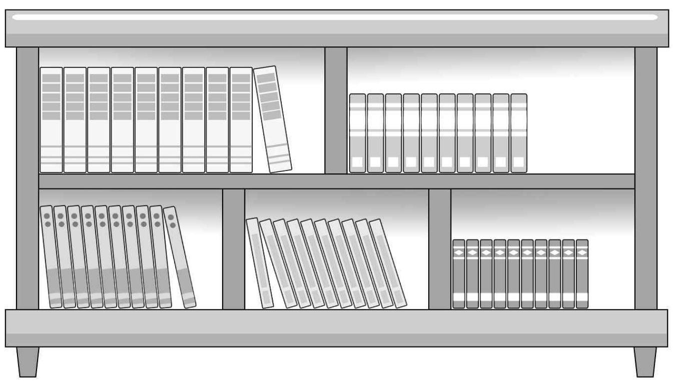
색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k\times7!$이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

〔200327(가)〕 118)

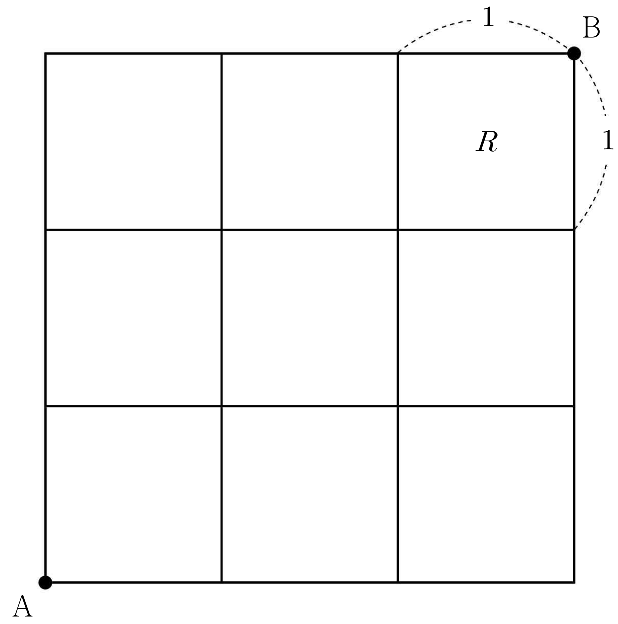
119. 어느 학교 도서관에서 독서프로그램 운영을 위해 철학, 사회과학, 자연과학, 문학, 역사 분야에 해당하는 책을 각 분야별로 10권씩 총 50권을 준비하였다. 한 학급에서 이 50권의 책 중 24권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 분야에 해당하는 책은 서로 구별하지 않는다.)

〔200429(가)〕 119)

(가) 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에 해당하는 책은 4권 이상씩 선택한다.
(나) 문학 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.
(다) 역사 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.



120. 그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. 〔200429(나)〕 120)

(가) 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다.
(나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R뿐이다.

121. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택한 세 개의 수의 곱이 짝수일 때, 그 세 개의 수의 합이 3의 배수일 확률은?

〔22예비28(확률과 통계)〕 121)

① $\frac{14}{55}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{19}{55}$ ④ $\frac{43}{110}$ ⑤ $\frac{24}{55}$

122. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오.

〔22예비29(확률과 통계)〕 122)

(가) $a+b+c+d=12$
(나) $a \neq 2$이고 $a+b+c \neq 10$이다.

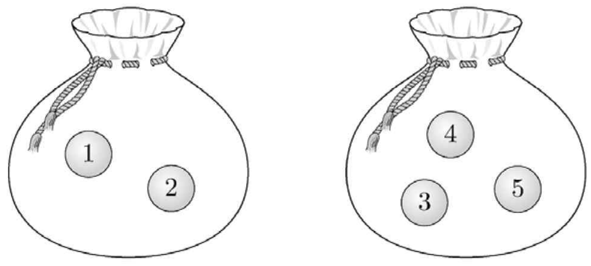
123. 주머니 A에는 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 다음의 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자.

> 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 꺼낸 주머니에 다시 넣는다.

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔22예비30(확률과 통계)〕 123)

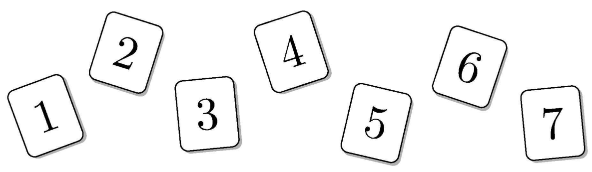


124. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은?

〔210617(가)〕 124)

> (가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
> (나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{5}{28}$

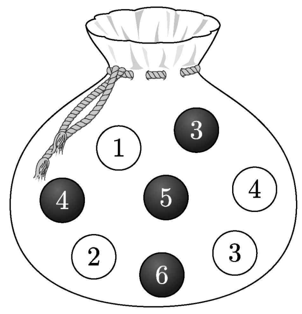


125. 두 집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? 〔210619(가)〕 125)

> $f(1)\geq 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

126. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다.
이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
〔210627(가)/210620(나)〕 126)



127. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [210629(가)] 127)

128. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [210627(나)] 128)

(가) $a+b+c+d=6$
(나) a, b, c, d 중에서 적어도 하나는 0이다.

129. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 A에서 A로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 p이다. $120p$의 값을 구하시오.

〔210629(나)〕 129)

(가) $f(1)\times f(2)\geq 9$
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

130. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ \sigma^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X\leq 8)+\mathrm{P}(Y\leq 8)=1$$

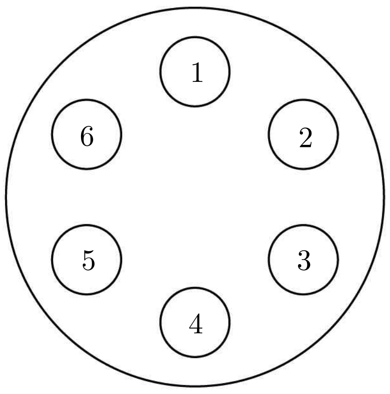
을 만족시키는 m과 σ에 대하여 $\mathrm{P}(Y\leq m+4)=0.3085$일 때, $\mathrm{P}(X\leq \sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? 〔200714(가)〕 130)

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1359
④ 0.1587 ⑤ 0.2857

131. 그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 9개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3개의 쿠키를 각각 1개씩 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 경우 6, 1, 2가 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1개씩 담는다. 이 시행을 3번 반복하여 9개의 쿠키를 모두 접시 위에 담을 때, 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은?

〔200720(가)〕 131)



① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{17}{36}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{23}{36}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

132. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

〔200728(가)〕 132)

(가) $f(3) \times f(6)$은 3의 배수이다. (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다.

133. 확률변수 X는 정규분포 $N(m_1,\ \sigma_1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $N(m_2,\ \sigma_2^2)$을 따르고, 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $\sigma_1 = \sigma_2$이고 $f(24) = g(28)$일 때, 확률변수 X, Y는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(m_1 \le X \le 24) + P(28 \le Y \le m_2) = 0.9544$
(나) $P(Y \ge 36) = 1 - P(X \le 24)$

$P(18 \le X \le 21)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? 〔200718(나)〕 133)

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247
④ 0.6826 ⑤ 0.7745

134. 주머니 속에 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 과정을 2번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b라 하자. $a-b$의 값을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 $Y = 2X+1$의 분산 $V(Y)$의 값을 구하시오.

〔200726(나)〕 134)

135. 흰 공 2개, 빨간 공 3개, 검은 공 3개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 반드시 각각 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않고, 공을 하나도 받지 못하는 학생은 없다.) 〔200729(나)〕 135)

136. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 4^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20, \sigma^2)$을 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, $f(x)$와 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

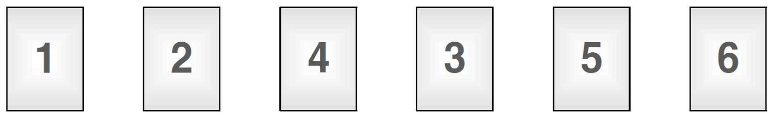
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+10) = f(20-x)$이다.
(나) $\mathrm{P}(X \geq 17) = \mathrm{P}(Y \leq 17)$

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$\mathrm{P}(X \leq m+\sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $\sigma > 0$) 〔21사관16(가)〕 136)

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.9104 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

137. 그림은 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타난 예이다.



이 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타날 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔21사관29(가)〕[137)]

138. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 5^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. $\mathrm{P}(Y \le 2k)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m \ne 10$) 〔21사관17(나)〕[138)]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.9104 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

139. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하시오. 〔21사관27(나)〕 139)

(가) $a+b+c+d+e=10$
(나) ab는 홀수이다.

140. 어느 지역 신생아의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(X \geq 3.4)=\frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(X \leq 3.9)+\mathrm{P}(Z \leq -1)=1$$

이다. 이 지역 신생아 중에서 임의추출한 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 3.55)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

〔210914(가)〕 140)

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3413

141. 어느 고등학교에는 5개의 과학 동아리와 2개의 수학 동아리 A, B가 있다. 동아리 학술 발표회에서 이 7개 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정할 때, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지거나 두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해질 확률은? (단, 발표는 한 동아리씩 하고, 각 동아리는 1회만 발표한다.)
〔210917(가)〕 141)

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{25}{42}$ ④ $\frac{17}{28}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

142. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 A, B, C라 할 때, $A \subset B \subset C$일 확률은? 〔210919(가)〕 142)

① $\frac{1}{91}$ ② $\frac{2}{91}$ ③ $\frac{3}{91}$ ④ $\frac{4}{91}$ ⑤ $\frac{5}{91}$

143. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오.
〔210926(가)/210927(나)〕[143)]

144. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) 〔210929(가)/210929(나)〕[144)]

145. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 하자. 두 집합 A, B를

$$A=\{x \mid a_1 \le x \le a_2\},\quad B=\{x \mid b_1 \le x \le b_2\}$$

라 할 때, $A \cap B \ne \varnothing$일 확률은? 〔210919(나)〕 145)

① $\frac{3}{5}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{11}{15}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{13}{15}$

146. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 4인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(8) > f(14),\ f(2) < f(16)$$

을 만족시킨다. m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(X \le 6)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? 〔201013(가)〕 146)

① 0.0062　② 0.0228　③ 0.0668
④ 0.1525　⑤ 0.1587

147. 집합 $\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소의 개수가 4인 부분집합 중 임의로 하나의 집합을 택하여 X라 할 때, 집합 X가 다음 조건을 만족시킬 확률은? 〔201016(가)〕 147)

집합 X의 서로 다른 세 원소의 합은 <u>항상 3의 배수가 아니다.</u>

① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

148. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) 〔201028(가)〕 148)

149. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. 〔201029(가)〕 149)

(가) $a < b < c \leq 20$
(나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

150. 이산확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고 이산확률변수 Y가 가지는 값은 1, 4, 9, 16이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k^2) \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{V}(X)=1$일 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값은? 〔201015(나)〕〔해당 문제에는 수학적 오류가 있습니다〕 150)

① 33　② 34　③ 35　④ 36　⑤ 37

151. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. 〔201027(나)〕 151)

(가) $a+b+c=14$
(나) $(a-2)(b-2)(c-2)\neq 0$

152. A, B 두 사람이 각각 4개씩 공을 가지고 다음 시행을 한다.

A, B 두 사람이 주사위를 한 번씩 던져 나온 눈의 수가 짝수인 사람은 상대방으로부터 공을 한 개 받는다.

각 시행 후 A가 가진 공의 개수를 세었을 때, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔201029(나)〕 152)

2020년 시행 모의고사 주요 문항 모음 정답 및 해설

1) ③

$f(x)=x(x-a)(x-6)$ 이라 하자.

$f(0)=0$ 이므로 원점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 원점에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이다.

원점이 아닌 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

이고 이 직선이 원점을 지나므로

$0-f(t)=f'(t)(0-t)$

$tf'(t)-f(t)=0$ …… ㉠

$f(x)=x^3-(a+6)x^2+6ax$ 에서

$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$

이므로 ㉠에서

$t\{3t^2-2(a+6)t+6a\}-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=0$

$2t^3-(a+6)t^2=0,\ t^2\{2t-(a+6)\}=0$

$t\neq 0$ 이므로 $t=\dfrac{a+6}{2}$ 이다.

$f'(0)=6a,\ f'\left(\dfrac{a+6}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}(a^2-12a+36)$

이므로 $0<a<6$ 인 실수 a 에 대하여 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$ 라 하면

$g(a)=-\dfrac{3}{2}(a^3-12a^2+36a)$

$g'(a)=-\dfrac{3}{2}(3a^2-24a+36)=-\dfrac{9}{2}(a-2)(a-6)$

$0<a<6$ 이므로 $g'(a)=0$ 에서 $a=2$

$0<a<6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	-48	↗	

함수 $g(a)$ 는 $a=2$ 일 때 극소이면서 최소가 된다.

따라서 $0<a<6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 최솟값은

$g(2)=-48$ 이다.

2) ②

직선 l 이 정사각형 OABC 의 넓이를 이등분하므로 점 $(-1,1)$ 을 지난다. 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$y=m(x+1)+1$, 즉 $y=mx+m+1$

직선 l 과 y 축이 만나는 점을 D 라 하면 점 D 의 좌표는 $\mathrm{D}(0,\ m+1)$

직선 l 과 선분 AP 가 만나는 점을 E 라 하자.

직선 AP 의 방정식이 $y=-\dfrac{2}{t}x+2$ 이므로

$mx+m+1=-\dfrac{2}{t}x+2$ 에서 $x=\dfrac{(1-m)t}{mt+2}$

그러므로 점 E 의 x 좌표는 $\dfrac{(1-m)t}{mt+2}$ 이다.

삼각형 ADE 의 넓이가 삼각형 AOP 의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\times(1-m)\times\dfrac{(1-m)t}{mt+2}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 2\times t\right)$

$t\neq 0$ 이므로 $(1-m)^2=mt+2$

$m^2-(2+t)m-1=0$

$$m=\frac{t+2\pm\sqrt{(t+2)^2-4\times(-1)}}{2}$$

$$=\frac{t+2\pm\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$$

직선 l 의 y 절편이 $m+1$ 이고 $0<m+1<2$ 이므로

$f(t)=m+1=\dfrac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}f(t)=\lim_{t\to 0+}\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

$$=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$$

3) 432

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 4 인 삼차함수이므로

$g(x)=\displaystyle\int_t^x f(s)ds$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)-g(a)$ 는 미분가능하다.

$g(x)\geq g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$

$g(x)<g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 은 $g(x)-g(a)\neq 0$인 모든 x 에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$ 를 만족시키는 x 의 값을 k 라 하면,

$g(k)=g(a)$ 이므로

$\dfrac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\dfrac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

(i) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 같을 때

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하다.

(ii) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k)=0$ 일 때

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하다.

(iii) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k)\neq 0$ 일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}\neq\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$ 가 미분가능하지 않은

x 의 개수가 1 이므로

$g(x)-g(a)=0,\ g'(x)=f(x)\neq 0$

인 x 가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

그러므로 사차함수 $y=g(x)$ 는 단 하나의

극솟값을 갖고 함수 $g(x)$ 의 그래프와 직선

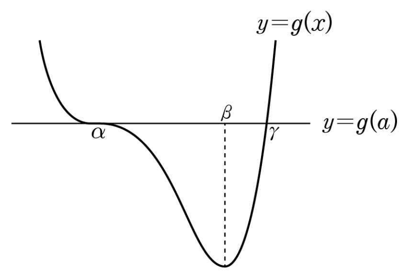
$y=g(a)$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g'(x)=0$ 인 방정식 $g(x)-g(a)=0$ 의 근을 α,

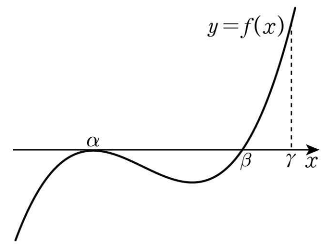
함수 $g(x)$ 가 극솟값을 가질 때의 x 의 값을 β 라

하면 $\alpha,\ \beta$ 의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) $\alpha<\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\beta<\gamma$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$ 이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$

(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$h(t)=g(a)=\displaystyle\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds$ 에서

$h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$ 가 $t=2$ 에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로 $h'(2)=-f(2)=0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$ 이다.

$a=2$ 이면 $h(2)=\displaystyle\int_2^2 f(t)dt=0\neq 27$

이므로 $a\neq 2$

$\beta=2$ 이면

$h(3)=\displaystyle\int_3^a f(s)ds=0$ 이고,

$h(2)=\displaystyle\int_2^a f(s)ds=27$ 이므로

$h(2)-h(3)=\int_2^3 f(s)ds=27$ 이다.

$\int_2^3 f(s)ds$

$=\int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$

$=\int_2^3 4\{s^3-2(a+1)s^2+(a^2+4a)s-2a^2\}ds$

$=\left[s^4-\frac{8}{3}(a+1)s^3+2(a^2+4a)s^2-8a^2s\right]_2^3$

$=65-\frac{152}{3}(a+1)+10(a^2+4a)-8a^2$

$=2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27$

이므로

$3a^2-16a-19=0$

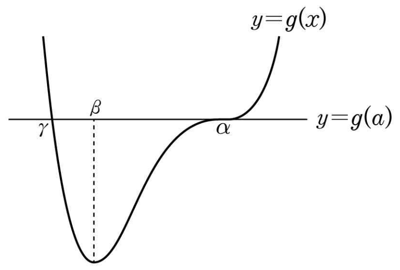
$(a+1)(3a-19)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{19}{3}$

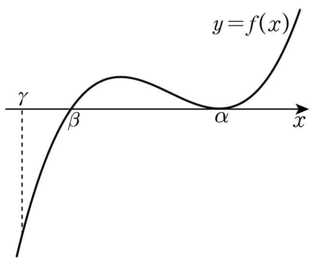
$a<2$ 이므로 $a=-1$ 이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$\alpha<\beta$ 인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$ 이다.

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$a\neq 3$ 이면 $h(3)=\int_3^a f(s)ds\neq 0$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$ 이고

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\neq 27$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 이다.

$f(5)=4\times 36\times 3=432$

4) ②

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$ 에서

$g'(x)=f(x)+f'(x)$,

$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt+f(0)=0+f(0)$,

$g'(0)=f(0)+f'(0)$

조건 (가)에 의해

$g(0)=f(0)=0$

$g'(0)=f(0)+f'(0)=0+f'(0)=0$ 이므로 $f'(0)=0$

그러므로 x^2 은 $f(x)$ 의 인수이다.

$f(x)=x^2(x-k)$ (단, k 는 상수)라 하면

$g'(x)=x^3-kx^2+3x^2-2kx$

$\quad=x^3+(3-k)x^2-2kx$

조건 (나)에 의해 모든 실수 x 에 대하여

$g'(-x)=-g'(x)$ 가 성립한다.

즉, $-x^3+(3-k)x^2+2kx=-x^3-(3-k)x^2+2kx$,

$2(3-k)x^2=0$ 에서 $k=3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$

따라서 $f(2)=-4$

[다른 풀이]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라고 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의해 $f(0)=0$ 이므로 $c=0$,

$f'(0)=0$ 이므로 $b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2$

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$\quad=x^3+ax^2+3x^2+2ax$

$\quad=x^3+(a+3)x^2+2ax$

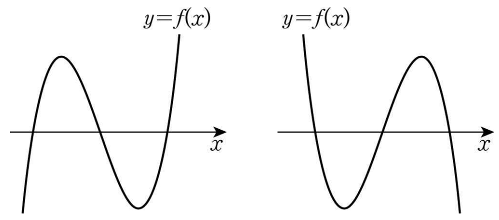
조건 (나)에 의해 함수 $y=g'(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 x^2의 계수는 0 이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$ 에서 $f(2)=8-12=-4$

5) ①

함수 $f(x)$ 의 삼차항의 계수를 a 라 하면 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $\qquad a<0$일 때



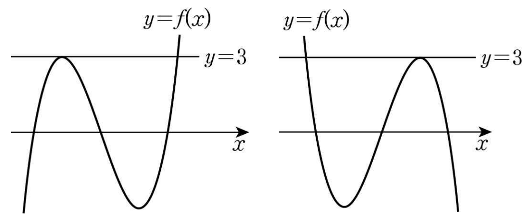
함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖고, 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$ 은 $x=3$ 에서 최솟값 1 을 갖는다.

그러므로 조건 (나)에서 함수 $g(f(x))=\{f(x)-3\}^2+1$ 은 $f(x)=3$ 인 x 에서 최솟값 1 을 가지므로 $m=1$

한편, 방정식 $g(f(x))=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 이므로 방정식 $f(x)=3$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로 직선 $y=3$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $\qquad a<0$일 때



즉, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 3

조건 (다)의 방정식 $g(f(x))=17$을 풀면

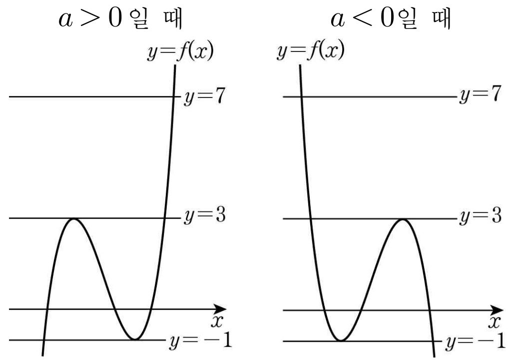
$\{f(x)-3\}^2+1=17$, $\{f(x)-3\}^2=16$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=7$

조건 (다)에서 방정식 $g(f(x))=17$ 은 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$ 의 실근의 개수를 유추하면 1 이므로 방정식 $f(x)=-1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.

그러므로 세 직선 $y=-1$, $y=3$, $y=7$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$ 일 때 $\qquad a<0$일 때

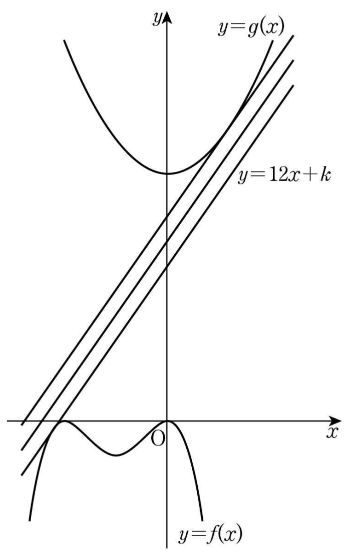


즉, 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 -1
따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 3, 극솟값은 -1 이므로 그 합은 $3+(-1)=2$

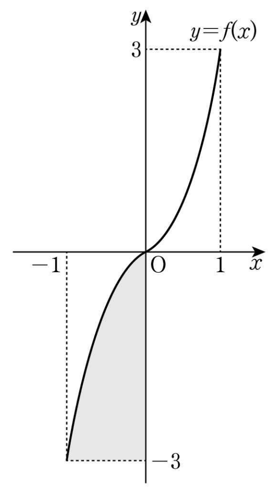
6) 34
모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x+k \le g(x)$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값의 범위를 구하여 보자.
(i) $f(x) \le 12x+k$
모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x+k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.
$h(x)=f(x)-12x$ 라고 하면
$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$,
$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12=-2(x+2)(2x^2-x+3)$
$h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$

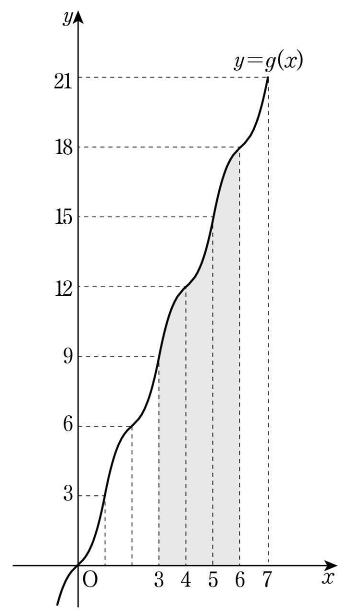
$h(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최대이고 최댓값은 20
그러므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x+k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는
$k \ge 20$
(ii) $g(x) \ge 12x+k$
모든 실수 x 에 대하여 부등식 $g(x) \ge 12x+k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.
부등식 $3x^2-12x+a-k \ge 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$ 의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-6)^2-3\times(a-k) \le 0,\ k \le a-12$
모든 실수 x 에 대하여 부등식 $g(x) \ge 12x+k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는 $k \le a-12$
(i), (ii)에 의해 $20 \le k \le a-12$ 이고 이를 만족시키는 자연수 k 의 개수는 3 이므로 $22 \le a-12 < 23$
따라서 $34 \le a < 35$ 이므로 자연수 a 의 값은 34
[보충 설명]
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=12x+k$ 의 관계는 그림과 같다.



7) 41
문제에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

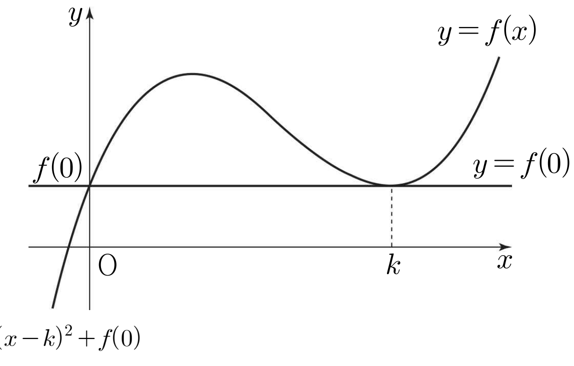


그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3-1=2$
닫힌구간 $[3,6]$ 에서 $\int_3^6 g(x)\,dx=\int_3^6 |g(x)|\,dx$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3,5]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하고 y 축의 방향으로 12 만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_3^5 g(x)\,dx=2\times 12=24$
닫힌구간 $[5,7]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동하고 y 축의 방향으로 18 만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_5^6 g(x)\,dx=15\times 1+2=17$
따라서 $\int_3^6 g(x)\,dx=\int_3^5 g(x)\,dx+\int_5^6 g(x)\,dx=41$

8) 35
조건 (가)에서
$g(k)=0$인 양수 k가 존재한다.
$g(k)=\frac{f(k)-f(0)}{k}=0$
$f(k)=f(0)$
조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(k, f(k))$에서 직선 $y=f(0)$과 접한다.

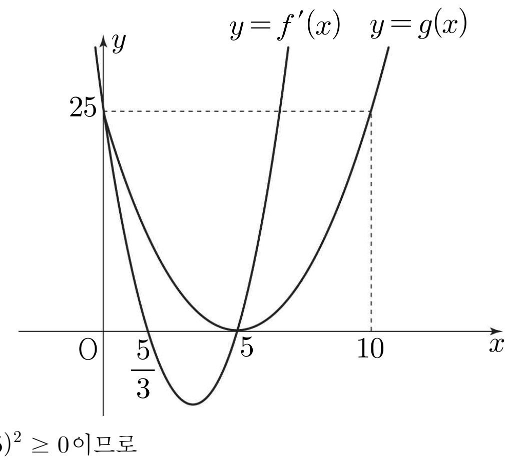


$f(x)=x(x-k)^2+f(0)$

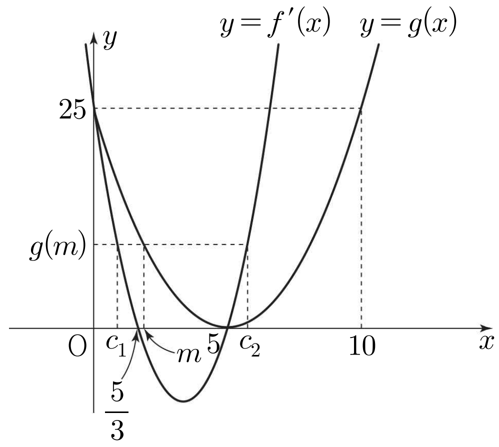
$f'(x)=(x-k)^2+2x(x-k)$
$\quad =(3x-k)(x-k)$ ⋯⋯ ㉠
$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{t(t-k)^2}{t}=(t-k)^2$
조건 (나)에서 $f'(a)=g(a)$
$(3a-k)(a-k)=(a-k)^2$
$2a(a-k)=0$
$a>0$이므로 $a=k$
㉠에서 $f'(k)=0$이므로
$g(a)=0$ ⋯⋯ ㉡
조건 (나)에서 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=g(a)$이고
㉡에서 $g(a)=0$이므로 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$
㉠에서 $f'(x)=0$에서
$x=\dfrac{k}{3}$ 또는 $x=k$이므로
$\dfrac{k}{3}=\dfrac{5}{3}$ 또는 $k=\dfrac{5}{3}$
조건 (나)에서 $a>\dfrac{5}{3}$이므로 $k>\dfrac{5}{3}$
따라서 $k=5$
$f'(x)=(3x-5)(x-5)$
$g(t)=(t-5)^2$

이차방정식 $f'(x)=g(m)$에서
$3x^2-20x-m^2+10m=0$
이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-20)^2-4\times3\times(-m^2+10m)$
$\quad =12(m-5)^2+100>0$
이므로 이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$은
m의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 c_1, c_2 $(c_1<c_2)$라 하자.
$n(A_m)=2$이려면
$0<c_1<c_2\le m$이어야 한다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$c_1c_2=\dfrac{-m^2+10m}{3}>0$
$0<m<10$

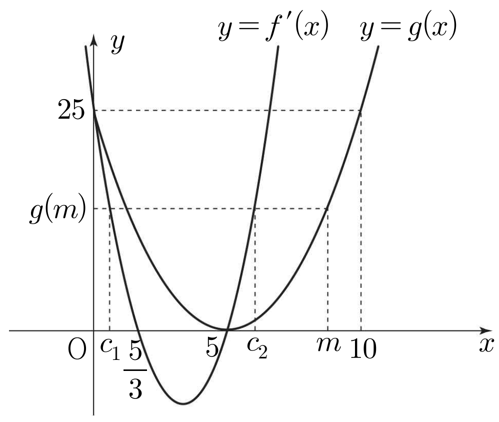
두 함수 $y=f'(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$g(m)=(m-5)^2\ge0$이므로
$f'(x)=g(m)$에서
$f'(x)=(3x-5)(x-5)\ge0$
$x\le\dfrac{5}{3}$ 또는 $x\ge5$
(ⅰ) $0<m<5$인 경우



$0<c_1<m<5<c_2$이므로
$A_m=\{c_1\}$
$n(A_m)\ne2$
(ⅱ) $m=5$인 경우
$g(5)=0$이므로
$f'(x)=g(5)=0$
$(3x-5)(x-5)=0$
$x=\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=5$
$A_5=\left\{\dfrac{5}{3},\,5\right\}$
$n(A_5)=2$
(ⅲ) $5<m<10$인 경우



$0<c_1<c_2<m$이므로
$A_m=\{c_1,\,c_2\}$
$n(A_m)=2$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $n(A_m)=2$를 만족시키는
자연수 m은 5, 6, 7, 8, 9
따라서 $5+6+7+8+9=35$

9) 14
(가)를 만족하려면 그림과 같이
$f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$
$f(0)=q>0$, $f(2p)=-4p^3+q<0$
즉 $q<4p^3$
(나)를 만족하려면 각 구간에서 최댓값은 $f(0)=q$일 때이다.
한편 $f(-1)=-1-3p+q$, $f(1)=1-3p+q$
$f(2)=8-12p+q$, $f(-2)=-8-12p+q$
$-q\le f(-1)\le q$, $-q\le f(1)\le q$
$-q\le f(-2)\le q$, $-2\le f(2)\le q$
인데, $f(-2)\ge-q$이면 충분하다.
$-8-12p+q\ge-q$, 즉 $4+6p\le q$
두 조건으로부터 $4+6p\le q<4p^3$을 만족하는
25 이하의 자연수는
$p=2$일 때 $16\le q\le25$ -- 10개
$p=3$일 때 $22\le q\le25$ -- 4개
$\therefore$ 14 개

10) 12
$F'(x)=t-f(x)=0$에서

$f(\alpha)=t$이므로 $\alpha=f^{-1}(t)=g(t)$

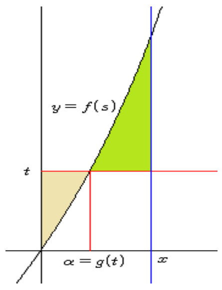
$g(t)=x$로 치환하면 $f(x)=t$이므로

$dt=f'(x)dx=(e^x+1)dx$

$$\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$$

$$=\int_1^5\frac{x}{1+e^x}(e^x+1)dx$$

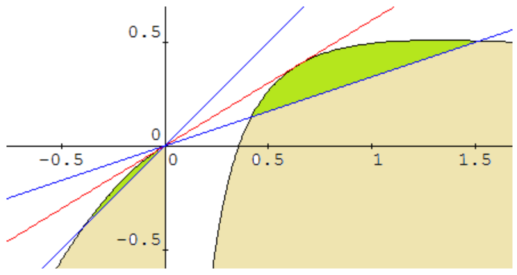
$$=\int_1^5 xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5=12$$



11) 5

그림과 같이 $y=\alpha x$가 원점에서 $y=-x^2+ax$에 접하고

점 $(b,\ f(b))$에서 $y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}$에 접할 때,



$\lim\limits_{m\to\alpha-}g(m)=3,\ \lim\limits_{m\to\alpha+}g(m)=2$이므로

주어진 조건을 만족한다.

$y=-x^2+ax$에서 $y'=-2x+a$

$y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}$에서 $y'=\dfrac{x-(x+b)\ln(x+b)}{x^2(x+b)}$

$$a=\frac{\ln(2b)}{b^2}=\frac{b-2b\ln(2b)}{2b^3}$$

이것을 풀면 $\ln(2b)=\dfrac{1}{4}$이므로 $ab^2=\dfrac{1}{4}$,

$\therefore\ p+q=4+1=5$

12) 331

함수 $f(2^x)$에서 $p(x)=2^x$이라 하면 함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 연속이다.

한편, 자연수 m에 대하여

$3m-3<x<3m-2$일 때

$f'(x)=-2$

$3m-2<x<3m-1$일 때,

$f'(x)=0$

$3m-1<x<3m$일 때,

$f'(x)=2$

이고,

$$g(x)=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(p(x+h))-f(p(x))}{h}\right|$$

$$=|f'(p(x))\times p'(x)|$$

$$=|f'(p(x))|\times2^x\ln2$$

$$=|f'(2^x)|\times2^x\ln2$$

이므로 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

(i) $3m-3\le2^x<3m-2$일 때

$g(x)=|f'(2^x)|\times2^x\ln2=2\ln2\times2^x$

(ii) $3m-2\le2^x<3m-1$일 때,

$g(x)=|f'(2^x)|\times2^x\ln2=0\times2^x=0$

(iii) $3m-1\le2^x<3m$일 때,

$g(x)=|f'(2^x)|\times2^x\ln2=2\ln2\times2^x$

이때 $\lim\limits_{x\to\log_2(3m-2)-}g(x)\ne\lim\limits_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)$,

$\lim\limits_{x\to\log_2(3m-1)-}g(x)\ne\lim\limits_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)$,

$\lim\limits_{x\to(\log_2 3m)-}g(x)=\lim\limits_{x\to(\log_2 3m)+}g(x)=g(\log_2 3m)$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2(3m-2)$와 $x=\log_2(3m-1)$에서 불연속이다.

그런데 $-5<x<5$에서

$$\frac{1}{32}<2^x<32$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2k\ (k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$

에서 불연속이다.

즉, $a_k=\log_2k\ (k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$

이므로

$n=31-10=21$

이고, $g(a_k)$는 다음과 같다.

(i) $2^{a_k}=3m-2$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-2<2^x<3m-1$일 때 $g(x)=0$이므로

$g(a_k)=\lim\limits_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)=0$

(ii) $2^{a_k}=3m-1$, 즉 $a_k=\log_2(3m-1)$일 때

$3m-1<2^x<3m$일 때 $g(x)=2\ln2\times2^x$이므로

$g(a_k)=\lim\limits_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)=2\ln2\times(3m-1)$

이상에서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln2}=\sum_{k=1}^{21}\frac{g(a_k)}{\ln2}$$

$$=2(2+5+8+11+14+\cdots+29)$$

$$=2\times\frac{10(2+29)}{2}=310$$

따라서

$$n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln2}=21+310=331$$

다른풀이 :

함수 $f(x)$는

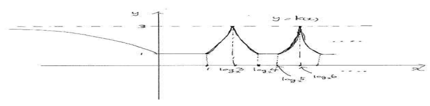
$$f(x)=\begin{cases}\quad\vdots & \\ -2x+3 & (0\le x<1)\\ 1 & (1\le x<2)\\ 2x-3 & (2\le x<3)\\ -2(x-3)+3 & (3\le x<4)\\ 1 & (4\le x<5)\\ 2(x-3)-3 & (5\le x<6)\\ -2(x-6)+3 & (6\le x<7)\\ 1 & (7\le x<8)\\ 2(x-6)-3 & (8\le x<9)\\ \quad\vdots & \end{cases}$$

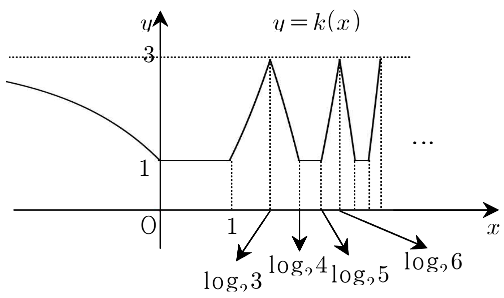
이다.

$k(x)=f(2^x)$이라 하면

$$k(x)=f(2^x)=\begin{cases}-2\times2^x+3 & (x<\log_2 1)\\ 1 & (\log_2 1\le x<\log_2 2)\\ 2\times2^x-3 & (\log_2 2\le x<\log_2 3)\\ -2(2^x-3)+3 & (\log_2 3\le x<\log_2 4)\\ 1 & (\log_2 4\le x<\log_2 5)\\ 2(2^x-3)-3 & (\log_2 5\le x<\log_2 6)\\ -2(2^x-6)+3 & (\log_2 6\le x<\log_2 7)\\ 1 & (\log_2 7\le x<\log_2 8)\\ 2(2^x-6)-3 & (\log_2 8\le x<\log_2 9)\\ \quad\vdots & \end{cases}$$

이므로 함수 $y=k(x)$의 그래프는 그림과 같다.





이때

$$k'(x)=\begin{cases}-2\times 2^x\times\ln 2 & (x<\log_2 1)\\ 0 & (\log_2 1<x<\log_2 2)\\ 2\times 2^x\times\ln 2 & (\log_2 2<x<\log_2 3)\\ -2\times 2^x\times\ln 2 & (\log_2 3<x<\log_2 4)\\ 0 & (\log_2 4<x<\log_2 5)\\ 2\times 2^x\times\ln 2 & (\log_2 5<x<\log_2 6)\\ -2\times 2^x\times\ln 2 & (\log_2 6<x<\log_2 7)\\ 0 & (\log_2 7<x<\log_2 8)\\ 2\times 2^x\times\ln 2 & (\log_2 8<x<\log_2 9)\\ \vdots & \end{cases}$$

이고

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|k(x+h)-k(x)|}{h}$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}-2\times 2^x\times\ln 2 & (x<\log_2 1)\\ 0 & (\log_2 1\le x<\log_2 2)\\ 2\times 2^x\times\ln 2 & (\log_2 2\le x<\log_2 4)\\ 0 & (\log_2 4\le x<\log_2 5)\\ 2\times 2^x\times\ln 2 & (\log_2 5\le x<\log_2 7)\\ 0 & (\log_2 7\le x<\log_2 8)\\ 2\times 2^x\times\ln 2 & (\log_2 8\le x<\log_2 10)\\ \vdots & \end{cases}$$

이다.

이때

$$\lim_{x\to\log_2(3m-2)-}g(x)\neq\lim_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x),$$

$$\lim_{x\to\log_2(3m-1)-}g(x)\neq\lim_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x),$$

$$\lim_{x\to(\log_2 3m)-}g(x)=\lim_{x\to(\log_2 3m)+}g(x)=g(\log_2 3m)$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\log_2(3m-2)$와 $x=\log_2(3m-1)$에서 불연속이다.

그런데 $-5<x<5$에서

$\frac{1}{32}<2^x<32$이므로 함수 $g(x)$는

$x=\log_2 k$ $(k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$

에서 불연속이다.

즉, $a_k=\log_2 k$ $(k=1,2,4,5,7,\cdots,28,29,31)$

이므로

$n=31-10=21$

이고, $g(a_k)$는 다음과 같다.

(i) $2^{a_k}=3m-2$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-2<2^x<3m-1$일 때 $g(x)=0$이므로

$g(a_k)=\lim_{x\to\log_2(3m-2)+}g(x)=0$

(ii) $2^{a_k}=3m-1$, 즉 $a_k=\log_2(3m-2)$일 때

$3m-1<2^x<3m$일 때 $g(x)=2\ln 2\times 2^x$이므로

$g(a_k)=\lim_{x\to\log_2(3m-1)+}g(x)=2\ln 2\times(3m-1)$

이상에서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=\sum_{k=1}^{21}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$$

$=2(2+5+8+11+14+\cdots+29)$

$=2\times\frac{10(2+29)}{2}=310$

따라서

$$n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=21+310=331$$

13) 38

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에서 대칭이다. 그러므로

$f(-2)=f(0)=h(0)$

이때 $h(0)=k$라 하면 $f(x)$는

$f(x)=ax(x+2)+k$

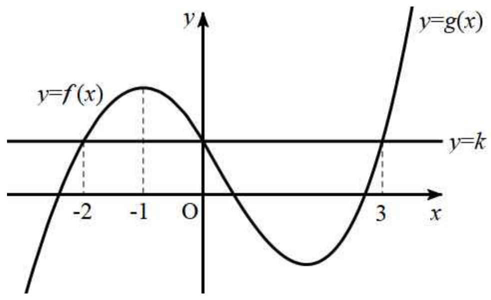
$=ax^2+2ax+k\quad(a<0)$

로 놓을 수 있다.

한편, $g(x)$가 삼차함수이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$에 접하는 접선의 기울기는 음수이어야 한다.

또, 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근이 합이 1이어야 하므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$g(x)=px(x-3)(x-q)+k$

$\quad=p\{x^3-(q+3)x^2+3qx\}+k$

한편, $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로

$q=-3$

이고

$g(x)=p(x^3-9x)+k$

이때, $g'(x)=p(3x^2-9)$이므로 $g'(x)=0$에서

$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

그러므로 함수 $h(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극소이다.

한편, $x=0$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기가 같아야 하고 $f'(x)=2ax+2a$, $g'(x)=p(3x^2-9)$이므로

$2a=-9p$ ……㉠

또, 구간 $[-2,3]$에서 $h(x)$의 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$이므로 ㉠을 이용하면

$f(-1)-g(\sqrt{3})=(-a+k)-(-6\sqrt{3}p+k)$

$=-a+6\sqrt{3}p$

$=\frac{9}{2}p+6\sqrt{3}p$

$=\frac{9+12\sqrt{3}}{2}p$

$=3+4\sqrt{3}$

그러므로

$p=\frac{2}{3}$

이고

$a=-\frac{9}{2}p=-3$

따라서

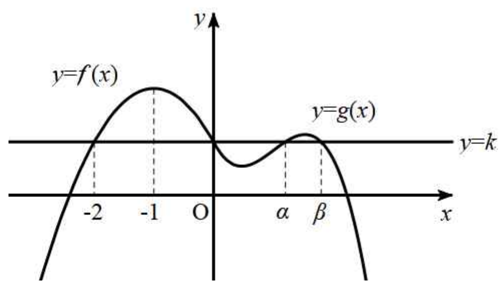
$f'(x)=-6x-6$, $g'(x)=2x^2-6$

이므로

$h'(-3)+h'(4)=f'(-3)+g'(4)$

$=12+26=38$

(ⅱ) $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



$g(x)=px(x-\alpha)(x-\beta)+k$ $(\alpha+\beta=3)$

로 놓으면

$g(x)=p\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}+k$

$\quad=p\{x^3-3x^2+\alpha\beta x\}+k$

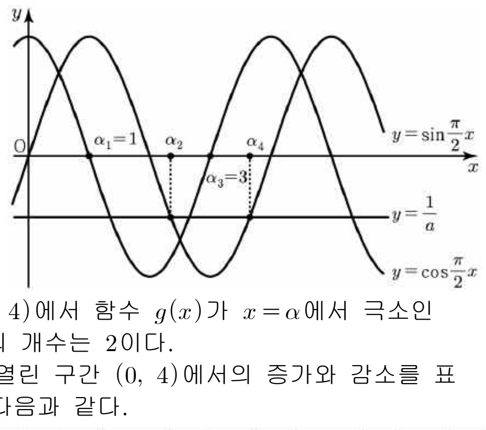
이므로 이차항의 계수가 0이 아니다.

그러므로 이러한 경우는 없다.
따라서 (ⅰ)에서 구하는 값은 38이다.

14) ①
점 $(2,\ 2)$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로
$g(2)=2,\ g''(2)=0$
$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$
$h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$
$h''(2)=f''(g(2))\{g'(2)\}^2+f'(g(2))g''(2)$
$\quad=f''(2)\{g'(2)\}^2$
$\dfrac{h''(2)}{f''(2)}=4$이므로 $\{g'(2)\}^2=4$
$g(x)$가 증가함수이므로 $g'(2)=2$
따라서 $h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)g'(2)=8$

15) ①
$g(x)=\displaystyle\int_0^x \ln f(t)dt$에서
$g(0)=0,\ g'(x)=\ln f(x),\ g''(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
조건 (가)에 의하여 $g(1)=2,\ g'(1)=0$
조건 (나)에 의하여 $g'(-1)=g'(1)=0$
$$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx=\int_{-1}^{1}xg''(x)dx$$
$$=[xg'(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}g'(x)dx$$
$$=g'(1)+g'(-1)-2\int_0^1 g'(x)dx$$
$$=2g'(1)-2\{g(1)-g(0)\}$$
$$=2\times0-2(2-0)=-4$$

16) 48
$g'(x)=f'(x)\{ae^{af(x)}+b\}$이고 $g'(x)=0$에서
$f'(x)=0$ 또는 $ae^{af(x)}+b=0$
(ⅰ) $f'(x)=0$인 경우
$f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x=0$
$x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$
(ⅱ) $ae^{af(x)}+b=0$인 경우
$e^{af(x)}=-\dfrac{b}{a}$를 만족시키는 x의 값이 존재해야하므로
$\dfrac{b}{a}<0$
조건 (나)와 (ⅰ)에 의하여 n이 짝수일 때 α_n은 방정식 $ae^{af(x)}+b=0$의 실근이다.
$ae^{af(\alpha_n)}+b=0\ \cdots$ ㉠
조건 (나)에 의하여 n이 짝수일 때
$e^{af(\alpha_n)}+bf(\alpha_n)=0\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $abf(\alpha_n)-b=0$이고 $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{a}$
n이 짝수일 때, $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{a}$을 만족시키려면
$-1<\dfrac{1}{a}<0$
그러므로 $a<-1,\ b>0$

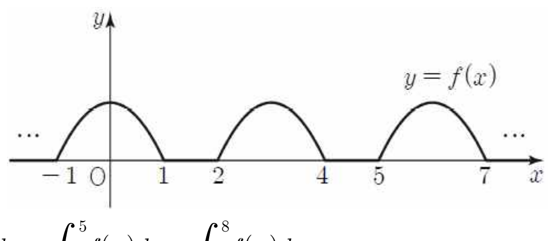


열린 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극소인 서로 다른 α의 개수는 2이다.
함수 $g(x)$의 열린 구간 $(0,\ 4)$에서의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	α_1	⋯	α_2	⋯	α_3	⋯	α_4	⋯	4
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗	e^a+b	↘	0	↗	$e^{-a}-b$	↘	0	↗	

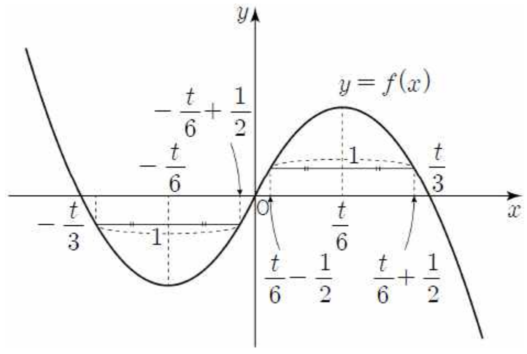
함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=4$에서 극값을 갖지 않고 열린 구간 $(0,\ 12)$에서 $g(x+4)=g(x)$를 만족한다.
열린 구간 $(0,\ 12)$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수와 극솟값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수는 각각 6이므로 $m=12$
함수 $g(x)$는 열린 구간 $(0,\ 4)$에서 $x=\alpha_1$과 $x=\alpha_3$일 때 각각 극댓값 $e^a+b,\ e^{-a}-b$를 갖는다.
함수 $g(x)$의 서로 다른 두 극댓값의 합이 e^3+e^{-3}이므로
$(e^a+b)+(e^{-a}-b)=e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$
a는 음수이므로 $a=-3$
$f(\alpha_2)=f(\alpha_4)=-\dfrac{1}{3}$이고 ㉡에 대입하면
$g(\alpha_2)=e^{-3f(\alpha_2)}+bf(\alpha_2)=e-\dfrac{1}{3}b=0$에서 $b=3e$
$$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}xdx$$
$$=12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}xdx$$
$\sin\dfrac{\pi}{2}x=t$로 치환하면 $\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x=\dfrac{dt}{dx}$이고
$\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha_3=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1,\ \sin\dfrac{\pi}{2}\alpha_4=-\dfrac{1}{3}$이다.
$$12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}xdx$$
$$=24\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(e^{-3t}+3et)dt$$
$$=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{3}{2}et^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$$
$$=8e^3-40e$$
따라서 $p=8,\ q=-40$이므로 $p-q=48$

17) 12
모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)+x^2-1\}^2\geq0,\ f(x)\geq0$이므로 정적분 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$의 값이 최소가 되기 위해서는
(ⅰ) $-1\leq x\leq1$에서
$x^2-1\leq0$이므로 $f(x)=-(x^2-1)=-x^2+1$
(ⅱ) $1<x\leq2$에서
$x^2-1>0$이므로 $f(x)=0$
$f(x+3)=f(x)$이고, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{5}f(x)dx=\int_{5}^{8}f(x)dx$$
$$=\cdots=\int_{23}^{26}f(x)dx$$
따라서 $\displaystyle\int_{-1}^{26}f(x)dx=9\int_{-1}^{2}f(x)dx$
$$=9\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=12$$

18) 37
함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,
$x<0$일 때, $f'(x)=6x+t$,
$x>0$일 때, $f'(x)=-6x+t$
이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소, $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이다.
$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-\dfrac{t}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{t}{3}$
$f_1(x)=3x^2+tx,\ f_2(x)=-3x^2+tx$라 하자.
(ⅰ) $\dfrac{t}{3}\geq1$인 경우 (즉, $t\geq3$)



조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

함수 $f_1(x)$의 그래프는 직선 $x=-\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_1(k-1)=f_1(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f_2(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_2(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$ … ㉠

조건 (나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

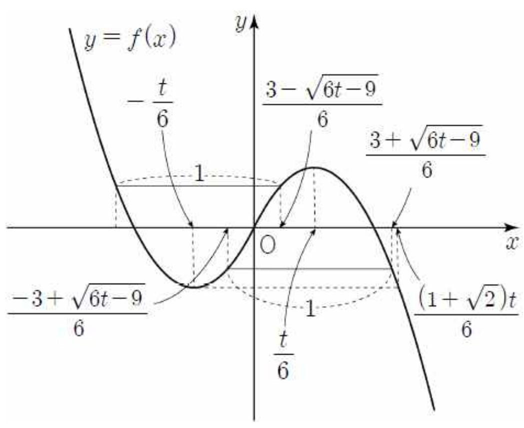
$k+1\le-\frac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

즉, $k\le-\frac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\frac{t}{6}-\frac{1}{2}$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $t\ge3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{t}{6}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$이므로 $g(t)=\frac{t}{6}-\frac{1}{2}=\frac{t-3}{6}$

(ii) $\frac{t}{3}<1$인 경우 (즉, $6-3\sqrt{2}\le t<3$)



$f_1\left(-\frac{t}{6}\right)=3\times\left(-\frac{t}{6}\right)^2+t\left(-\frac{t}{6}\right)=-\frac{t^2}{12}$이므로

$f_2(x)=-\frac{t^2}{12}$을 만족시키는 양수 x의 값은 x에 대한 방정식 $-3x^2+tx=-\frac{t^2}{12}$의 양이 실근인

$x=\frac{(1+\sqrt{2})t}{6}$

$t\ge6-3\sqrt{2}$이므로

$\frac{(1+\sqrt{2})t}{6}-\left(-\frac{t}{6}\right)$

$=\frac{(2+\sqrt{2})t}{6}\ge\frac{(2+\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{6}=1$

조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

$6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 방정식 $f_1(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 k에 대한 방정식

$3(k-1)^2+t(k-1)=-3k^2+tk$

의 실근인

$k=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$ 또는 $k=\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\frac{t}{6}$ … ㉢

조건(나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$k+1\le-\frac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

즉, $k\le-\frac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\frac{-3+\sqrt{6t-9}}{6}$ … ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\frac{t}{6}$이므로 $g(t)=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} & (6-3\sqrt{2}\le t<3)\\ \frac{t-3}{6} & (t\ge3)\end{cases}$$

따라서

$$3\int_2^4\{6g(t)-3\}^2dt$$

$$=3\int_2^3\left\{6\times\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}-3\right\}^2dt+3\int_3^4\left\{6\times\left(\frac{t-3}{6}\right)-3\right\}^2dt$$

$$=3\int_2^3(6t-9)dt+3\int_3^4(t-6)^2dt$$

$$=18+19=37$$

19) ③

$-ax^2+6ex+b$는 $x=\frac{3e}{a}$에서

$a(\ln x)^2-6\ln x$는 $\ln x=\frac{3}{a}$에서

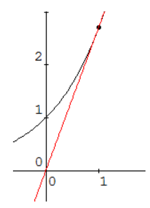
증감이 변한다. 따라서

$e^{\frac{3}{a}}\le c\le\frac{3e}{a}$

그런데 $y=e^x$와 $y=ex$의 그래프는

그림과 같이 $e^x\ge ex$이고

등호는 $x=1$일 때 성립한다.



그러므로 $\frac{3}{a}=1$, $c=e$ 이다.

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2+6ex+b & (x<e)\\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge e)\end{cases}$$

$f(x)$는 연속이므로

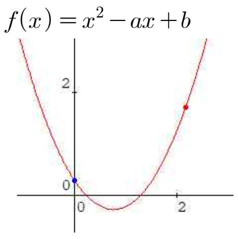
$-3e^2+6e^2+b=3-6$, $b=-3-3e^2$

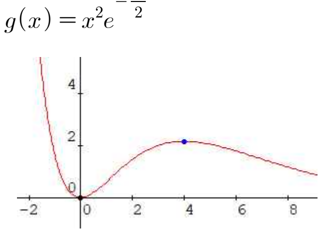
$\therefore\ f\left(\frac{1}{2e}\right)=-3\left(\frac{1}{4e^2}\right)+\frac{6e}{2e}-3-3e^2$

$=-3\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$

20) 6

$f(x)=x^2-ax+b$ $\quad g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$





$g(x)$는 극솟값 $g(0)=0$, 극댓값 $g(4)=\frac{16}{e^2}$

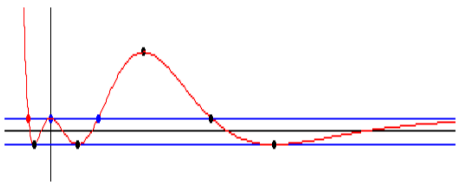
$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\infty$

(가) $h(0)=f(0)=b$, $h(4)=f\left(\frac{16}{e^2}\right)>b$

이므로 $0<a<\frac{16}{e^2}$ (단, $\frac{5}{2}<e<3$)

(나)를 만족시키려면

$h(x)=f(g(x))$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$f'(x)=2x-a$, $g'(x)=\frac{1}{2}x(4-x)e^{-\frac{x}{2}}$

$h'(x)=g'(x)f'(g(x))$

$=\frac{1}{2}x(4-x)e^{-\frac{x}{2}}\{2g(x)-a\}$

$g(x)=\frac{a}{2}$, $(0<\frac{a}{2}<\frac{8}{e^2})$에서 $h(x)$는 극솟값인데,

그 값이 $-k=-f(0)=-b=f\left(\frac{a}{2}\right)$

$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$에서 $\frac{a^2}{4}=2b$, 즉 $b=\frac{a^2}{8}$

한편 $f(1)=1-a+b=1-a+\frac{a^2}{8}=-\frac{7}{32}$이므로

$4a^2-32a+39=0$, $(2a-13)(2a-3)=0$

$0<a<\frac{16}{e^2}$이므로 $a=\frac{3}{2}$이고 $b=\frac{9}{32}$이다.

$\therefore\ a+16b=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=6$

21) 17

연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$

즉 $2+a=a^2$에서 $a=2$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$S=3\int_0^1(2x^2+2x)dx+12$

$=3\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1+12$

$=5+12=17$

22) 36

$y=f(x)$의 그래프가

그림과 같아야 한다.

$x>0$일 때,

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=4$인

점을 $x=b,\ c\ (b<c)$라 하면

$b+c=\frac{4a}{3}$, $bc=\frac{a^2-4}{3}$

$\frac{c(c-a)^2+b(-b+a)^2}{c+b}=4$

이것을 풀면

$c^2+b^2=(c+b)^2-2bc=\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}$

$c^3+b^3=(c+b)^3-3bc(b+c)=\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a$

$c^3+b^3-2a(c^2+b^2)+a^2(c+b)=4(c+b)$

즉, $\left(\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a\right)-2a\left(\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}\right)+\frac{4}{3}a^3=\frac{16}{3}a$

$\therefore\ f'(0)=a^2=36$

23) ①

$\int_0^x tf(x-t)dt$

에서 $x-t=s$라 하면

$\int_0^x tf(x-t)dt=\int_x^0(x-s)f(s)(-ds)$

$=\int_0^x(x-s)f(s)ds$

이므로

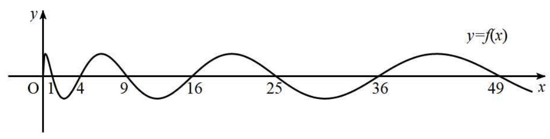
$g(x)=x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds$

이고,

$g'(x)=\int_0^x f(s)ds+xf(x)-xf(x)$

$=\int_0^x f(s)ds$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$1^2<a_1<2^2$,

$3^2<a_2<4^2$,

$5^2<a_3<6^2$,

$\vdots$

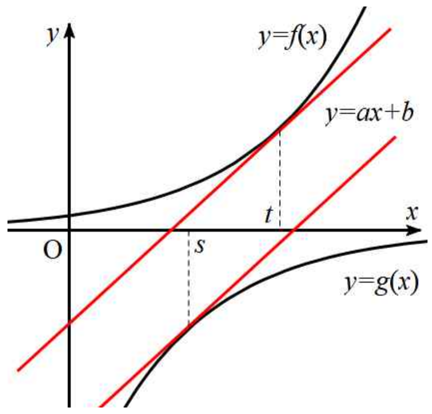
$11^2<a_6<12^2$

이므로 $k=11$

24) 43

$f(x)=e^{x-2}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또, $g(x)=-e^{-x+1}$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



한편, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식은 $f'(x)=e^{x-2}$이므로

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

$y=e^{t-2}x+(1-t)e^{t-2}$ -----㉠

또, 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(s,g(s))$에서의 접선의 방정식은 $g'(x)=e^{-x+1}$이므로

$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$

$y=e^{-s+1}x+(-s-1)e^{-s+1}$ ---㉡

㉠과 ㉡에서 접선의 기울기가 같으면

$e^{t-2}=e^{-s+1}$

$t-2=-s+1$

$s=-t+3$ ----㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$y=e^{t-2}x+(t-4)e^{t-2}$ ---㉣

이때, ㉠과 ㉣에서 $x=t$일 때

$a=e^{t-2}$

$(t-4)e^{t-2}\le b\le(1-t)e^{t-2}$

그러므로

$(t-4)e^{2t-4}\le ab\le(1-t)e^{2t-4}$---㉤

한편, 두 접선이 일치하면

$(1-t)e^{t-2}=(-s-1)e^{-s+1}$

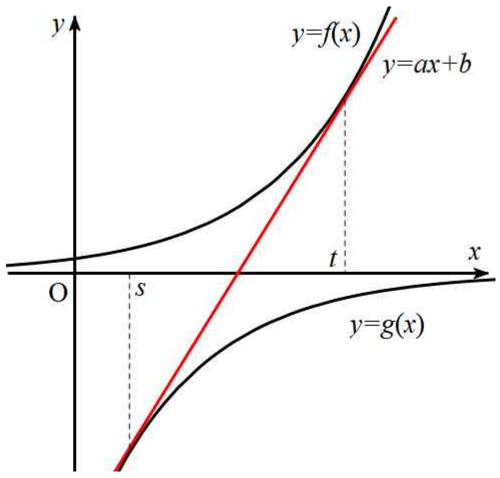
㉢을 대입하면

$(1-t)e^{t-2}=(t-4)e^{t-2}$

$1-t=t-4$

$2t=5$

$t=\frac{5}{2}$



그러므로

$t \le \frac{5}{2}$ -----㉥

㉥에서 $h(t) = (1-t)e^{2t-4}$이라 하면

$h'(t) = -e^{2t-4} + (2-2t)e^{2t-4}$

$= (1-2t)e^{2t-2}$

이므로 $h'(t) = 0$에서

$t = \frac{1}{2}$

또, $k(t) = (t-4)e^{2t-4}$이라 하면

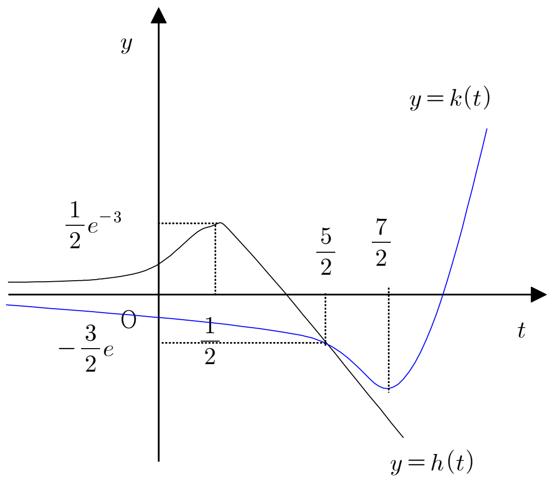
$k'(t) = e^{2t-4} + (2t-8)e^{2t-4}$

$= (2t-7)e^{2t-4}$

이므로 $k'(t) = 0$에서

$t = \frac{7}{2}$

이때, $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-3}$, $k\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}e$이므로 $t \le \frac{5}{2}$에서 두 함수 $y = h(t)$, $y = k(t)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $t = \frac{5}{2}$에서 최솟값 $-\frac{3}{2}e$, $t = \frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{1}{2}e^{-3}$을 가진다.

따라서

$|M \times m^3| = \left|\frac{1}{2}e^{-3} \times \left(-\frac{3}{2}e\right)^3\right|$

$= \frac{27}{16}$

이므로

$p + q = 16 + 27 = 43$

25) ②

주어진 조건에 의하여

$f(x) = a(x-1)^2 + b$ (b는 상수)로 놓으면

$f'(x) = 2a(x-1)$이므로

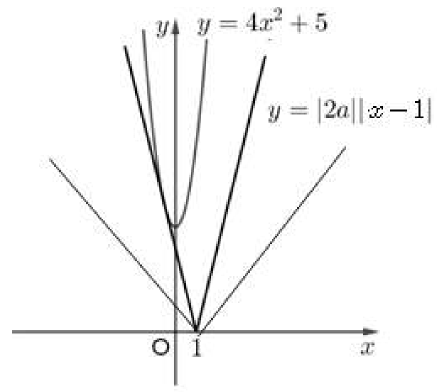
$|f'(x)| \le 4x^2 + 5$에서

$|2a(x-1)| \le 4x^2 + 5$ …… ㉠

즉, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 두 곡선

$y = |2a(x-1)| = |2a||x-1|$, $y = 4x^2 + 5$

가 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 최댓값은 점 (1, 0)에서 곡선 $y = 4x^2 + 5$에 그은 접선이 $y = -|2a|(x-1)$일 때이므로 접점을 $(k,\ 4k^2+5)$ $(k < 0)$이라 하면

$y' = 8x$에서

$y - (4k^2 + 5) = 8k(x - k)$

이 접선이 점 (1, 0)을 지나므로

$4k^2 - 8k - 5 = 0$

$(2k-5)(2k+1) = 0$

$k = -\frac{1}{2}$

즉, 접선의 기울기는

$8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

이므로

$-|2a| = -4$, $|a| = 2$

$a = -2$ 또는 $a = 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

26) ③

$x^2 + 3x = (x^2 + 1) + (3x - 1)$

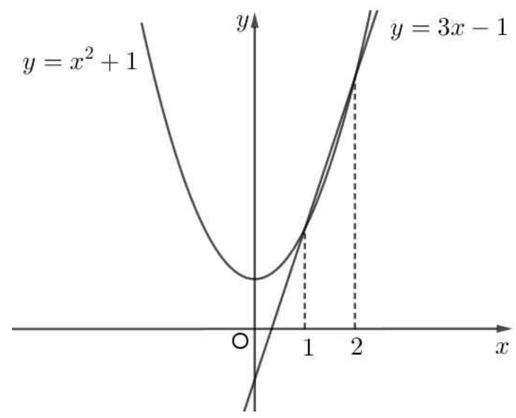
이고 두 함수 $y = x^2 + 1$, $y = 3x - 1$의 교점의 x좌표는

$x^2 + 1 = 3x - 1$, $x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 2$

이므로 두 함수의 그래프는 그림과 같다.



즉, $x \le 1$ 또는 $x \ge 2$일 때

$x^2 + 1 \ge 3x - 1$

$1 < x < 2$일 때

$x^2 + 1 < 3x - 1$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \le 1) \\ 3x - 1 & (1 < x < 2) \\ x^2 + 1 & (x \ge 2) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 1 & (x \le 1) \\ x^2 + 1 & (1 < x < 2) \\ 3x - 1 & (x \ge 2) \end{cases}$$

따라서

$\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 (x^2+1)dx+\int_1^2 (3x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2$

$=\frac{4}{3}+\left(4-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{29}{6}$

27) 105

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $p(\neq 0)$라 하면

조건 (가)에서

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있고,

조건 (나)에서

$q<1$이다.

이때

$f(a-x)$

$=p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)$

$=-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$

이므로

$f(x)f(a-x)=-p^2(x-1)(x-3)(x-q)$
$\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$

따라서

$g(x)=|f(x)f(a-x)|$
$=p^2|(x-1)(x-3)(x-q)$
$\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)|$

이고 $q<1<3$이고 $a-3<a-1<a-q$이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g(x)=p^2|(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2|$

꼴이어야 한다.

따라서

$a-3=q,\ a-1=1,\ a-q=3$

이어야 한다.

따라서 $a=2,\ q=-1$이므로

$f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$,

$f(a-x)=-p(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$

이다.

따라서

$g(x)=|f(x)f(a-x)|=f(x)^2$ 이므로

$\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\frac{f(8)^2}{f(0)\times f(8)}$

$=\frac{f(8)}{f(0)}$

$=\frac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}$

$=105$

28) ④

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n^2}f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xf\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x(-\sin x)dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(\left[x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos x dx\right)$

$=\frac{1}{\pi}\left(-\pi-\left[\sin x\right]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\times(-\pi)=-1$

29) 7

$A=B$이므로 $\int_0^2 f(x)dx=0$

$\int_0^2 (2x+3)f'(x)dx$

$=\left[(2x+3)f(x)\right]_0^2-\int_0^2 2f(x)dx$

$=7f(2)-3f(0)-0=7$

30) 25

$f(x)=kx^2+px+q$ ($p,\ q$는 상수)라 하면

$f(0)=f(-2)$이므로 $q=4k-2p+q,\ p=2k$

$f(0)\neq 0$이므로 $q\neq 0$

따라서 $f(x)=kx^2+2kx+q$ $(k>0,\ q\neq 0)$

조건 (가)에서 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\leq 0$

$x\geq -1$일 때, $g(x)\leq mx+m$

$x<-1$일 때, $g(x)\geq mx+m$

이고, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(-1)=0$

$(-a+b)e^{f(-1)}=0$에서 $b=a$

$g(x)=(ax+a)e^{kx^2+2kx+q}$에서

$g'(x)=a\{1+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$

$g''(x)=2ak(x+1)\{3+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$

$a<0,\ k>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)<0$이고, $x<-1$이면 $g''(x)>0$, $x>-1$이면 $g''(x)<0$이다. 조건 (가)에서 m의 최솟값이 -2이므로 $g'(-1)=-2$

$ae^{-k+q}=-2$ …… ㉠

조건 (나)의 $\int_0^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$ 에서

$kx^2+2kx+q=t$라 하면

$\int_0^1 g(x)dx=\int_q^{3k+q}\frac{a}{2k}e^t dt$

$=\left[\frac{a}{2k}e^t\right]_q^{3k+q}=\frac{a}{2k}\left(e^{3k+q}-e^q\right)$

㉠을 대입하면

$\frac{-2e^k}{2k}\left(e^{3k}-1\right)=\frac{e-e^4}{k}$, $-e^{4k}+e^k=e-e^4$

$e^{4k}-e^4-e^k+e=0$

$\left(e^k-e\right)\left\{\left(e^{2k}+e^2\right)\left(e^k+e\right)-1\right\}=0$

$\left(e^{2k}+e^2\right)\left(e^k+e\right)-1>0$이므로

$e^k-e=0$, 즉 $k=1$

조건 (나)에서

$\int_{-2f(0)}^{1}g(x)dx-\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^{0}g(x)dx=0$

$k=1$이므로 $x^2+2x+q=t$라 하면

$\int_{-2f(0)}^{0}g(x)dx=\int_{4q^2-3q}^{q}\frac{a}{2}e^t dt$

$=\left[\frac{a}{2}e^t\right]_{4q^2-3q}^{q}=\frac{a}{2}\left(e^q-e^{4q^2-3q}\right)=0$

$a\neq 0$에서 $q=4q^2-3q$이고 $q\neq 0$이므로 $q=1$

㉠에 대입하면 $ae^{-1+1}=-2$, $a=-2$

따라서 $a=-2,\ b=-2,\ f(x)=x^2+2x+1$이므로

$f(ab)=f(4)=16+8+1=25$

31) ③

$\int_0^1 g(t)dt=a$라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$ (C는 적분상수)

(나)에서 $C-\int_0^1\left(t^2+2at+C\right)dt=\frac{2}{3}$

$C-\left(\frac{1}{3}+a+C\right)=\frac{2}{3}$ 에서 $a=-1$

$\int_0^1 g(t)dt=a$에서 $\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1=-1$

즉, $C=-\frac{1}{3}$이므로 $g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$

따라서 $g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

32) ②

$g'(x)=f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=-xf'(x)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.

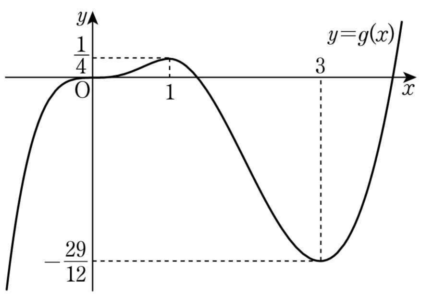
그러므로 $g'(x)=-xf'(x)$에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\leq g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최댓

값을 가지고 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 가진다. 즉, $g'(3)=0$
그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x)=-12x(x-3)(x-a)$
사차함수 $g(x)$가 오직 1개의 극값만 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가질 수 없다. 즉, $a=0$
$g'(x)=-12x^2(x-3)=-12x^3+36x^2$
따라서 $\int_0^1 g'(x)\,dx=\left[-3x^4+12x^3\right]_0^1=9$

33) 80

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=(x-1)f(x)$
$=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\ge 1)\end{cases}$
위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면
$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\ge 1)\end{cases}$
(C_1, C_2는 적분상수)
$g'(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
$g(0)=0$에서 $C_1=0$이고 $-\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{2}{3}-4+6+C_2$
에서 $C_2=-\dfrac{29}{12}$
$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12} & (x\ge 1)\end{cases}$
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

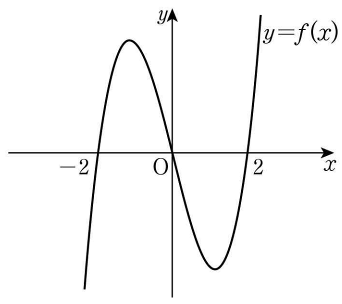


위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$를 구하면
$h(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\dfrac{29}{12} \text{ 또는 } t>\dfrac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t=-\dfrac{29}{12} \text{ 또는 } t=\dfrac{1}{4}\right)\\ 3 & \left(-\dfrac{29}{12}<t<\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$
이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 a의 값은 $\dfrac{1}{4}$과 $-\dfrac{29}{12}$ 뿐이다.
그러므로 $S=\left|\dfrac{1}{4}\right|+\left|-\dfrac{29}{12}\right|=\dfrac{8}{3}$
따라서 $30S=30\times\dfrac{8}{3}=80$

[참고] $g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$는 다음과 같이 구할 수도 있다.
(i) $x<1$일 때,
$g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\dfrac{3}{4}x^4+x^3$
(ii) $x\ge 1$일 때,
$g(x)$
$=\int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt$
$=\dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12}$

34) ⑤

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



ㄱ. $m=-1$일 때, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{15}{4}$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$
$g\left(\dfrac{1}{2}\right)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$이므로 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$ (참)

ㄴ. $m=-1$일 때, $g(x)=\begin{cases}47x-4 & (x<0)\\ -2x-4 & (x\ge 0)\end{cases}$
(i) $x<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x좌표를 $x_1\,(x_1<0)$이라 하면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_1$에서만 미분가능하지 않다.
(ii) $x=0$일 때, $g(0)-4<0=f(0)$이므로 $x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
(iii) $x>0$일 때,
$f(x)-g(x)=2x^3-6x+4$
$=(x-1)^2(x+2)\ge 0$
즉, $f(x)\ge g(x)$
$x>0$에서 $h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다.
따라서 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.
(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 양수 m에 대하여
$x=0$일 때, $g(0)=\dfrac{4}{m^3}>0=f(0)$이므로
$x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $f(x)$의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
$x>0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 y절편도 양수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x좌표를 $x_2\,(x_2>0)$이라 하면 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_2$에서만 미분가능하지 않다.
그러므로 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이려면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능해야 한다.
$x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접한다고 할 때, 접점의 x좌표를 t라 하자.
$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$에서
$2t^3-8t=-\dfrac{47}{m}t+\dfrac{4}{m^3}$ …… ㉠
$6t^2-8=-\dfrac{47}{m}$ …… ㉡
$t\times$㉡$-$㉠에서
$4t^3=-\dfrac{4}{m^3}$
$t=-\dfrac{1}{m}$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$\dfrac{6}{m^2}-8=-\dfrac{47}{m}$, $8m^2-47m-6=0$
$(8m+1)(m-6)=0$
m은 양수이므로 $m=6$
$m=6$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=-\dfrac{1}{6}$인 점에서 접한다.
(i) $m=6$일 때, 함수 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다.
그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.
(ii) $0<m<6$일 때, $x<0$에서 m의 값이 작아질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 커지고 y절편도 커지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

그러므로 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq f(x)$이므로
$h(x)=f(x)$이다.
따라서 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.
(iii) $m>6$일 때, $x<0$에서 m의 값이 커질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 작아지고 y절편도 작아지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 점의 x좌표를 각각 x_3, x_4라고 하면 함수 $h(x)$는 $x=x_3$, $x=x_4$에서 미분가능하지 않다.
(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

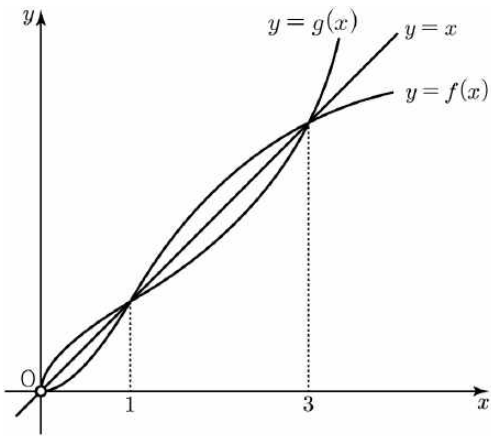
35) ②

$$f'(x)=\frac{8x(x^2+3)-4x^2\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{24x}{(x^2+3)^2}$$

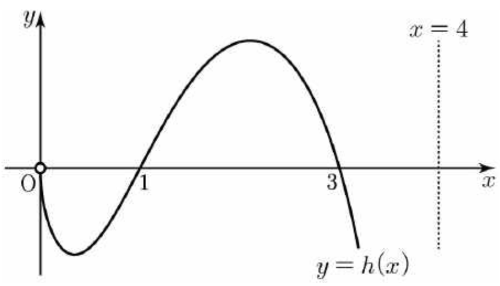
양의 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$f(x)=x$에서 $x^3-4x^2+3x=x(x-1)(x-3)=0$이므로
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이다.

$$f''(x)=\frac{24(x^2+3)^2-24x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}=\frac{72(1-x)(1+x)}{(x^2+3)^3}$$

곡선 $y=f(x)$는 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하고, 열린 구간 $(1,\ \infty)$에서 위로 볼록하며, 변곡점은 $(1,\ 1)$이다.
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서만 $h(x) \geq 0$이고, 함수 $h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



ㄱ. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이므로 $f(1)=g(1)=1$
$h(1)=0$ (참)
ㄴ. 두 양수 a, b에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대가 되려면 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 $h(x) \geq 0$이고 $b-a$의 값이 최대이어야 하므로 $a=1$, $b=3$
그러므로 $b-a=2$ (참)
ㄷ. $f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이고

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-\frac{1}{f'(g(x))}$$

$$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 1)$에서만 변곡점을 가지므로
$f''(1)=0$
$f(1)=g(1)=1$이므로

$$g''(1)=-\frac{f''(g(1))g'(1)}{\{f'(g(1))\}^2}=-\frac{f''(1)g'(1)}{\{f'(1)\}^2}=0$$

$h''(1)=f''(1)-g''(1)=0$
(i) $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여
$f''(x)>0$, $g'(x)>0$, $0<g(x)<1$이므로

$$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}<0$$

열린 구간 $(0,\ 1)$에서
$h''(x)=f''(x)-g''(x)>0$
(ii) $1<x<4$인 모든 실수 x에 대하여
$g'(x)>0$, $g(x)>1$이고 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이므로

$$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}>0$$

열린 구간 $(1,\ 4)$에서
$h''(x)=f''(x)-g''(x)<0$
(i), (ii)에 의하여 함수 $h'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

	0	⋯	1	⋯	4
$h''(x)$		+	0	−	
$h'(x)$		↗	$\frac{5}{6}$	↘	

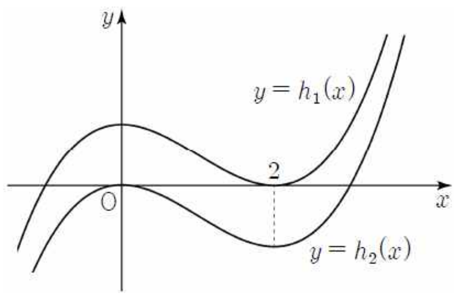
함수 $h'(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.
$f'(1)=\frac{3}{2}$이므로

$$h'(1)=f'(1)-\frac{1}{f'(g(1))}=f'(1)-\frac{1}{f'(1)}=\frac{5}{6}$$

(거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

36) ⑤

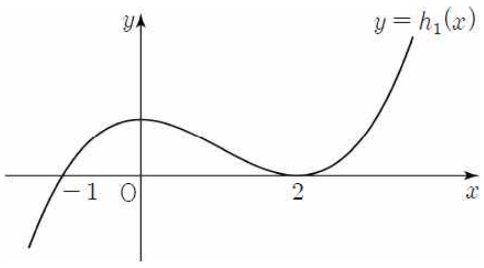
ㄱ. $f'(0)=g'(0)=0$
$x<0$에서 $f'(x)>0$, $g'(x)>0$
$0<x<4$에서 $f'(x)<0$, $g'(x)<0$
이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다. (참)
ㄴ. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C_1$, $g(x)=-x^2+C_2$
(단, C_1, C_2는 적분상수)
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x(x-2)$
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우는 삼차함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우이므로 삼차함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$의 두 가지이다.



$h(x)=h_1(x)$일 때, $h_1(2)=0$이므로
$h_1(0)\times h_1(2)=0$
$h(x)=h_2(x)$일 때, $h_2(0)=0$이므로
$h_2(0)\times h_2(2)=0$
따라서 $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$ (참)
ㄷ. $\int_{-1}^0 h_2(t)dt<0$이므로 함수 $h_2(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^x \{f(t)-g(t)\}dt \geq 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$가 아니다.

$$h_1(2)=-\frac{4}{3}+C_1-C_2=0,\ C_1-C_2=\frac{4}{3}$$

$$h_1(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$$



$x<-1$일 때, $h_1(x)<0$이므로 $\int_{-1}^{x} h_1(t)dt>0$

$x \geq -1$일 때, $h_1(x) \geq 0$이므로 $\int_{-1}^{x} h_1(t)dt \geq 0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt \geq 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$는 함수 $h_1(x)$이다.

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}\right)dx=2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

37) ③

수직선 운동에서 점 P의 속도를 $v(t)=t\sin t$로 보면

$\int_0^x |t\sin t|dt$, $\int_0^x t\sin t dt$는

각각 움직인 거리와 위치의 변화량이다.

$$\int_0^{\pi} t\sin t dt=[-t\cos t+2\sin t]_0^{\pi}=\pi$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t dt=[-t\cos t+2\sin t]_{\pi}^{2\pi}=-3\pi$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} t\sin t dt=[-t\cos t+2\sin t]_{2\pi}^{3\pi}=5\pi$$

ㄱ. $f(2\pi)==(\pi+3\pi)-|\pi-3\pi|=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi, \int_0^{\alpha} t\sin t dt=0$이면

$f(\alpha)=(\pi+\pi)-|\pi-\pi|=2\pi$

ㄷ. $2\pi<\beta \leq x \leq 3\pi, \int_0^{\beta} t\sin t dt=0$이면

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

$$=6\pi+\int_{\beta}^{x} t\sin t dt-\int_{\beta}^{x} t\sin t dt=6\pi$$

$$\int_{\beta}^{3\pi} f(x)dx=6\pi(3\pi-\beta)$$

38) ②

ㄱ. $x \leq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이므로 $x \leq 0$일 때,

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

$$=\int_0^x 0\times f(1-t)dt$$

$$=\int_0^x 0\,dt=0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$

에서 $1-t=s$라 하면

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_1^{\frac{1}{2}} f(1-s)f(s)(-ds)$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)f(1-s)ds$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)f(1-t)dt$$

이므로

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)f(1-t)dt$$

$$=g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=2g\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (참)}$$

ㄷ. $x \leq 0$일 때 $g(x)=0$이고,

$x \geq 1$일 때

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

$$=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt+\int_1^x f(t)f(1-t)dt$$

$=g(1)+0=g(1)$

한편, $0<x<1$일 때

$g'(x)=f(x)f(1-x)>0$

이므로 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가한다.

즉, $g(a) \leq g(1)$이고

ㄴ에서 $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로

$$g(a) \leq 2g\left(\frac{1}{2}\right)$$

이때 곡선 $y=f(x)f(1-x)$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2\right)$에 대하여 선분 OA를 대각선으로 하고 각 변이 x축 또는 y축에 수직인 직사각형의 넓이를 S라 하면

$$2g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2S$$

$$\leq 2\times\frac{1}{2}\times\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

$$\leq (\ln 2)^{20}<1$$

따라서 $g(a) \geq 1$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

39) ②

$x \neq -1$일 때, $f'(x)=\dfrac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$

ㄱ. $n=3$이면 $x<-1$일 때, $f'(x)=\dfrac{3-6x^3}{(x^3+1)^2}>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서

증가한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$이 성립한다.

n이 홀수일 때, $x\to -1$이면 (분모)$\to 0$이고

(분자)$\to -n$이므로 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

n이 짝수일 때, $\lim_{x\to -1} f(x)=-\dfrac{n}{2}$이고

$f(-1)=-2$이므로 $n=4$이다.

따라서 $n=4$일 때만 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$f'(x)=\dfrac{4-12x^4}{(x^4+1)^2}$이다.

$x<0$일 때 $f(x)<0$이고, $x \geq 0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\sqrt[4]{27}$	↘

$2<\sqrt[4]{27}$이므로 방정식 $f(x)=2$는 $x \geq 0$에서만 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x)=0$에서 $x^n=\dfrac{1}{n-1}$ $(n \neq 1)$

(i) n이 홀수일 때

함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않는다.

(ii) n이 짝수일 때

$n=2$이면 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않고, $n \geq 4$이면 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.

(i), (ii)에서 구간 $(-1, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n은 4, 6, 8, 10이므로 그 합은 28이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

40) 164

직선 AB의 방정식은

$y=-\dfrac{n+5}{n+4}x+n+5$

자연수 a에 대하여 $x=a$일 때

$y=-\dfrac{n+5}{n+4}a+n+5$

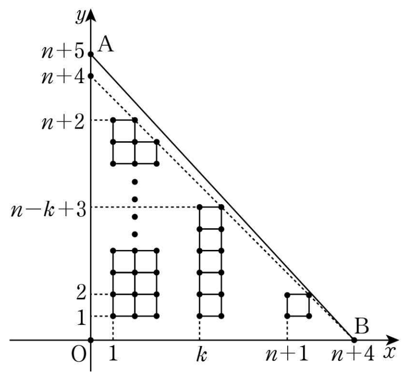
$=n+5-\left(1+\dfrac{1}{n+4}\right)a$

$=n+5-a-\dfrac{a}{n+4}$

$0<a<n+4$일 때, $0<\dfrac{a}{n+4}<1$이므로

$x=a$일 때, y좌표가 자연수인 점의 개수는

$n+4-a$이다.



두 자연수 a, b에 대하여 삼각형 AOB의 내부에 포함되는 한 변의 길이가 1이고 각 꼭짓점의 좌표가 자연수인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각

(a,b), $(a+1,b)$, $(a+1,b+1)$, $(a,b+1)$

이라 하면

$a=1$일 때, $1\le b\le n+1$이므로 정사각형의 개수는 $(n+1)$이다.

$a=2$일 때, $1\le b\le n$이므로 정사각형의 개수는 n이다.

$a=3$일 때, $1\le b\le n-1$이므로 정사각형의 개수는 $(n-1)$이다.

$\vdots$

$a=n+1$일 때, $b=1$이므로 정사각형의 개수는 1이다. 따라서

$a_n=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$

$=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

$=\dfrac{1}{2}(n^2+3n+2)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n^2+3n+2)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8\times9\times17}{6}+3\times\dfrac{8\times9}{2}+2\times8\right)$

$=164$

41) ④

$\displaystyle a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$에서 $n=1$을 대입하면

$\displaystyle a_2=\sum_{k=1}^{1}ka_k=a_1$이므로 $a_2=2$

$n\ge2$일 때 $\displaystyle a_n=\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$이므로

$\displaystyle a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$

$=na_n$

그러므로 $a_{n+1}=(n+1)a_n$ (단, $n\ge2$)

위 식에 $n=50$을 대입하면

$a_{51}=51a_{50}$이고 $a_{50}>0$이므로 $\dfrac{a_{51}}{a_{50}}=51$

따라서 $a_2+\dfrac{a_{51}}{a_{50}}=2+51=53$

[보충 설명]

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$ …… (*)

임을 수학적 귀납법을 이용하여 보일 수 있다.

$a_2=2$이고 $n\ge2$일 때 $a_{n+1}=(n+1)a_n$이므로

(i) $n=2$일 때

$a_2=2>0$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) 2 이상의 자연수 k에 대하여 $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_k>0$

$n=k+1$일 때 $a_{k+1}=(k+1)a_k>0$이므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.

42) ③

a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_{k-2}는 a_{k-3}과 a_{k-1}의 등차중항이다. 즉,

$a_{k-2}=\dfrac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}=\dfrac{-24}{2}=-12$

$S_k=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}=\dfrac{k(a_3+a_{k-2})}{2}$

$=\dfrac{k\{42+(-12)\}}{2}=15k$

따라서 $k^2=15k$이고 $k\ne0$이므로 $k=15$

[다른 풀이 1]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=42$ …… ㉠

$a_{k-2}=\dfrac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}$,

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

$S_k=\dfrac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$이고, $k\ne0$이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉢

㉢에서 ㉠을 빼면 $a+(k-3)d=2k-42$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $2k-42=-12$이므로 $k=15$

[다른 풀이 2]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=42$, $a=42-2d$ …… ㉠

$a_{k-3}+a_{k-1}=a+(k-4)d+a+(k-2)d=-24$이므로

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$42-2d+kd-3d=-12$, $kd-5d=-54$ …… ㉢

$S_k=\dfrac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$이고, $k\ne0$이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉣

㉠을 ㉣에 대입하면

$84-4d+kd-d=2k$, $kd-5d=2k-84$ …… ㉤

㉢, ㉤에서 $2k-84=-54$이므로 $k=15$

43) ⑤

$\log a_n+\log a_{n+1}+\log b_n=0$

$\log a_na_{n+1}b_n=0$, $a_na_{n+1}b_n=1$

$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$

$=\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{3n+a_1}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{12}$

따라서 $a_1=4$

44) ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 조건 (가)에서 $a=\dfrac{45}{4}$이고

조건 (나)에서는 $a=\frac{63}{2}$이므로 $r\neq 1$

$\sum_{k=1}^{4}a_k=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=45$

$\sum_{k=1}^{6}\frac{a_2\times a_5}{a_k}=(a_2\times a_5)\times\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}$

$=ar\times ar^4\times\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{r}}$

$=a^2r^5\times\frac{r^6-1}{a(r^6-r^5)}$

$=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=189$

$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}=\frac{r^6-1}{r^4-1}$

$=\frac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{(r^2-1)(r^2+1)}=\frac{r^4+r^2+1}{r^2+1}=\frac{189}{45}$

이므로

$5r^4+5r^2+5=21r^2+21$

$5r^4-16r^2-16=0,\ (5r^2+4)(r^2-4)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

$\frac{a(2^4-1)}{2-1}=15a=45$이므로 $a=3$

따라서 $a_3=3\times 2^2=12$

45) 79

두 조건 (가)와 (나)로부터 $a_{2n}+a_{2n+1}=2b_n+1$

두 조건 (다)와 (라)로부터 $b_{2n}+b_{2n+1}=2a_n+1$

$\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n$

$=a_1+\sum_{n=1}^{31}(a_{2n}+a_{2n+1})-\sum_{n=1}^{31}b_n$

$=a_1+\sum_{n=1}^{31}(2b_n+1)-\sum_{n=1}^{31}b_n$

$=a_1+\sum_{n=1}^{31}b_n+31$

$=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}(b_{2n}+b_{2n+1})+31$

$=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}(2a_n+1)+31$

$=a_1+b_1+2\sum_{n=1}^{15}a_n+15+31$

$=a_1+b_1+2a_1+2\sum_{n=1}^{7}(2b_n+1)+46$

$=a_1+b_1+2a_1+4\sum_{n=1}^{7}b_n+14+46$

$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+4\sum_{n=1}^{3}(2a_n+1)+60$

$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8\sum_{n=1}^{3}a_n+12+60$

$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+8(2b_1+1)+72$

$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+16b_1+8+72$

$=11a_1+21b_1+80=155$

그러므로 $11a_1+21b_1=75$ ⋯ ㉠

조건 (가)와 (다)에서

$a_{4n}=b_{2n}+2=(3a_n-2)+2=3a_n$,

$b_{4n}=3a_{2n}-2=3(b_n+2)-2=3b_n+4$

이므로

$a_{48}=3a_{12}=9a_3=9(b_1-1)=9,\ b_1=2$

㉠에 의하여 $a_1=3$

따라서 $b_{32}=3b_8+4=9b_2+16=9(3a_1-2)+16=79$

46) 139

$n=1$일 때, $a_2+3a_1=-1$이므로 $a_2=-4$

$n=2$일 때, $a_3+3a_2=2$이므로 $a_3=14$

$n=3$일 때, $a_4+3a_3=-3$이므로 $a_4=-45$

$n=4$일 때, $a_5+3a_4=4$이므로 $a_5=139$

47) ③

주어진 조건에 의하면 $n\geq 5$일 때 a_n은 한가지 이다

따라서 $a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1$의 값만 확인한다.

$a_n<0$이면 $a_{n+1}=-2a_n+3>0$이므로

수열 $\{a_n\}$의 값이 연속하여 음수인 경우는 없다.

따라서 최댓값은 $a_{n+1}=a_n-6$일 때

즉 $a_4=11,\ a_3=17,\ a_2=23,\ a_1=29$ 일 때이다.

최솟값은 (나)의 관계식이 번갈아 나오는 경우

즉 $a_4=-1,\ a_3=5,\ a_2=-1,\ a_1=5$일 때이다.

$\therefore\ M-m=(11+17+23+29)-(-1+5-1+5)$

$=80-8=72$

48) 25

$a_3+a_5=0$에서 $a_4=0$이다. 공차를 d라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 $-3d,\ -2d,\ d,\ 0,\ d,\ 2d,\ \cdots$

$d\leq 0$이면 $2(-3d-2d-d)=-12d=30$

만족하는 정수 d가 없다. 따라서 $d>0$이다.

그러면 $2(d+2d)=6d=30,\ d=5$

$\therefore\ a_9=a_4+5d=25$

49) ④

$\sum_{k=1}^{m}a_k$

$=\sum_{k=1}^{m}\log_2\sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$

$=\frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{2\times 2}{3}+\log_2\frac{2\times 3}{4}+\log_2\frac{2\times 4}{5}+\cdots\right.$

$\left.+\log_2\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\times 2}{3}\times\frac{2\times 3}{4}\times\frac{2\times 4}{5}\times\cdots\right.$

$\left.\times\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=N$(N은 100 이하의 자연수) 라 하면

$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}=N$

$\frac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2N}$

$2^{m+1-2N}=m+2$

따라서 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

(ⅰ) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$일 때

$2^{3-2N}=2^2$

$3-2N=2,\ N=\frac{1}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로

$m\neq 2$

(ⅱ) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$일 때

$2^{7-2N}=2^3$

$7-2N=3,\ N=2$

(ⅲ) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$일 때

$2^{15-2N}=2^4$

$15-2N=4,\ N=\frac{11}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로

$m\neq 14$

(ⅳ) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$일 때

$2^{31-2N}=2^5$

$31-2N=5,\ N=13$

(ⅴ) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$일 때

$2^{63-2N}=2^6$

$63-2N=6,\ N=\frac{57}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로
$m \neq 62$
(vi) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$일 때
$2^{127-2N}=2^7$
$127-2N=7$, $N=60$
(vii) $m+2 \geq 2^8$일 때
$N>100$
(i) ~ (vii)에서
$m=6$, 30, 126
따라서 모든 m의 값의 합은
$6+30+126=162$

50) 33
$a_3=a_2-a_1=-6$
$a_4=a_3-a_2=-9$
$a_5=a_4-a_3=-3$
$a_6=a_5-a_4=6$
$a_7=a_6-a_5=9$
$a_8=a_7-a_6=3$
…
즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 9, 3, -6, -9, -3, 6, …이 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$ 이 성립한다.
이때, 9, 3, -6, -9, -3, 6 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 항의 개수는 2이고 $100=6\times16+4$ 이므로 구하는 100이하의 자연수 k의 개수는
$16\times2+1=33$

51) 7
$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}$
$S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$이므로
$a_{k+2}+a_{k+1}=4$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로
$a_1+2(k+1)+a_1+2k=4$
$a_1+2k=1$
$a_1=1-2k$ …… ㉠
$S_k=-16$에서
$\frac{k\{2a_1+(k-1)\times2\}}{2}=-16$
$k(a_1+k-1)=-14$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$k\{(1-2k)+k-1\}=-16$
$k^2=16$
k는 자연수이므로
$k=4$
$k=4$를 ㉠에 대입하면
$a=-7$
따라서
$a_{2k}=a_8=-7+7\times2=7$

52) 58
$n=1$일 때 $\frac{1}{a_1}=9$
$n\geq2$일 때
$$\frac{4n-3}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}$$
$$=2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}$$
$$=4n+5$$
이것은 $n=1$일 때도 성립하므로
$\frac{4n-3}{a_n}=4n+5$ $(n\geq1)$
즉, $a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$이므로
$$a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}$$
$$=\frac{17}{41}$$
따라서 $p+q=41+17=58$

53) ④
조건 (가), (나)에 의하여
$S_7=T_7$이고 $S_7+T_7=84$이므로 $S_7=42$
$S_7=T_7$이므로 7 이하의 모든 자연수 n에 대하여
$a_n\geq0$ … ㉠
조건 (나)에 의하여 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여
$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$
$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0$
$a_{n+1}\leq0$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $0\leq a_7\leq0$이므로 $a_7=0$
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
$S_7=\frac{7(2a+6d)}{2}=42$, $a_7=a+6d=0$에서 $a=12$, $d=-2$
$a_n=14-2n$
$S_{15}=\frac{15\times(24-28)}{2}=-30$
$S_{15}+T_{15}=84$
따라서 $T_{15}=84-S_{15}=114$

54) ②
점 P_n의 좌표를 (a_n, b_n)이라 하자.
$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$
이고 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 직선 $x=a_n$, 직선 $x=a_{n+1}$ 및 x축과 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은
$$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\times(a_{n+1}-a_n)\times(b_n+b_{n+1})$$
$$=b_n+b_{n+1}$$
$a_1=1$, $a_6=11$이므로
$$\int_1^{11}f(x)dx=\int_{a_1}^{a_6}f(x)dx$$
$$=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$$
$$=(b_1+b_2)+(b_2+b_3)+(b_3+b_4)+(b_4+b_5)+(b_5+b_6)$$
조건 (다)에 의하여 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는
$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}a_{n+1}$, $b_{n+1}=b_n+a_{n+1}$
$b_1=1=a_1$
$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2=4$
$b_3=b_2+a_3=a_1+a_2+a_3=9$
$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2+a_3+a_4=16$
$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=25$
$b_6=b_5+a_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=36$
따라서 $\int_1^{11}f(x)dx=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$
$$=(1+4)+(4+9)+(9+16)+(16+25)+(25+36)$$
$$=145$$

55) ④
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
$a>0$, $d<-1$이므로 $n\leq k$일 때 $a_n\geq0$, $n\geq k+1$일 때 $a_n<0$인 자연수 k가 유일하게 존재한다.
$n\leq k$일 때, $a_n\geq0$, $b_n=a_{n+1}-\frac{n}{2}$이므로
$b_1=a_2-\frac{1}{2}$, $b_2=a_3-1$, …, $b_k=a_{k+1}-\frac{k}{2}$
따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n=1, 2, 3, \cdots, k-1$일 때,
$b_{n+1}-b_n=d-\frac{1}{2}$을 만족시킨다.
$n\geq k+1$일 때, $a_n<0$, $b_n=a_n+\frac{n}{2}$이므로
$b_{k+1}=a_{k+1}+\frac{k+1}{2}$, $b_{k+2}=a_{k+2}+\frac{k+2}{2}$,
$b_{k+3}=a_{k+3}+\frac{k+3}{2}$, …
따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n=k+1, k+2, k+3, \cdots$일 때,
$b_{n+1}-b_n=d+\frac{1}{2}$을 만족시킨다.
즉, $n\leq k-1$일 때, $d-\frac{1}{2}<0$이므로 $b_n>b_{n+1}$,

$n \geq k+1$일 때, $d+\frac{1}{2}<0$이므로 $b_n > b_{n+1}$,

$n=k$일 때,

$$b_{k+1}-b_k = \left(a_{k+1}+\frac{k+1}{2}\right)-\left(a_{k+1}-\frac{k}{2}\right)$$
$$=k+\frac{1}{2}>0$$

이므로 $b_n < b_{n+1}$

그러므로 $n=k$일 때만 $b_n < b_{n+1}$이다.

조건 (가)에서 $b_5 < b_6$이므로 $k=5$이다.

그러므로 $b_n = \begin{cases} a_{n+1}-\frac{n}{2} & (n \leq 5) \\ a_n + \frac{n}{2} & (n \geq 6) \end{cases}$

조건 (나)에 의하여

$$S_5 = b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$$
$$=\frac{5(b_1+b_5)}{2}=\frac{5}{2}\times\left\{\left(a_2-\frac{1}{2}\right)+\left(a_6-\frac{5}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\times(2a+6d-3)=0$$

즉, $2a+6d-3=0$ ⋯ ㉠

$$S_9-S_5=b_6+b_7+b_8+b_9$$
$$=\frac{4(b_6+b_9)}{2}=\frac{4}{2}\times\left\{(a_6+3)+\left(a_9+\frac{9}{2}\right)\right\}$$
$$=2\times\left(2a+13d+\frac{15}{2}\right)=0$$

즉, $2a+13d+\frac{15}{2}=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=6$, $d=-\frac{3}{2}$이므로

$$a_n = -\frac{3}{2}n+\frac{15}{2}$$

$S_9=0$, $b_{10}=a_{10}+5=-\frac{15}{2}+5=-\frac{5}{2}$

$n \geq 6$일 때, 수열 $\{b_n\}$은 $b_{n+1}-b_n=d+\frac{1}{2}=-1$을 만족시키므로

$$S_n = S_9+(b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_n)$$
$$=0+\frac{(n-9)\{-5+(n-10)(-1)\}}{2}$$
$$=-\frac{(n-5)(n-9)}{2} \quad (n \geq 10)$$

$S_n \leq -70$을 만족시키는 n의 값의 범위는 $n \geq 19$이므로

자연수 n의 최솟값은 19

[참고]

$$b_n = \begin{cases} 6-2n & (n \leq 5) \\ \frac{15}{2}-n & (n \geq 6) \end{cases}$$

$$S_n = \begin{cases} n(5-n) & (n \leq 5) \\ -\frac{1}{2}(n-5)(n-9) & (n \geq 6) \end{cases}$$

이므로 $n \leq 9$일 때, $S_n \geq 0$

56) 169

$0 \leq x < 2^{n+1}$일 때, $0 \leq \frac{\pi}{2^n}x < 2\pi$이므로

부등식 $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \leq -\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{2}{3}\pi \leq \frac{\pi}{2^n}x \leq \frac{4}{3}\pi$, 즉 $\frac{2^{n+1}}{3} \leq x \leq \frac{2^{n+2}}{3}$

a_n은 $\frac{2^{n+1}}{3} \leq x \leq \frac{2^{n+2}}{3}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수이고, $\frac{2^{n+2}}{3}$은 자연수가 아니므로

$\sum_{n=1}^{7} a_n$은 $\frac{2^2}{3} \leq x \leq \frac{2^9}{3}$인 자연수의 개수와 같다.

$\frac{2^2}{3}=1.333\cdots$, $\frac{2^9}{3}=170.666\cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{7} a_n = 170-1=169$

[참고]

$n=1$일 때, $\frac{2^2}{3} \leq x \leq \frac{2^3}{3}$인 자연수 x는 2이므로 $a_1=1$

$n=2$일 때, $\frac{2^3}{3} \leq x \leq \frac{2^4}{3}$인 자연수 x는 3, 4, 5이므로 $a_2=3$

$n=3$일 때, $\frac{2^4}{3} \leq x \leq \frac{2^5}{3}$인 자연수 x는 6, 7, 8, 9, 10이므로 $a_3=5$

$n=4$일 때, $\frac{2^5}{3} \leq x \leq \frac{2^6}{3}$인 자연수 x는 11, 12, 13, ⋯, 21이므로 $a_4=11$

$n=5$일 때, $\frac{2^6}{3} \leq x \leq \frac{2^7}{3}$인 자연수 x는 22, 23, 24, ⋯, 42이므로 $a_5=21$

$n=6$일 때, $\frac{2^7}{3} \leq x \leq \frac{2^8}{3}$인 자연수 x는 43, 44, 45, ⋯, 85이므로 $a_6=43$

$n=7$일 때, $\frac{2^8}{3} \leq x \leq \frac{2^9}{3}$인 자연수 x는 86, 87, 88, ⋯, 170이므로 $a_7=85$

57) ①

(가),(나)에서 $a_{2n+1}+a_{2n+2}=2a_{n+1}$

$S_{2n+2}-a_1-a_2=2(S_{n+1}-a_1)$

즉 $S_{2n+2}=2S_{n+1}+1$

$S_2=1+2=3$, $S_4=2S_2+1=7$,

$S_8=2S_4+1=15$, $\therefore$ $S_{16}=2S_8+1=31$

58) 10

등차수열의 합에서

$$\log_2 c_1+\cdots+\log_2 c_m = m\times\frac{a+b}{2}=\frac{m}{2}$$

$$\log_2(c_1\times\cdots\times c_m)=\log_2 32=5=\frac{m}{2}, \quad \therefore\ m=10$$

59) 282

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$=(n^2+cn)-(n-1)^2-c(n-1)$$
$$=2n-1+c$$

수열 $\{a_n\}$을 30번째항까지 나열하면

$1+c$, $3+c$, $5+c$, ⋯, $55+c$, $57+c$, $59+c$

따라서 b_{20}은 $57+c$ 또는 $59+c$이므로

$57+c=199$, $59+c=199$

$c=142$ 또는 140, $\therefore$ $142+140=282$

60) 9

모든 자연수 n에 대하여

$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$

이 성립하고

$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times 3^{n-1}$ ……㉠

이 성립한다.

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2+a_3+a_4=13$

이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$

$a_1r(1+r+r^2)=13$ ……㉡

또, ㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_3+a_4+a_5=13\times 3=39$

이므로

$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$

$a_1r^2(1+r+r^2)=39$ ……㉢

㉢÷㉡을 하면

$$\frac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\frac{39}{13}$$

에서 $r=3$

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$a_1 \times 3 \times (1+3+9) = 13$

에서 $a_1 = \frac{1}{3}$

따라서 $a_4 = a_1 r^3 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9$

61) ②

(ⅰ) $a_1 \le a_2$일 때,

$a_3 = 2a_1 + a_2 = 2$ …… ㉠

이므로

$a_2 > 0$

① $a_1 \ge 0$일 때

$a_2 \le a_3$이므로

$a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$

$a_3 \le a_4$이므로

$a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$

$a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로

$6a_2 + 10 = 19$

$a_2 = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$2a_1 + \frac{3}{2} = 2$

$a_1 = \frac{1}{4}$

② $a_1 < 0$일 때

$a_2 > a_3$이므로

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + 2$

$a_3 \le a_4$이므로

$a_5 = 2a_3 + a_4 = a_2 + 6$

$a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 3a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로

$3a_2 + 10 = 19$

$a_2 = 3$

$a_2 = 3$을 ㉠에 대입하면

$2a_1 + 3 = 2$

$a_1 = -\frac{1}{2}$

(ⅱ) $a_1 > a_2$일 때

$a_3 = a_1 + a_2 = 2$ …… ㉡

이므로

$a_1 > 0$

$a_2 \le a_3$이므로

$a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$

① $a_2 \ge 0$일 때

$a_3 \le a_4$이므로

$a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$

$a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로

$6a_2 + 10 = 19$

$a_2 = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{3}{2}$을 ㉡에 대입하면

$a_1 + \frac{3}{2} = 2$

$a_1 = \frac{1}{2}$

이때, $a_1 < a_2$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_1의 값은 존재하지 않는다.

② $a_2 < 0$일 때

$a_3 > a_4$이므로

$a_5 = a_3 + a_4 = 2a_2 + 4$

$a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 8$

이때, $a_6 = 19$이므로

$6a_2 + 8 = 19$

$a_2 = \frac{11}{6}$

이때, $a_2 > 0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_2와 a_1의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_1 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\frac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은

$\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

62) ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$a_5 = 5$이므로 $a_3 = 5-2d$, $a_4 = 5-d$, $a_6 = 5+d$

$a_7 = 5+2d$

그러므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{7} |2a_k - 10| &= |2a_3 - 10| + |2a_4 - 10| + |2a_5 - 10| \\ &\quad + |2a_6 - 10| + |2a_7 - 10| \\ &= |-4d| + |-2d| + 0 + |2d| + |4d| \\ &= 12d = 20\end{aligned}$$

따라서 $d = \frac{5}{3}$이므로 $a_6 = a_5 + d = \frac{20}{3}$

63) ⑤

(i) $n=1$; $S_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $\therefore\ \frac{1}{a_1} = 2$

(ii) $n \ge 2$; $\frac{S_n}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n}{(n+1)!}$

$S_n = -\frac{n}{n+1}$

$n=2$이면 $a_2 = S_2 - a_1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{6}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{6}{7} = \frac{8}{7}$

$n \ge 3$이면

$a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{a_n} = -n(n+1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} &= \frac{8}{7} - \sum_{k=3}^{n} k(k+1) \\ &= \frac{8}{7} + 2 + 6 - \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\ &= \frac{64}{7} - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\ &= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7}\end{aligned}$$

$\therefore\ f(n) = n$, $g(n) = \frac{1}{n(n+1)}$, $h(k) = k^2$

$f(5) \times g(3) \times h(6) = 5 \times \frac{1}{12} \times 36 = 15$

64) ④

(ii) $n = m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$

이다. $n = m+1$일 때

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k$

$=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$\quad+\{2^{2(m+1)}-1\}\times 2^{(m+1)m}+m\times 2^{-(m+1)}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$\qquad+(2^{2m+2}-1)\times 2^{m(m+1)}+m\times 2^{-m-1}$

$=2^{m(m+1)}\times 2^{2m+2}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$

$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

즉, $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

65) ②

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1}=1$, (우변)$=\frac{2!}{2^1}=1$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}\le\frac{(2m)!}{2^m}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}+\frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}+\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$

$$\le\frac{(2m)!}{2^m}+\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$

$$=\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{(2m+1)(m+1)}+\frac{1}{(m+1)!}\right\}$$

$$<\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$p=1$, $f(m)=(2m+2)!$, $g(m)=(2m+1)(m+1)$

$\therefore\ p+\frac{f(2)}{g(1)}=1+\frac{6!}{9\times5}=1+16=17$

66) ⑤

모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$a_n:\sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$a_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3a_n$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{3}$

이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times3$

$\quad=3n-2$

따라서, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$A_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$

$\quad=\frac{1}{2}\times a_{n+1}\times\sqrt{3a_n}$

$\quad=\frac{1}{2}\times(\boxed{3n+1})\times\sqrt{9n-6}$

이다.

따라서, $p=3$, $f(n)=3n+1$이므로

$p+f(8)=3+25=28$

67) ③

(i) $n=1$일 때 (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_m\mathrm{C}_k}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}+\boxed{\frac{(-1)^m}{m+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}({}_m\mathrm{C}_k+{}_m\mathrm{C}_{k-1})}{k}+\boxed{\frac{(-1)^m}{m+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\frac{\boxed{m!}}{(m-k+1)!(k-1)!}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{\boxed{m+1}}\times\frac{(m+1)!}{(m-k+1)!k!}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\frac{1}{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$f(m)=\frac{(-1)^m}{m+1}$, $g(m)=m!$, $h(m)=m+1$이므로

$\frac{g(3)+h(3)}{f(4)}=50$

68) ③

집합 A_k의 원소의 개수는 k 이하의 자연수 중에서 2개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

$\boxed{(가)}={}_k\mathrm{C}_2=\frac{k(k-1)}{2}$

집합 $\{(1, k+1), (2, k+1), \cdots, (k, k+1)\}$에서

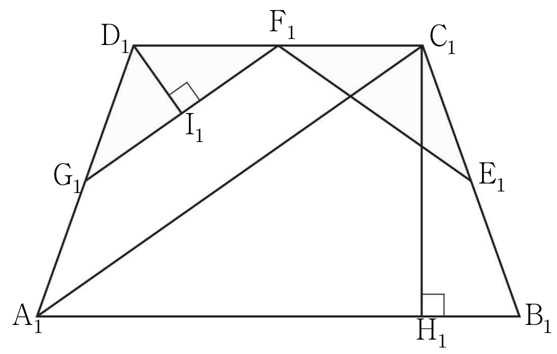
$k+1$이 k개이므로 그 합은 $k(k+1)$

즉, $\boxed{(나)}=k(k+1)$

그러므로 $f(k)=\frac{k(k-1)}{2}$, $g(k)=k(k+1)$

따라서 $f(10)+g(9)=45+90=135$

69) ⑤



점 C_1에서 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 직각삼각형 $\mathrm{C}_1\mathrm{H}_1\mathrm{B}_1$에서 $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{H}_1}=2$이므로

$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{H}_1}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$이고,

직각삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{H}_1\mathrm{C}_1$에서

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}$

삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$과 삼각형 $\mathrm{G}_1\mathrm{F}_1\mathrm{D}_1$은 서로 닮음이고

닮음비가 $2:1$이므로 $\overline{\mathrm{G}_1\mathrm{F}_1}=2\sqrt{6}$

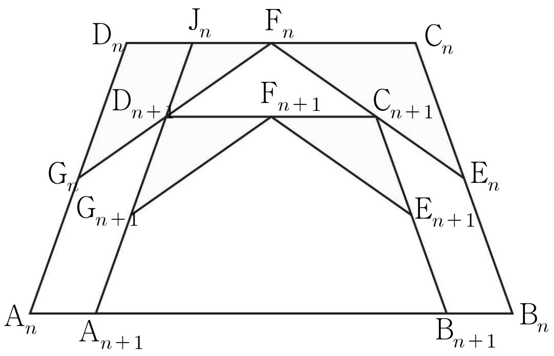
점 D_1에서 선분 $\mathrm{G}_1\mathrm{F}_1$에 내린

수선의 발을 I_1이라 하면 직각삼각형 $\mathrm{D}_1\mathrm{I}_1\mathrm{F}_1$에서

$\overline{\mathrm{D}_1\mathrm{I}_1}=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$

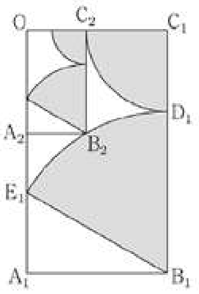
$S_1=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=6\sqrt{2}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



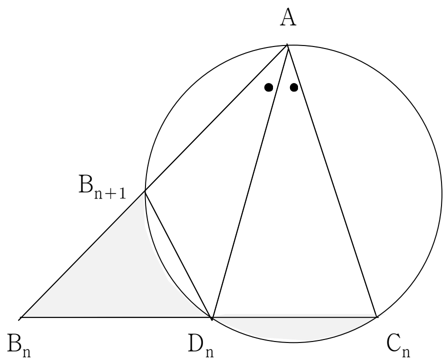
사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$에서 $\overline{A_nB_n} : \overline{A_nD_n} = 5:3$
이고, 사다리꼴 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에서
$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} : \overline{A_{n+1}D_{n+1}} = 5:3$이므로
두 선분 A_nD_n과 $A_{n+1}D_{n+1}$이 서로 평행하다.
직선 $A_{n+1}D_{n+1}$이 선분 C_nD_n과 만나는 점을
J_n이라 하자.
두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}F_nJ_n$은 서로 닮음이고,
$\angle D_nF_nG_n = \angle C_{n+1}D_{n+1}F_n$이므로 두 삼각형
$G_nF_nD_n$, $D_{n+1}C_{n+1}F_n$은 서로 닮음이다.
$\overline{D_nC_n} = a_n$, $\overline{D_{n+1}C_{n+1}} = a_{n+1}$이라 하면
이등변삼각형 $D_{n+1}C_{n+1}F_n$에서
$\overline{D_{n+1}C_{n+1}} : \overline{D_{n+1}F_n} = 2\sqrt{6}:3$이므로
$\overline{D_{n+1}F_n} = \dfrac{3}{2\sqrt{6}}\overline{D_{n+1}C_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a_{n+1}$이고,
이등변삼각형 $D_{n+1}F_nJ_n$에서
$\overline{D_{n+1}F_n} : \overline{D_{n+1}J_n} = 2\sqrt{6}:3$이므로
$\overline{D_{n+1}J_n} = \dfrac{3}{2\sqrt{6}}\overline{D_{n+1}F_n} = \dfrac{3}{8}a_{n+1}$
$\overline{A_{n+1}J_n} = \overline{A_{n+1}D_{n+1}} + \overline{D_{n+1}J_n}$이므로
$a_n = \overline{A_{n+1}J_n} = a_{n+1} + \dfrac{3}{8}a_{n+1} = \dfrac{11}{8}a_{n+1}$
$a_{n+1} = \dfrac{8}{11}a_n$이므로 두 사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$과
$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $11:8$이며
넓이의 비는 $121:64$이다.
따라서 S_n은 첫째항이 $6\sqrt{2}$이고 공비가 $\dfrac{64}{121}$인
등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{6\sqrt{2}}{1-\dfrac{64}{121}} = \dfrac{242}{19}\sqrt{2}$

70) ⑤



$\overline{C_1D_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{B_1D_1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
$\angle E_1B_1D_1 = \dfrac{\pi}{3}$
$S_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\dfrac{\pi}{3}$
$= \dfrac{11}{36}\pi$
$\overline{OC_2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ 이므로
$r = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{11}{36}\pi}{1-\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

71) ①
그림 R_n에서 $\angle B_{n+1}AD_n = \angle D_nAC_n$이므로 $\overset{\frown}{B_{n+1}D_n} = \overset{\frown}{D_nC_n}$ 이다
따라서, $\overline{B_{n+1}D_n} = \overline{D_nC_n}$ 이므로 두 선분 B_nB_{n+1}, B_nD_n과 호 $B_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 부분과 선분 C_nD_n과 호 C_nD_n으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$의 넓이와 같다.



R_n

그림 R_1의 삼각형 AB_1C_1에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{B_1C_1}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times3\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3} = 7$
즉, $\overline{B_1C_1} = \sqrt{7}$
또한, $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점이 D_1이므로
$\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = \overline{B_1D_1} : \overline{D_1C_1} = 3:2$
따라서,
$\overline{B_1D_1} = \dfrac{3\sqrt{7}}{5}$, $\overline{D_1C_1} = \dfrac{2\sqrt{7}}{5}$
또한, 삼각형 AD_1C_1의 외접원의 중심을 O라 하면 $\angle D_1OC_1 = \angle B_2OD_1 = \dfrac{\pi}{3}$
이므로 두 삼각형 D_1OC_1, B_2OD_1은 모두 정삼각형이고 $\angle B_2D_1C_1 = \dfrac{2}{3}\pi$이다.
따라서, $\angle B_2D_1B_1 = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로
$S_1 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{7}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{5}\times\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{21\sqrt{3}}{50}$
또한, 삼각형 $B_1D_1B_2$ 에서 코사인법칙에 의하여
$$\overline{B_1B_2}^2 = \left(\dfrac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 2\times\dfrac{3\sqrt{7}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{5}\times\cos\dfrac{\pi}{3}$$
$$= \dfrac{91}{25} - \dfrac{42}{25} = \dfrac{49}{25}$$
이므로
$\overline{B_1B_2} = \dfrac{7}{5}$
따라서, $\overline{AB_2} = 3 - \dfrac{7}{5} = \dfrac{8}{5}$ 이므로
$\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 3 : \dfrac{8}{5} = 1 : \dfrac{8}{15}$
이때, 넓이의 비는 $1 : \dfrac{64}{225}$ 이므로
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\dfrac{64}{225}} = \dfrac{27\sqrt{3}}{46}$

72) ②

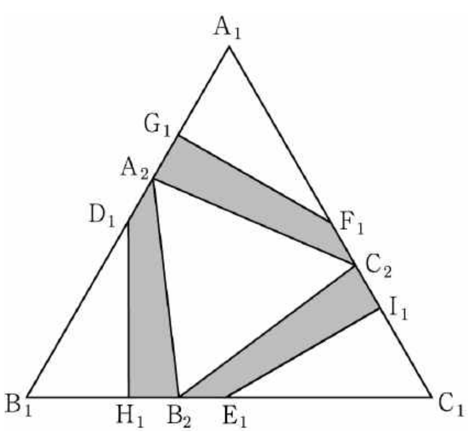


그림 R_1에서 사각형 $A_2C_2F_1G_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times4\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$

세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$의 넓이는 모두 같으므로 $S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

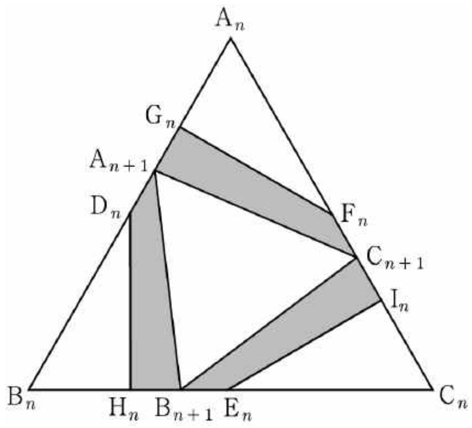


그림 R_n에서 세 사각형 $A_{n+1}C_{n+1}F_nG_n$, $B_{n+1}A_{n+1}D_nH_n$, $C_{n+1}B_{n+1}E_nI_n$의 넓이의 합을 T_n이라 하자.

삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$이 닮음이므로

정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 l_n이라 하면

$\overline{A_nC_{n+1}}=\frac{5}{8}l_n$, $\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{3}{8}l_n$

삼각형 $A_nA_{n+1}C_{n+1}$에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{A_{n+1}C_{n+1}}$의 길이 l_{n+1}을 구하면

$$(l_{n+1})^2=\left(\frac{5}{8}l_n\right)^2+\left(\frac{3}{8}l_n\right)^2-2\times\frac{5}{8}l_n\times\frac{3}{8}l_n\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{19}{64}(l_n)^2$$

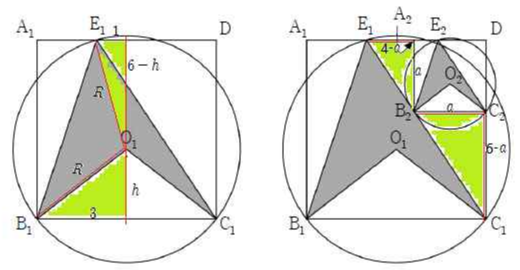
$l_{n+1}=\frac{\sqrt{19}}{8}l_n$이고 $l_n : l_{n+1}=1 : \frac{\sqrt{19}}{8}$

$T_n : T_{n+1}=1 : \frac{19}{64}$이고 $T_{n+1}=\frac{19}{64}T_n$

$\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$이고 공비가 $\frac{19}{64}$인 등비수열이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{19}{64}}=\frac{112\sqrt{3}}{15}$$

73) ②



$R^2=9+h^2=1+(6-h)^2$, $h=\frac{7}{3}$

$$S_1=\frac{1}{2}\times(6-h)\times6=11$$

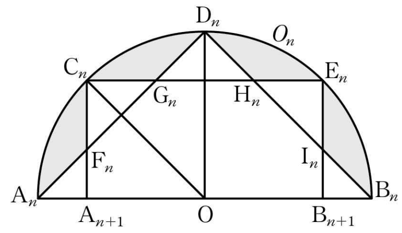
$\frac{a}{4-a}=\frac{6-a}{a}$이므로 $a=\frac{12}{5}$,

닮음비는 $r=\frac{12/5}{6}=\frac{2}{5}$

$$\therefore\ S=\frac{11}{1-(2/5)^2}=\frac{275}{21}$$

74) ②

선분 A_nB_n의 중점을 O, 선분 A_nD_n이 두 선분 C_nA_{n+1}, C_nE_n과 만나는 점을 각각 F_n, G_n이라 하고, 선분 B_nD_n이 두 선분 C_nE_n, E_nB_{n+1}과 만나는 점을 각각 H_n, I_n이라 하자.



반원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, n번째 색칠되는 모양의 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

두 점 C_n, D_n이 호 A_nB_n의 4등분점이므로

$\angle C_nOA_{n+1}=45°$, $\angle A_nOD_n=90°$, $\overline{D_nA_n}=\overline{D_nB_n}$

$\angle C_nA_{n+1}O=90°$이므로 $\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$

삼각형 $D_nG_nH_n$은 $\overline{D_nG_n}=\overline{D_nH_n}$인 직각삼각형이고,

$$\overline{D_nG_n}^2=2\left(\overline{OD_n}-\overline{A_{n+1}C_n}\right)^2=2\left(r_n-\frac{r_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=(\sqrt{2}-1)^2r_n^2$$

$\overline{D_nG_n}=(\sqrt{2}-1)r_n$

(삼각형 $D_nG_nH_n$의 넓이)

$=2\times$(삼각형 $A_nA_{n+1}F_n$의 넓이)

두 삼각형 $A_nA_{n+1}F_n$, $B_nB_{n+1}I_n$이 합동이므로

$a_n=$(반원 O_n의 넓이)$-$(사각형 $C_nA_{n+1}B_{n+1}E_n$의 넓이)$-2\times$(삼각형 $D_nG_nH_n$의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\pi r_n^2-\overline{A_{n+1}B_{n+1}}\times\overline{A_{n+1}C_n}-\overline{D_nG_n}^2$$

$$=\frac{1}{2}\pi r_n^2-\frac{2r_n}{\sqrt{2}}\times\frac{r_n}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)^2r_n^2$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_n^2$$

$r_{n+1}=\frac{1}{2}\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$이므로

$$a_{n+1}=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_{n+1}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_n^2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2\pi+8\sqrt{2}-16$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2\pi+8\sqrt{2}-16}{1-\frac{1}{2}}=4\pi+16\sqrt{2}-32$$

75) ③

$\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{AQ}=\overline{AP}\times\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AP}\,\overline{AQ}\sin\theta=\frac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}$$

$l(\theta)=2\sin\theta$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}=\frac{1}{4}$$

76) 15

직각삼각형 BMH에서

$\overline{MB}=1$

$\sin\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{MB}}$에서

$\overline{MH}=\overline{MB}\times\sin\theta=\sin\theta$

삼각형 DMC에서

$\overline{MD}=\overline{MH}=\sin\theta$,

$\overline{MC}=1$,

$\angle DMC=\pi-\angle DMB$

$=\pi-\angle AMB$

$$=\pi-\frac{\pi-\theta}{2}$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$$
이므로

$\triangle \mathrm{DMC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MD}}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\sin(\angle\mathrm{DMC})$
$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$$
삼각형 HMC에서

$\overline{\mathrm{MH}}=\sin\theta$,

$\overline{\mathrm{MC}}=1$,

$\angle\mathrm{HMC}=\pi-\angle\mathrm{HMB}$
$$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+\theta$$
이므로

$\triangle\mathrm{HMC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MH}}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\sin(\angle\mathrm{HMC})$
$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$
이때

$f(\theta)-g(\theta)$

$=\triangle\mathrm{DMC}-\triangle\mathrm{HMC}$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$=\dfrac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2}$

이므로

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2\theta^3}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta\left(\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\left\{\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2-\frac{1}{4}\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\right\}$

$\times\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta}$

$=\frac{1}{2}\times1\times\left(1^2-\frac{1}{4}\times1^2\right)\times\frac{1}{1+1}$

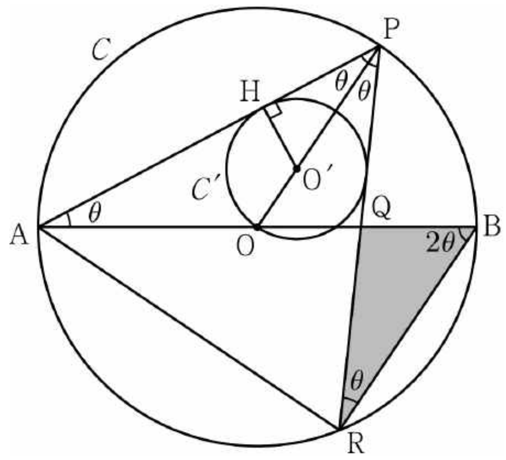
$=\frac{3}{16}$

따라서 $a=\frac{3}{16}$이므로

$80a=80\times\frac{3}{16}=15$

77) 120

원 C'의 중심을 O′, 원 C'과 선분 PA가 만나는 점을 H라 하자.



삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{OPA}=\theta$

$r(\theta)=\overline{\mathrm{O'O}}=\overline{\mathrm{O'H}}$이므로 $\overline{\mathrm{PO'}}=2-r(\theta)$

삼각형 O′PH에서 $\angle\mathrm{PHO'}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{O'H}}}{\overline{\mathrm{PO'}}}=\dfrac{r(\theta)}{2-r(\theta)}$

$r(\theta)=\dfrac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$\angle\mathrm{PRB}$는 호 BP의 원주각이므로 $\angle\mathrm{PRB}=\theta$

$\angle\mathrm{RBA}$는 호 AR의 원주각이므로 $\angle\mathrm{RBA}=2\theta$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 삼각형 ARB는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{RB}}=4\cos2\theta$이다.

삼각형 QRB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{RB}}}{\sin(\angle\mathrm{BQR})}=\dfrac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\sin(\angle\mathrm{RBQ})}$

$\dfrac{4\cos2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\sin2\theta}$, $\overline{\mathrm{RQ}}=\dfrac{4\sin2\theta\cos2\theta}{\sin3\theta}$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\overline{\mathrm{RB}}\times\sin\theta$

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{r(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\dfrac{8\sin\theta\sin2\theta(\cos2\theta)^2}{\sin3\theta}}{\dfrac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

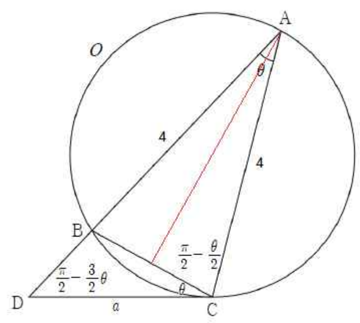
$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{4\sin2\theta(\cos2\theta)^2(1+\sin\theta)}{\sin3\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\left\{\dfrac{4\sin2\theta}{\sin3\theta}\times(\cos2\theta)^2(1+\sin\theta)\right\}$

$=4\times\frac{2}{3}\times1^2\times(1+0)=\frac{8}{3}$

따라서 $a=\frac{8}{3}$이므로 $45a=120$

78) 8



이등변삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}=8\sin\frac{\theta}{2}$

삼각형 ACD에 사인법칙에 의하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}=\dfrac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{4\sin\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\dfrac{16\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}=8$

79) 23

중심각과 원주각의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{AOP} = \theta$이므로

$\angle \mathrm{ABP} = \dfrac{\theta}{2}$

삼각형 OBR에서

$\angle \mathrm{BRO} = \pi - \left(2\theta + \dfrac{\theta}{2}\right) = \pi - \dfrac{5\theta}{2}$ 이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\left(\pi - \frac{5\theta}{2}\right)} = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$\dfrac{1}{\sin\frac{5\theta}{2}} = \dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 에서 $\overline{\mathrm{OR}} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}$

(i) 삼각형 POR에서

$\angle \mathrm{POR} = \pi - 3\theta$이므로

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OR}} \times \sin(\pi - 3\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}} \times \sin 3\theta$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 3\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$$

(ii) $g(\theta)$는 부채꼴 QOB의 넓이에서 삼각형 OBR의 넓이를 뺀 것이므로

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta$$

$$- \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OB}} \times \overline{\mathrm{OR}} \times \sin 2\theta$$

$$g(\theta) = \theta$$

$$- \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}} \times \sin 2\theta$$

$$g(\theta) = \theta - \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$$

(iii) 이등변삼각형 POQ에서

점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$$\overline{\mathrm{OH'}} = \overline{\mathrm{OP}} \times \cos\left(\frac{\pi - 3\theta}{2}\right)$$

$$= 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{3\theta}{2}$$

두 삼각형 OQH′, RQH가 서로 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OH'}} : \overline{\mathrm{RH}} = \overline{\mathrm{OQ}} : \overline{\mathrm{RQ}}$$

$$= 1 : (1 - \overline{\mathrm{OR}})$$

$$\overline{\mathrm{RH}} = \overline{\mathrm{OH'}} \times (1 - \overline{\mathrm{OR}})$$

$$= \sin\frac{3\theta}{2} \times \left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)$$

(i), (ii), (iii)에서

$f(\theta) + g(\theta)$

$= \theta + \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}} \times (\sin 3\theta - \sin 2\theta)$이고,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}}{\frac{\sin\frac{5\theta}{2}}{\theta}}$$

$= \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{5}$ 이므로

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta + \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}} \times (\sin 3\theta - \sin 2\theta)}{\sin\dfrac{3\theta}{2} \times \left(1 - \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1 + \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}} \times \left(\dfrac{\sin 3\theta}{\theta} - \dfrac{\sin 2\theta}{\theta}\right)}{\dfrac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\theta} \times \left(1 - \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

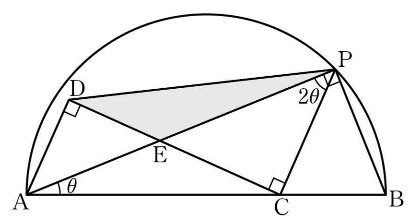
$$= \frac{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times (3 - 2)}{\frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{11}{10}}{\frac{6}{5}} = \frac{11}{12}$$

따라서

$p + q = 12 + 11 = 23$

80) ④



두 직각삼각형 PCE와 ADE는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{EP}} : \overline{\mathrm{EA}} = \overline{\mathrm{EC}} : \overline{\mathrm{ED}}$ 에서 $\overline{\mathrm{EP}} \times \overline{\mathrm{ED}} = \overline{\mathrm{EA}} \times \overline{\mathrm{EC}}$

$\angle \mathrm{DEP} = \dfrac{\pi}{2} + 2\theta$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{EP}} \times \overline{\mathrm{ED}} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{EA}} \times \overline{\mathrm{EC}} \times \cos 2\theta$$

직각삼각형 APB에서 $\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\theta$

삼각형 ACP에서 $\angle \mathrm{ACP} = \pi - 3\theta$ 이므로

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 2\theta} = \dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin(\pi - 3\theta)}$ 에서

$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{2\sin 2\theta\cos\theta}{\sin 3\theta}$$

삼각형 ACE에서 $\angle \mathrm{ACE} = \dfrac{\pi}{2} - 3\theta$,

$\angle \mathrm{CEA} = \dfrac{\pi}{2} + 2\theta$ 이고 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\theta} = \dfrac{\overline{\mathrm{EA}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right)} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{EC}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)} = \frac{2\sin 2\theta\sin\theta\cos\theta}{\sin 3\theta\cos 2\theta}$$

$$\overline{\mathrm{EA}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)} = \frac{2\sin 2\theta\cos\theta\cos 3\theta}{\sin 3\theta\cos 2\theta}$$

$$S(\theta) = \frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos 3\theta}{\sin^2 3\theta\cos 2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos 3\theta}{\theta\sin^2 3\theta\cos 2\theta}$$
$$=\frac{8}{9}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\left(\frac{\cos^2\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta}\right)$$
$$=\frac{8}{9}$$

81) ③

$\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$ 이므로 삼각형 OBC 는 직각이등변삼각형이고 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$ 이다.

$\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$라 하면 두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이 S_1, S_2는 각각

$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$

$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$

주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로

$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$ 이므로 $\beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha$ …… ㉠

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 에서 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$

$\sin\alpha>0$ 이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$

따라서 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB 의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(\overline{OA})^2+(\overline{OB})^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\alpha}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}$

$=4\sqrt{2}$

82) ②

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의해

$\frac{10}{\sin C}=2\times 3\sqrt{5}$, $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC 는 예각삼각형이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2}{3}$

$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$ 에서 $\frac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}=\frac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab$, $3(a-b)^2=0$ 이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+a^2-2a^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}a^2$,

$100=\frac{2}{3}a^2$, $a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

83) 63

$\angle BAD$ 와 $\angle BCD$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

$\angle BAD=\angle BCD=\theta$, $\overline{AD}=a$, $\overline{CB}=b$라 하면

삼각형 ABD 의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$

삼각형 CBD의 넓이 S_2는

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times b\times 4\times\sin\theta=2b\sin\theta$

$S_1:S_2=9:5$ 이므로 $3a:2b=9:5$

$a:b=6:5$ 이므로 $a=6k$, $b=5k\,(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2=6^2+(5k)^2-2\times 6\times 5k\times\cos\alpha$ …… ㉠

$\angle ABC$ 와 $\angle ADC$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로

$\angle ABC=\angle ADC=\alpha$

삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(6k)^2+4^2-2\times 6k\times 4\times\cos\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$

$k>0$ 이므로 $k=1$ 이고 $a=6k=6$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ADC 의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

84) ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$R^2\pi=\frac{49}{3}\pi$, $R=\frac{7}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$, $\overline{BC}=2\times\frac{7}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2=a^2+3^2-2\times a\times 3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$a^2-3a-40=0$, $(a-8)(a+5)=0$

$a>0$이므로 $a=8$

$\overline{AC}=8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

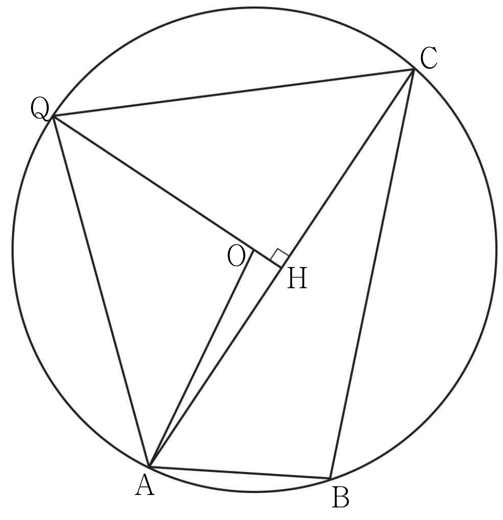
$\cos(\angle CBA)=\frac{3^2+7^2-8^2}{2\times 3\times 7}=-\frac{1}{7}$

이므로 $\frac{\pi}{2}<\angle CBA<\pi$가 되어

삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



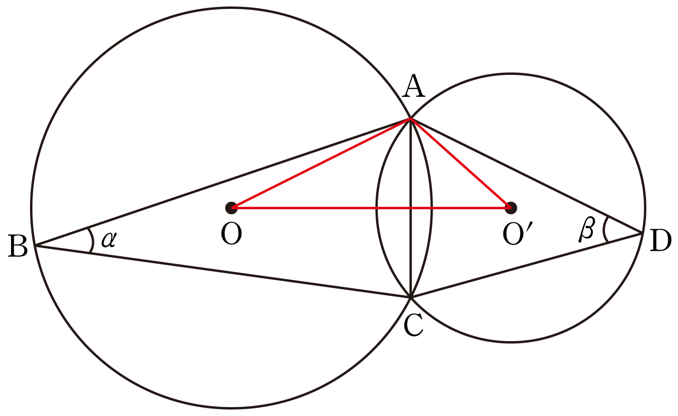
직각삼각형 AHO에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{QH}}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 8\times\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$

85) 26



$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}$ 이므로

사인법칙에 의하여 두 원의 반지름의 길이의 비는 3 : 2이다.

각각의 반지름의 길이를

$3r$, $2r$라 하면 삼각형 AOO′에서 코사인법칙에서

$$1=9r^2+4r^2-12r^2\cos(\pi-(\alpha+\beta))=17r^2$$

$$r^2=\frac{1}{17},\ \therefore\ S=9r^2\pi=\frac{9}{17}\pi,\ p+q=26$$

86) ①

$\angle\mathrm{DCG}=\theta\ (0<\theta<\pi)$, $\angle\mathrm{BCE}=\pi-\theta$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$ 이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{25}{36}$

코사인법칙에 의하여

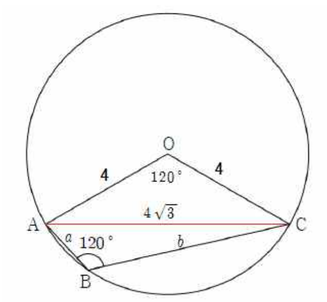
$$\overline{\mathrm{DG}}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\theta=25-24\cos\theta$$

$$\overline{\mathrm{BE}}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos(\pi-\theta)$$
$$=25-24\cos(\pi-\theta)=25+24\cos\theta$$

따라서 $\overline{\mathrm{DG}}\times\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{25^2-24^2\times\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{25^2-24^2\times\frac{25}{36}}$$
$$=5\sqrt{25-16}=15$$

87) ⑤



사인법칙에서 $\overline{\mathrm{AC}}=8\times\sin120^\circ=4\sqrt{3}$

코사인법칙에서

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ$$
$$=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab$$
$$ab=(2\sqrt{15})^2-(4\sqrt{3})^2=12$$

구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}(4\times4+ab)\sin120^\circ=7\sqrt{3}$$

88) ③

사인법칙에 의하여

$$\sin C=\frac{\overline{\mathrm{BD}}\times\sin(\angle\mathrm{DBC})}{\overline{\mathrm{DC}}},$$

$$\sin A=\frac{\overline{\mathrm{BD}}\times\sin(\angle\mathrm{ABD})}{\overline{\mathrm{AD}}}$$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DC}}=5:3$이고

$\sin(\angle\mathrm{ABD}):\sin(\angle\mathrm{DBC})=5:2$ 이므로

$$\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$$

89) 41

삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=6$, $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$

이므로 $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면 코사인법칙에 의해

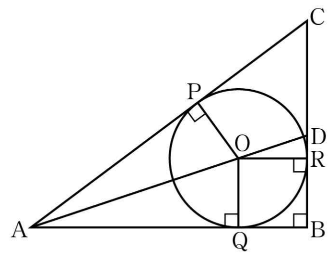
$$\cos\theta=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\frac{19}{24}$$

따라서 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의해

$$k^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$$
$$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\theta$$
$$=36+100-120\times\frac{19}{24}$$
$$=136-5\times19$$
$$=41$$

90) ①



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}=3$ 이므로 $\overline{\mathrm{DR}}=\overline{\mathrm{DB}}-\overline{\mathrm{RB}}=1$

$\overline{\mathrm{DO}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이므로

$\sin(\angle\mathrm{DOR})=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 1:3이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=3\times\overline{\mathrm{OR}}=9$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AQ}}=9$, $\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DAB}$

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}$, $12:(9+\overline{\mathrm{CP}})=4:(\overline{\mathrm{CR}}-1)$

$9+\overline{\mathrm{CP}}=3(\overline{\mathrm{CR}}-1)$

이때 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CR}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CR}}=6$, 즉 $\overline{\mathrm{CD}}=5$

직선 OR와 직선 AB가 평행하므로

$\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{DOR}$, 즉 $\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DOR}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=5\sqrt{10}$

$R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$ 이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\frac{125}{2}\pi$이다.

91) ①

주어진 원이 삼각형 BCD의 외접원이고 반지름의 길이가 r이므로 사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}=2r\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$, $\overline{\mathrm{BC}}=2r\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\,r$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}r)^2$

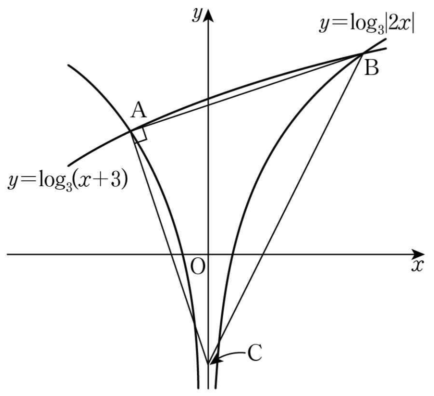
$=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\times\cos\frac{\pi}{3}$

이 식을 정리하면 $5r^2+2\sqrt{6}r-6=0$

그러므로 $r=\frac{-\sqrt{6}\pm6}{5}$

따라서 $r>0$이므로 $r=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

92) ⑤



$x<0$일 때의 교점 A의 x좌표는 방정식
$\log_3(-2x)=\log_3(x+3)$의 근이므로
$-2x=x+3,\ 3x=-3,\ x=-1$
따라서 점 A의 좌표는 $A(-1, \log_3 2)$
$x>0$일 때의 교점 B의 x좌표는 방정식
$\log_3 2x=\log_3(x+3)$의 근이므로
$2x=x+3,\ x=3$
따라서 점 B의 좌표는 $B(3, \log_3 6)$이다.
두 점 $A(-1, \log_3 2)$, $B(3, \log_3 6)$에 대하여
직선 AB의 기울기는

$\dfrac{\log_3 6-\log_3 2}{3-(-1)}=\dfrac{\log_3 \frac{6}{2}}{4}=\dfrac{1}{4}$ 이므로

점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선의 방정식은
$y-\log_3 2=-4(x+1)$
$y=-4x-4+\log_3 2$ …… ㉠
직선 ㉠이 y축과 만나는 점 C의 좌표는
$C(0, -4+\log_3 2)$이다. 이때
$\overline{AB}=\sqrt{4^2+(\log_3 6-\log_3 2)^2}=\sqrt{17}$
$\overline{AC}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$
직각삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면
$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\dfrac{17}{2}$

93) 40
닫힌구간 $\left[-\dfrac{\pi}{a}, \dfrac{2\pi}{a}\right]$에서 $0<a<\dfrac{4}{7}$이므로

$-\dfrac{\pi}{a}<-\dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{7\pi}{2}<\dfrac{2\pi}{a}$ 이다.

함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$의 그래프가 두 점
$A\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(\dfrac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지나므로

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\dfrac{a}{2}\pi\right)+b=-2\sin\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)+b=0$

$f\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)=2\sin\left(\dfrac{7a}{2}\pi\right)+b=0$

따라서 $\sin\left(\dfrac{7a}{2}\pi\right)=-\sin\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)$

$0<a<\dfrac{4}{7}$에서 $0<\dfrac{a}{2}\pi<\dfrac{2}{7}\pi,\ 0<\dfrac{7a}{2}\pi<2\pi$

이므로

$\dfrac{7a}{2}\pi=2\pi-\dfrac{a}{2}\pi$ 또는 $\dfrac{7a}{2}\pi=\pi+\dfrac{a}{2}\pi$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$

(ⅰ) $a=\dfrac{1}{2}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)+b$에서

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+b$

$=2\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+b$

$=-\sqrt{2}+b=0$

이므로 $b=\sqrt{2}$
이는 b는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=\dfrac{1}{3}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right)+b$에서

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+b$

$=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+b$

$=-1+b=0$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)=0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=1$이고

$30(a+b)=30\times\left(\dfrac{1}{3}+1\right)=40$

94) ⑤
$m=3^x$에서 $x=\log_3 m$이므로 $A_m(\log_3 m, m)$
$m=\log_2 x$에서 $x=2^m$이므로 $B_m(2^m, m)$
그러므로 $\overline{A_mB_m}=2^m-\log_3 m$
$\overline{A_mB_m}$이 자연수이기 위해서는 m과 2^m이 자연수이므로 $\log_3 m$이 음이 아닌 정수이다.
그러므로 $m=3^k$(단, k는 음이 아닌 정수이다.)
$m=3^0$일 때, $a_1=2^1-\log_3 1=2$
$m=3^1$일 때, $a_2=2^3-\log_3 3=7$
$m=3^2$일 때, $a_3=2^9-\log_3 9=510$
따라서 $a_3=510$
[보충 설명]
위의 풀이에서 $\overline{A_mB_m}$이 자연수이기 위해서는 $m=3^k$꼴임을 알 수 있다. 이제 m의 값이 3^{n-1}에서 3^n으로 증가하면 $2^m-\log_3 m$의 값도 증가함을 보이자.
모든 자연수 n에 대하여
$\left(2^{3^n}-n\right)-\left\{2^{3^{n-1}}-(n-1)\right\}=2^{3^n}-2^{3^{n-1}}-1$
$=2^{3^{n-1}}(2^3-1)-1$
$=7\times2^{3^{n-1}}-1$
$3^{n-1}\ge1$이므로 $2^{3^{n-1}}\ge2$이다.
그러므로 $7\times2^{3^{n-1}}-1>0$
따라서 $2^{3^{n-1}}-(n-1)<2^{3^n}-n$이 성립한다.

95) ③
$2\le n\le4$일 때, $n-5<0$이므로
$f(2)=0,\ f(3)=1,\ f(4)=0$
$n=5$일 때, $n-5=0$이므로 $f(5)=1$
$6\le n\le10$일 때, $n-5>0$이므로
$f(6)=2,\ f(7)=1,\ f(8)=2,\ f(9)=1,\ f(10)=2$
따라서
$\displaystyle\sum_{n=2}^{10}f(n)=0+1+0+1+2+1+2+1+2=10$

96) ③
정수 k에 대하여 $k<\log_3 f(n)<k+2$
밑 3이 1보다 크므로 $3^k<(n-3)^2+2<3^{k+2}$을
만족시키는 자연수 n의 개수가 $h(k)$이다.
(ⅰ) $k=0$인 경우
$1<(n-3)^2+2<9,\ -1<(n-3)^2<7$에서
$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 $h(0)=5$
(ⅱ) $k=3$인 경우
$27<(n-3)^2+2<243,\ 25<(n-3)^2<241$
에서 $n=9,\ 10,\ \cdots,\ 18$이므로 $h(3)=10$
따라서 $h(0)+h(3)=15$

97) ②
$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{k}\pi$라 하면
함수 $f(m)$의 주기가 k이므로
집합 A_k는 $A_k=\{f(1), f(2), \cdots, f(k)\}$이다.

ㄱ. $k=3$일 때, $f(1)=0$, $f(2)=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(3)=\sin\frac{2\times 2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$A_3=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (참)

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되려면 $f(m)=1$을 만족시키는 자연수 $m\,(m=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$가 존재해야 한다.

$\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi=1$에서 $\frac{2(m-1)}{k}\pi=\frac{\pi}{2}$

$m=1+\frac{k}{4}$이고 m이 자연수이므로

k는 4의 배수이어야 한다.

따라서 $k=12,\ 16,\ \cdots,\ 96$이며

그 개수는 22이다. (참)

ㄷ. 4 이상의 자연수 k에 대하여

(ⅰ) $k=4l$(l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l}\pi=\sin\frac{m-1}{2l}\pi$이므로

$m=1$일 때, $f(1)=\sin\frac{1-1}{2l}\pi=\sin 0=0$

$m=l+1$일 때,

$f(l+1)=\sin\frac{l+1-1}{2l}\pi=\sin\frac{\pi}{2}=1$

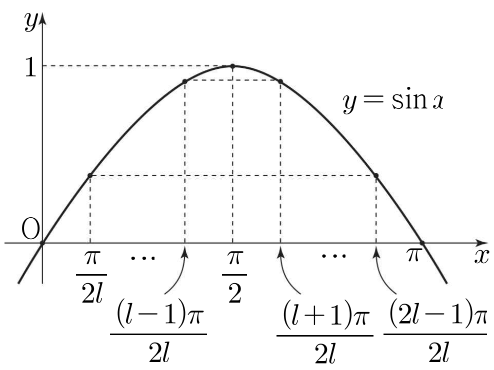
$m=2l+1$일 때,

$f(2l+1)=\sin\frac{2l+1-1}{2l}\pi=\sin\pi=0$

$m=\alpha\,(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l)$일 때,

$\pi-\frac{\alpha-1}{2l}\pi=\frac{(2l+2-\alpha)-1}{2l}\pi$

이므로 $\beta=2l+2-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는

$f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(l+1)$이고

그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중

음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는

$l+l+1=2l+1$

(ⅱ) $k=4l+1$(l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l+1}\pi$이므로

$m=1$일 때,

$f(1)=\sin\frac{2\times(1-1)}{4l+1}\pi=\sin 0=0$

$4l+1$ 이하의 서로 다른 두 자연수

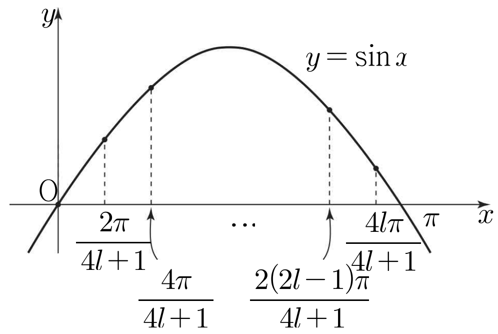
$r,\ s$에 대하여

$\frac{2(r-1)}{4l+1}\pi+\frac{2(s-1)}{4l+1}\pi=\frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi$

에서 $4l+1$은 홀수이고 $2(r+s-2)$는

짝수이므로

$\frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq\pi,\ \frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq 3\pi$이다.



따라서 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+1$

(ⅲ) $k=4l+2$(l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l+2}\pi=\sin\frac{m-1}{2l+1}\pi$

$m=1$일 때,

$f(1)=\sin\frac{1-1}{2l+1}\pi=\sin 0=0$

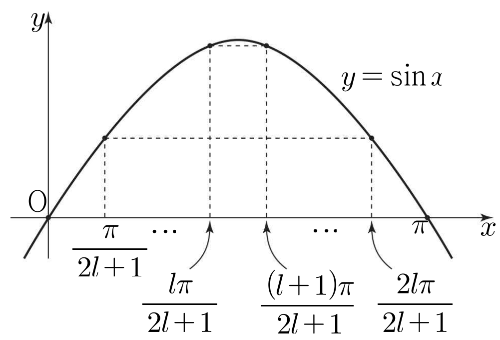
$m=2l+2$일 때,

$f(2l+2)=\sin\frac{2l+2-1}{2l+1}\pi=\sin\pi=0$

$m=\alpha\,(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l+1)$일 때,

$\pi-\frac{\alpha-1}{2l+1}\pi=\frac{(2l+3-\alpha)-1}{2l+1}\pi$

이므로 $\beta=2l+3-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는

$f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(l+1)$이고

그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중

음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는

$l+l+1=2l+1$

(ⅳ) $k=4l+3$(l은 자연수)인 경우

(ⅱ)와 같은 방법으로 구하면 집합 A_k의

원소의 개수는 $4l+3$이다.

$A_1=A_2=\{0\}$이고 (ⅰ) ~ (ⅳ)에 의하여

집합 A_k의 원소의 개수는

$$n(A_k)=\begin{cases}4l-3 & (k=4l-3)\\ 2l-1 & (k=4l-2)\\ 4l-1 & (k=4l-1)\\ 2l+1 & (k=4l)\end{cases}\quad(l\text{은 자연수})$$

$k=4l-3$인 경우 $4l-3=11$을 만족시키는

자연수 l은 존재하지 않는다.

$k=4l-2$인 경우 $2l-1=11$을 만족시키는

자연수 l은 6이므로 $k=22$

$k=4l-1$인 경우 $4l-1=11$을 만족시키는

자연수 l은 3이므로 $k=11$

$k=4l$인 경우 $2l+1=11$을 만족시키는

자연수 l은 5이므로 $k=20$

따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는

모든 k의 값의 합은 $22+11+20=53$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

98) 75

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로 점 A의 좌표는 $(k,\ k)$이고,

점 B의 좌표는 $(2k,\ k)$이다.

점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=-\log_a k$ … ㉠

점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$k=\log_a 2k$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_a 2k^2=0$에서

$2k^2=1$이므로 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는

두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$-\log_a\alpha=2\sqrt{2}$에서 $\alpha=a^{-2\sqrt{2}}$

$\log_a\beta=2\sqrt{2}$에서 $\beta=a^{2\sqrt{2}}$

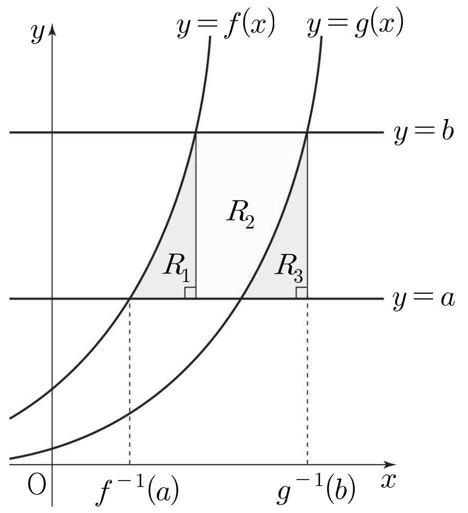
㉡에서 $a^k=2k$이므로 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\begin{aligned}d&=\beta-\alpha\\&=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}\\&=\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{2\sqrt{2}}-\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{-2\sqrt{2}}\\&=2^2-2^{-2}=\frac{15}{4}\end{aligned}$$

따라서 $20d=20\times\dfrac{15}{4}=75$

99) ①

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$의 그래프는
다음과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3
이라 하자.
함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$S_1=S_3$
조건 (가)에서
$S_1+S_2=S_3+S_2=2\times(b-a)=6$
$b-a=3$ ⋯⋯ ㉠
조건 (나)에서
$f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$ (p, q는 실수)라 하면
$2^p=a$, $2^{q-2}=b$
$p=\log_2 a$, $q=\log_2 b+2=\log_2 4b$

$q-p=\log_2 4b-\log_2 a=\log_2\dfrac{4b}{a}=\log_2 6$

$3a=2b$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$
$a+b=15$

100) ①
이차방정식
$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$
의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-\sin\theta)^2-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)\geq 0$

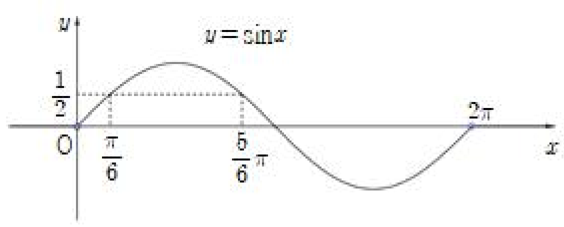
이어야 한다.
즉, $\sin^2\theta+3\cos^2\theta+5\sin\theta-5\geq 0$

이때 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로
$\sin^2\theta+3(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-5\geq 0$
$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\leq 0$
$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)\leq 0$
$\sin\theta-2<0$이므로
$2\sin\theta-1\geq 0$

$\sin\theta\geq\dfrac{1}{2}$

이때 $0\leq\theta<2\pi$이므로

$\dfrac{\pi}{6}\leq\theta\leq\dfrac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{5}{6}\pi$이므로

$$\begin{aligned}4\beta-2\alpha&=4\times\frac{5}{6}\pi-2\times\frac{\pi}{6}\\&=3\pi\end{aligned}$$

101) ③

두 점 P, Q의 y좌표는 각각 $e^{\frac{k}{2}}$, $e^{\frac{k}{2}+3t}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)$

점 R의 x 좌표는 방정식

$e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{k}{2}+3t}$

의 실근이므로

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{k}{2}+3t$에서

$x=k+6t$
따라서
$\overline{\mathrm{QR}}=(k+6t)-k=6t$
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$에서

$e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)=6t$

$e^{\frac{k}{2}}=\dfrac{6t}{e^{3t}-1}$이므로

$k=2\ln\dfrac{6t}{e^{3t}-1}$

즉,

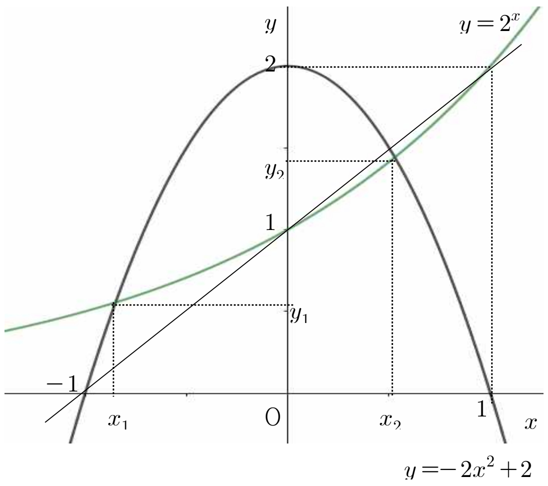
$f(t)=2\ln\dfrac{6t}{e^{3t}-1}$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}f(t)&=2\lim_{t\to0+}\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}\\&=2\lim_{t\to0+}\ln\frac{2}{\frac{e^{3t}-1}{3t}}\\&=2\ln2=\ln4\end{aligned}$$

102) ⑤

두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점 (x_1,y_1), (x_2,y_2)는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<x_2$ 에서 $-2x^2+2>2^x$

$x_2<x<1$ 에서 $-2x^2+2<2^x$

이고

$x=\dfrac{1}{2}$일 때, $-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{1}{2}$일 때 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

이므로 $\dfrac{3}{2}>\sqrt{2}$

따라서, $\dfrac{1}{2}<x_2$ 이다. (참)

ㄴ. 위의 그림에서 두 점 $(0,1)$, (x_2,y_2)를 잇는 직선의 기울기는 1보다 작으므로

$\dfrac{y_2-1}{x_2}<1$, $y_2-1<x_2\cdots$㉠

두 점 $(0,1)$,(x_1,y_1)을 잇는 직선의 기울기는 1보다 작으므로

$\dfrac{y_1-1}{x_1}<1$, $y_1-1>x_1$, $x_1<y_1-1\cdots$㉡

㉠,㉡의 두 식을 더하면

$x_1+y_2-1<x_2+y_1-1$

$x_1+y_2<x_2+y_1$

$y_2-y_1<x_2-x_1$ (참)

ㄷ. ㄱ과 같은 방법으로 생각하면

$x_1<-\dfrac{1}{2}$

즉, $-1<x_1<-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}<x_2<1$ 이므로

$-\dfrac{1}{2}<x_1+x_2<\dfrac{1}{2}$

그런데,

$$\begin{aligned}y_2-y_1&=2^{x_2}-2^{x_1}\\&=(-2x_2^2+2)-(-2x_1^2+2)\\&=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0\end{aligned}$$

이므로 $x_1+x_2<0$ 이어야 한다.

따라서, $-\dfrac{1}{2}<x_1+x_2<0$ 이고

$y_1y_2=2^{x_1}\times 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$

에서 밑이 1보다 크므로

$2^{-\frac{1}{2}}<y_1y_2<2^0$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

103) 5

α, β, γ가 삼각형 ABC의 세 내각의 크기이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ⋯ ㉠

α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$, $\alpha+\gamma=2\beta$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $3\beta=\pi$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$

$\beta=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\alpha+\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$에서

$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=-\dfrac{1}{2}$ ⋯ ㉢

$\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(2\cos\beta)^2=8\cos\alpha\cos\gamma$

$\cos\alpha\cos\gamma=\dfrac{1}{8}$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $\sin\alpha\sin\gamma=\dfrac{5}{8}$ ⋯ ㉤

따라서 $\tan\alpha\tan\gamma=\dfrac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=5$

104) 12

조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB의 넓이를 S라 하면 삼각형 BDC의 넓이는 $3S$이다.

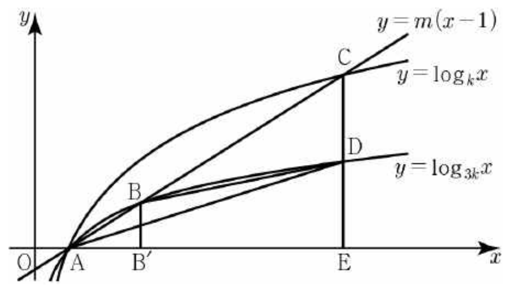
$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$에서 $\overline{BC}=3\overline{AB}$이고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 $\overline{B'E}=3\overline{AB'}$이다.

$\overline{AB'}=a$라 하면 $\overline{B'E}=3a$이므로

$B(a+1,\ \log_{3k}(a+1))$, $C(4a+1,\ \log_k(4a+1))$,

$D(4a+1,\ \log_{3k}(4a+1))$

이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED의 넓이는 $4S$이고 삼각형 AEC의 넓이는 $8S$이므로 D는 선분 CE의 중점이다.

$\log_k(4a+1)=2\log_{3k}(4a+1)$

$\dfrac{\log_k(4a+1)}{\log_k k}=\dfrac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$

$\log_k 3k=2$에서 $k^2=3k$이므로 $k=3$

세 점 A, B, C가 직선 $y=m(x-1)$ 위에 있으므로

$m=\dfrac{\log_9(a+1)-0}{(a+1)-1}=\dfrac{\log_3(4a+1)-0}{(4a+1)-1}$

에서

$2\log_3(a+1)=\log_3(4a+1)$

$(a+1)^2=4a+1$

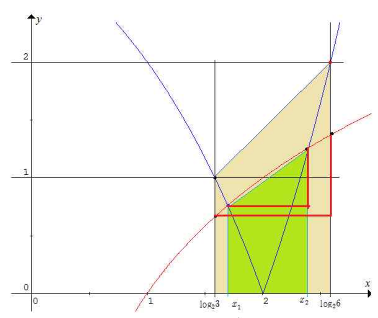
$a^2-2a=0$

$a>0$이므로 $a=2$

$m=\dfrac{\log_9 3}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\dfrac{k}{m}=12$

105) ②



ㄱ. 그림에서 $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$ 임은 분명하고

ㄴ. 그림에서 색칠한 사다리꼴의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)(2_2^x-2_1^x)<\dfrac{3}{2}$

ㄷ. 그림에서 빨간 직각삼각형의 높이에서

$(2^{x_2}-4)-(4-2^{x_1})<\log_2(\log_2 6)-\log_2(\log_2 3)$

$2_1^x+2_2^x<8+\log_2(\log_3 6)$

106) ④

두 점 A, B가 직선 $y=x$위에 있으므로 $A(p,p)$, $B(q,q)$ $(p<q)$로 놓으면

$\overline{AB}=6\sqrt{2}$

이므로

$\sqrt{(q-p)^2+(q-p)^2}=6\sqrt{2}$

$q-p=6$ -----㉠

또, 사각형 ACDB의 넓이가 30이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times(\overline{AC}+\overline{DB})=30$

$\frac{1}{2}\times(q-p)\times(p+q)=30$

$\frac{1}{2}\times6\times(p+q)=30$

$p+q=10$ ----㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$p=2,\ q=8$

두 점 A, B가 곡선 $y=2^{ax+b}$위에 있으므로

$2^{2a+b}=2$ ----㉢

$2^{8a+b}=8$ ----㉣

㉣를 ㉢으로 변끼리 나누면

$2^{6a}=4$

$2^{6a}=2^2$

$6a=2$

$a=\frac{1}{3}$

이 값을 ㉢에 대입하면

$2^{\frac{2}{3}+b}=2$

$\frac{2}{3}+b=1$

$b=\frac{1}{3}$

따라서,

$a+b=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

107) ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$\sin k\alpha+2=3\cos12\alpha$

함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로

$x=\frac{\pi}{k}-\alpha$도 방정식 $\sin kx+2=\sin k\alpha+2$의 실근이다.

이때 조건을 만족시키려면 $x=\frac{\pi}{k}-\alpha$가 방정식 $3\cos12x=3\cos12\alpha$의 실근이어야 한다.

$3\cos12\left(\frac{\pi}{k}-\alpha\right)=3\cos\left(\frac{12\pi}{k}-12\alpha\right)$에서

$3\cos\left(\frac{12\pi}{k}-12\alpha\right)=3\cos12\alpha$가 성립하려면

$\frac{12\pi}{k}=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi,\ 10\pi,\ 12\pi,\ \cdots$

이어야 한다.

이때 k가 자연수이므로

$k=6,\ 3,\ 2,\ 1$

따라서 그 개수는 4이다.

108) ①

삼각형 ABC에서

$\angle A=90^\circ$ 이므로

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\times2\log_2x\times\log_4\frac{16}{x}$

$=\log_2x\times\left(2-\frac{1}{2}\log_2x\right)$

$=-\frac{1}{2}(\log_2x)^2+2\log_2x$

$=-\frac{1}{2}(\log_2x-2)^2+2$

$S(x)$는 $\log_2x=2$, 즉 $x=4$일 때

최댓값 2를 가진다.

따라서 $a=4,\ M=2$이므로

$a+M=4+2=6$

109) ⑤

점 P의 좌표를 $P(t,a^t)\,(t<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 (a^t,t)이다. $\angle PQR=45^\circ$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

즉 점 R의 좌표는 $(a^t,-t)$이다.

직선 PR의 기울기는 $\frac{1}{7}$이므로 $\frac{a^t+t}{t-a^t}=\frac{1}{7}$에서

$a^t=-\frac{3}{4}t$ …… ㉠

$\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sqrt{(t-a^t)^2+(a^t+t)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$a^{2t}+t^2=\frac{25}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $t^2=4$이고 $t<0$이므로 $t=-2$

㉠에 대입하면 $\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2}$이고 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}$

110) ①

점 A의 좌표는 $(t,3^{2-t}+8)$, 점 B의 좌표는 $(t,0)$,

점 C의 좌표는 $(t+1,0)$, 점 D의 좌표는

$(t+1,3^t)$

사각형 ABCD가 직사각형이므로

점 A의 y좌표와 점 D의 y좌표가 같아야 한다.

즉, $3^{2-t}+8=3^t$

$(3^t)^2-8\times3^t-9=0$, $(3^t+1)(3^t-9)=0$

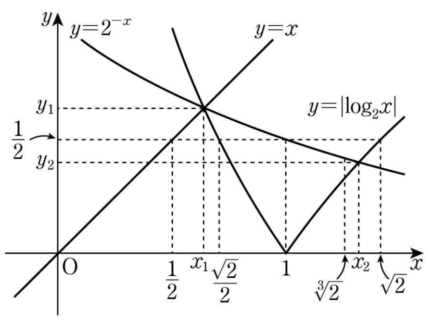
그런데 $3^t>0$이므로 $3^t=9$에서 $t=2$

그러므로 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 1이고 세로의 길이는 $3^2=9$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 9

111) ⑤

$y=2^{-x}$, $y=|\log_2x|$, $y=x$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<1$일 때,

두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=-\log_2x$의 교점은

직선 $y=x$ 위에 있으므로

$x_1=y_1$이고 $x_1<1$, $y_1<1$

그림에서 $y=2^{-x}$은 감소함수이므로

$2^{-1}<2^{-x_1}=y_1$ 즉, $\frac{1}{2}<y_1=x_1$

한편, $-\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}<y_1=-\log_2x_1$이고

$y=-\log_2x$는 감소함수이므로 $x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$이고 $\log_2\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}$

그런데 $8<9$이므로 $2^{\frac{3}{2}}<3$ …… ㉠

$\sqrt[3]{2}$와 $\frac{3}{2}$을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3<\left(\frac{3}{2}\right)^3$이므로 $\sqrt[3]{2}<\frac{3}{2}$ 즉,

$2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3$이므로

$\log_2 \sqrt[3]{2} < 2^{-\sqrt[3]{2}}$

그러므로 $\sqrt[3]{2} < x_2$

또, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$ 이므로 $\log_2 \sqrt{2} > 2^{-\sqrt{2}}$

그림에서 $x_2 < \sqrt{2}$

그러므로 $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $y_1 = x_1$ 이므로 ㄱ에서 $\frac{1}{2} < y_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2 = \log_2 x_2$ 이고 $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$,

$\log_2 \sqrt[3]{2} < \log_2 x_2 < \log_2 \sqrt{2}$ 이므로

$\frac{1}{3} < y_2 < \frac{1}{2}$

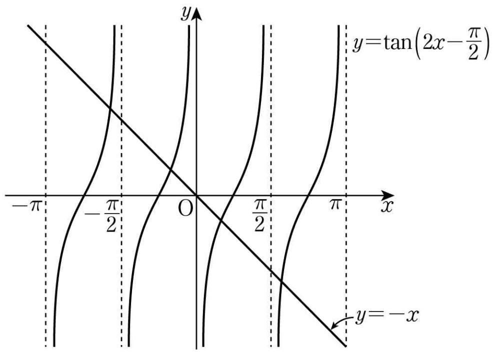
그러므로 $y_1 - y_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$ (참)

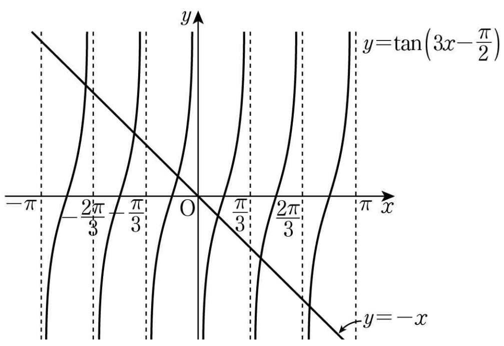
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

112) 10

$y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) = \tan n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{n}$ 이고 $y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y = \tan nx$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

아래 그림은 $n=2$, $n=3$일 때의 그래프이다.





그러므로 직선 $y = -x$ 와

$y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프의 교점의 개수는 $a_2 = 4$,

$y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프의 교점의 개수는 $a_3 = 6$

따라서 $a_2 + a_3 = 4 + 6 = 10$

113) ②

(i) $m > 0$ 인 경우

n 의 값에 관계없이 m 의 n 제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m > 0$ 인 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $\boxed{{}_{10}C_2 = 45}$ 이다.

(ii) $m < 0$ 인 경우

n 이 홀수이면 m 의 n 제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n 이 짝수이면 실수인 m 의 n 제곱근은 존재하지 않는다. 그러므로 $m < 0$ 인 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$\boxed{2+4+6+8=20}$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 m 의 n 제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $\boxed{45} + \boxed{20}$ 이다.

따라서 (가), (나)에 알맞은 수는 각각 45, 20 이고

$p + q = 65$

114) ①

일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.

(i) 숫자 2를 한 번 사용한 경우

2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\frac{6!}{5!1!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{6!}{1!5!} = \boxed{62}$ 이다.

2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3 \times 62 = \boxed{186}$ 이다.

(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이므로 나머지 자리에 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3을 나열하여 만든 것이다.

그러므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!3!} = \boxed{14}$ 이다.

그러므로 $p = 62$, $q = 186$, $r = 14$

따라서 $p + q + r = 262$

[다른 풀이]

(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이다. 즉, 구하려는 값은 1, 3을 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열하는 경우의 수에서 1을 네 개, 3을 네 개 선택한 경우의 수 2를 뺀 값이므로 ${}_2\Pi_4 - 2 = 2^4 - 2 = \boxed{14}$ 이다.

[보충 설명]

(ii) 숫자 2를 두 번 사용한 경우

2, 2를 십의 자리와 천의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는

$\frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{1!4!} = 30$ 이다.

2를 짝수 번째 자리에 두 번 오도록 놓는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$ 이다.

그러므로 숫자 2를 두 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3 \times 30 = 90$ 이다.

115) ④

(i) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$

이다.

$A = \{1, 2, 3\}$인 경우 $n(B) < 3$이므로

집합 B는

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

이다.

(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1\}$인 경우

집합 A의 원소인 1, 2, 3이 1에 대응하는 경우의 수는 1이고, 4, 5가 2, 3에 하나씩 대응하는 경우의 수는 2이므로

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1\}$인

함수 f의 개수는 $1 \times 2 = \boxed{2}$ 이다.

(b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$인 경우

$\{f(1), f(2), f(3)\} = \{1, 2\}$이고

4, 5가 1, 2, 3에 대응하되 적어도 하나가 3에 대응하는 경우이므로

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$인 함수 f의 개수는

$({}_2\Pi_3 - 2) \times ({}_3\Pi_2 - {}_2\Pi_2) = 6 \times 5 = \boxed{30}$ 이다.

(a), (b)와 같은 경우가 각각 3가지이므로

$n(A)=3$, $n(B) < 3$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는

$4 \times \left(3 \times \boxed{2} + 3 \times \boxed{30}\right)$ 이다.

(ii) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1, 2, 4, 5\}$뿐이므로 이 경우

$X-A=\{3\}$에 의해 $n(B)=3$이므로 집합 B는
$\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$이다.
$A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 4\}$인 경우
$f(3)=5$이고 집합 A의 원소 중 어떠한
두 원소는 서로 같은 함숫값을 가져야 하므로
1, 2, 4를 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로
정하는 경우의 수는 $3\times\frac{4!}{2!}=3\times 12=36$이다.
그러므로 $n(A)=4$, $n(B)<4$이고
집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록
하는 함수 f의 개수는 $4\times 36=\boxed{144}$이다.
(iii) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고
$n(B)=5$이므로 조건 $n(A)>n(B)$를 만족시키는
함수 f는 존재하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$4\times\left(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30}\right)+\boxed{144}$이다.
따라서 $p=2$, $q=30$, $r=144$이므로 $p+q+r=176$

116) ④
규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는
첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한 후
'(i) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는
경우'에서 '(ii) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한
요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는
경우'를 제외하면 된다.
첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청하는
경우의 수는 $3!$이다.
(i)의 경우:
봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회

신청하는 경우의 수는 $\boxed{\frac{9!}{2!\times 2!\times 5!}}$이다.
(ii)의 경우:
첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은
요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 봉사활동 A, B, C를 각각
2회, 2회, 2회
신청하는 경우의 수 $\boxed{\frac{6!}{2!\times 2!\times 2!}}$과 같다.
(i), (ii)에 의해
구하는 경우의 수는 $3!\times\left(\boxed{756}-\boxed{90}\right)$이다.
$p=756$, $q=90$
$p+q=756+90=846$

117) ③
$1\le a\le 6$이면 $1\le 7-a\le 6$
a, b, c가 각각 6 이하의 자연수이므로 $7-a$,
$7-b$, $7-c$는 각각 6 이하의 자연수이다.
$3\le k\le 18$인 자연수 k에 대하여 $a+b+c=k$를 만
족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍
(a, b, c)의 개수는 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$ 즉,
$a+b+c=3\times 7-k$를 만족시키는 6 이하의 자연수 a,
b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같다.
그러므로 $3\le k\le 18$인 자연수 k에 대하여 $a+b+c=k$
일 확률 $\mathrm{P}(X=k)$와 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률
$\mathrm{P}(X=3\times\boxed{7}-k)$는 서로 같다.
즉, $\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=18)$
$\mathrm{P}(X=4)=\mathrm{P}(X=17)$
$\mathrm{P}(X=5)=\mathrm{P}(X=16)$
$\vdots$
$\mathrm{P}(X=10)=\mathrm{P}(X=11)$
그러므로 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=3}^{18}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=3\times\mathrm{P}(X=3)+4\times\mathrm{P}(X=4)+5\times\mathrm{P}(X=5)\\&\quad+\cdots+17\times\mathrm{P}(X=17)+18\times\mathrm{P}(X=18)\\&=(3+18)\times\mathrm{P}(X=3)+(4+17)\times\mathrm{P}(X=4)\\&\quad+\cdots+(10+11)\times\mathrm{P}(X=10)\\&=\boxed{21}\times\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)\end{aligned}$$

이때, 확률질량함수의 성질에 의하여 $\sum_{k=3}^{18}\mathrm{P}(X=k)=1$이
고, $\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=11}^{18}\mathrm{P}(X=k)$이므로
$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\boxed{\frac{1}{2}}$
이다.
$\mathrm{E}(X)=\boxed{21}\times\boxed{\frac{1}{2}}$
$p=7$, $q=21$, $r=\frac{1}{2}$
따라서 $\frac{p+q}{r}=2\times(7+21)=56$

118) 8
회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠할 정사각형은 그림과 같이 A, B, C 중에서 택할 수 있다.

A	B	
	C	

(i) A에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 5이다.
나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.
(ii) B에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 3이다.
나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.
(iii) C에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 어떤 정사각형에 칠해도 빨간색이 칠해진 정사각형과 꼭짓점을 공유하므로 조건을 만족시킬 수 없다.
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$(3+5)\times 7!=8\times 7!$
따라서 $k=8$

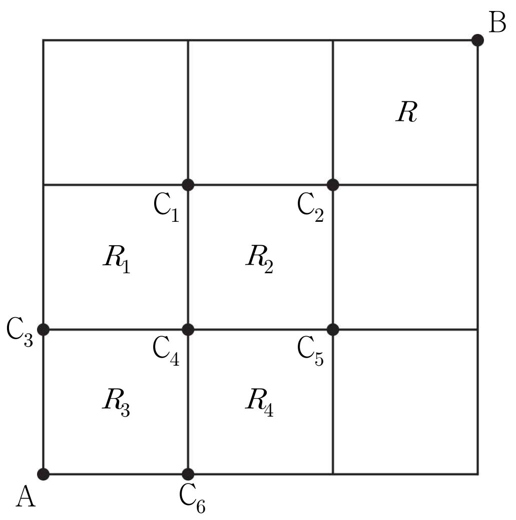
119) 396
철학, 사회과학, 자연과학 분야에 해당하는 책은
반드시 선택해야 하므로 최소 3개 분야에서
최대 5개 분야에 해당하는 책을 선택할 수 있다.
철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에서 선택한
책의 권수를 순서대로 a, b, c(a, b, c는 4 이상
10 이하의 자연수)라 하자.
(i) 3개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
$a+b+c=24$에서
$a=4$일 때, $b+c=20$을 만족시키는
순서쌍 (b, c)의 개수는 1
$a=5$일 때, $b+c=19$를 만족시키는
순서쌍 (b, c)의 개수는 2
$\vdots$
$a=10$일 때, $b+c=14$를 만족시키는
순서쌍 (b, c)의 개수는 7
따라서 구하는 경우의 수는 $1+2+\cdots+7=28$
(ii) 4개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
문학 또는 역사 분야 중 한 분야를 선택하는
경우의 수는 2이고 선택된 분야에서 선택한
책의 권수를 d(d는 4 이상 10 이하의 자연수)
라 하자.
$a=a'+4$, $b=b'+4$, $c=c'+4$, $d=d'+4$
(a', b', c', d'은 6 이하의 음이 아닌 정수)라
하면 $a+b+c+d=24$에서
$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)=24$
$a'+b'+c'+d'=8$
방정식 $a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는
6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의

모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는
서로 다른 4개에서 중복을 허용하여
8개를 택하는 중복조합의 수
${}_4\mathrm{H}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_3 = 165$에서
a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 7인
경우의 수 ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{H}_1 = 12$와
a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 8인
경우의 수 4를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times(165-12-4)=298$

(iii) 5개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
문학 분야와 역사 분야에서 선택한 책의 권수를
각각 d, e(d, e는 4 이상 10 이하의 자연수)라
하자.
$a=a'+4$, $b=b'+4$, $c=c'+4$, $d=d'+4$,
$e=e'+4$(a', b', c', d', e'은 6 이하의
음이 아닌 정수)라 하면
$a+b+c+d+e=24$에서
$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)+(e'+4)=24$
$a'+b'+c'+d'+e'=4$
방정식 $a'+b'+c'+d'+e'=4$를 만족시키는
6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'의
모든 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는
서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를
택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_4 = {}_8\mathrm{C}_4 = 70$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$28+298+70=396$

120) 40



그림과 같이
6개의 점 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6과
4개의 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4가 있다.
최단거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나
다시 A 지점까지 돌아올 때, 조건 (가)를
만족시키려면
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_2\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}_2\to\mathrm{A}$의 순서로 이동해야 한다.
또한 조건 (나)를 만족시키려면
정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중 네 변을 모두 지나는
정사각형은 없어야 한다.

(i) $\mathrm{C}_2\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}_2$의 순서로 이동하는 경우
(C_2에서 B로 가는 경우의 수)
$\times$(B에서 C_2로 가는 경우의 수)$=2\times1=2$

(ii) $\mathrm{A}\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{A}$의 순서로 이동하는 경우
$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$

(a) 정사각형 R_1의 네 변을 모두 지나는 경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_3\to\mathrm{C}_1\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_1\to\mathrm{C}_3\to\mathrm{A}$의
순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(b) 정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나는 경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{A}$의 순서로
이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(1\times2)=8$

(c) 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{A}$의 순서로
이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(2\times1)=8$

(d) 정사각형 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_6\to\mathrm{C}_5\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_5\to\mathrm{C}_6\to\mathrm{A}$의
순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(e) 두 정사각형 R_2, R_3의 네 변을 모두 지나는
경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{A}$의 순서로
이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(1\times1)=4$

(a)~(e)에 의하여
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{A}$의 순서로 이동할 때, 한 변의
길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는
정사각형이 없는 경우의 수는
$36-\{(2+8+8+2)-4\}=20$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$2\times20=40$

121) ③
곱이 짝수인 경우는 3개 중에서 적어도 하나는
짝수이므로 ${}_{10}\mathrm{C}_3-{}_5\mathrm{C}_3=120-10=110$가지,
3으로 나눈 나머지에 따라 분류하면
$A=\{1,4,7,10\}$, $B=\{2,5,8\}$, $C=\{3,6,9\}$
곱이 짝수이고 합이 3의 배수이려면
집합 A에서 3개 -- ${}_4\mathrm{C}_3=4$
집합 B에서 3개 -- ${}_3\mathrm{C}_3=1$
집합 C에서 3개 -- ${}_3\mathrm{C}_3=1$
집합 A, B, C에서 각각 1개인 경우는
$4\times3\times3-2\times1\times2=32$
$\therefore\ \dfrac{4+1+1+32}{110}=\dfrac{38}{110}=\dfrac{19}{55}$

122) 332
(가)에서 ${}_4\mathrm{H}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_3=455$
(나)에서
$a=2$이면 $b+c+d=10$ -- ${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$
$a+b+c=10$이면 --- ${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$
$a=2$, $a+b+c=10$이면
$a=2$, $d=2$, $b+c=8$ -- 9가지
$\therefore\ 455-(66+66-9)=332$

123) 71
모집단의 분포는

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\overline{X}=\dfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)=2$인 경우는
$(x_1, x_2, x_3)=(1,1,4)$, $(1,4,1)$, $(4,1,1)$
$(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $\cdots$, $(3,2,1)$
$(2,2,2)$
이므로 구하는 확률은
$3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{6}\right)+6\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{6}\right)+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{7}{64}$
$\therefore\ p+q=64+7=71$

124) ②
숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드를 일렬로 나열하는
경우의 수는

7!
조건 (가)에 의해
4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 5, 6, 7이 적혀 있는 3장의 카드 중 2장이다.
(i) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 6, 7이 적혀 있는 카드인 경우
$\boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{7}$일 때
조건 (나)에 의해
5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 1, 2, 3이 적혀 있는 카드 3장의 카드 중 2장이고 이 2장의 카드의 위치를 바꿀 수 있으므로 이때의 경우의 수는
${}_3C_2\times 2! = {}_3C_1\times 2! = 6$
이 각각에 대하여 4가 적힌 카드와 양옆에 있는 카드를 1장의 카드로 생각하고, 5가 적힌 카드와 양옆에 있는 카드를 1장의 카드로 생각하여 남은 1장의 카드와 함께 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3! = 6$
따라서 $\boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{7}$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
$6\times 6 = 36$
마찬가지로 $\boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
36
따라서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
$36+36=72$
(ii) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 5, 6이 적혀 있는 카드인 경우
$\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$일 때
조건 (나)에 의해
5가 적혀 있는 카드의 왼쪽 옆에 있는 카드는 1, 2, 3이 적혀 있는 3장의 카드 중 1장이므로 이때의 경우의 수는
3
이 각각에 대하여 5가 적혀 있는 카드의 왼쪽 옆에 있는 카드와 5가 적혀 있는 카드, 4가 적혀 있는 카드, 6이 적혀 있는 카드를 1장의 카드로 생각하여 남은 3장의 카드와 함께 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4! = 24$
따라서 $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
$3\times 24 = 72$
마찬가지로 $\boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{5}$일 때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
72
따라서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
$72+72=144$
(iii) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 5, 7이 적혀 있는 카드인 경우
(ii)와 마찬가지로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
144
(i), (ii), (iii)에서
주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
$72+144+144=360$
따라서 구하는 확률은
$\frac{360}{7!}=\frac{1}{14}$

125) ④
집합 $A=\{1,2,3,4\}$에서 집합 $B=\{1,2,3\}$으로의 모든 함수 f의 개수는
$3^4=81$
$f(1)\geq 2$인 함수의 개수는
$2\times 3^3 = 54$
치역이 B인 함수 f의 개수는
정의역을 원소의 개수가 $2,1,1$인 세 개의 집합으로 나눈 후 집합 B에 일대일대응을 시키면 되므로
${}_4C_2\times {}_2C_1\times {}_1C_1\times \frac{1}{2!}\times 3! = 36$
한편 $f(1)=2$이고 치역이 B인 함수 f의 개수는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $a\neq 1$인 a에 대하여 $f(a)=2$인 a가 존재하는 경우
$3! = 6$
(ii) $a\neq 1$인 모든 a에 대하여 $f(a)\neq 2$인 경우
${}_3C_2\times 2! = 6$
따라서 $f(1)=2$이고 치역이 B인 함수 f의 개수는
$6+6=12$
한편, $f(1)=3$이고 치역이 B인 함수 f의 개수도 12이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{54+36-(12+12)}{81}=\frac{22}{27}$

126) 46
주머니에 있는 8개의 공 중에서 4개의 공을 임의로 꺼내는 경우의 수는
${}_8C_4 = \frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1} = 70$
꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 경우는 3이 적힌 공이 두 개 또는 4가 적힌 공이 두 개 또는 3, 3, 4, 4 가 적힌 공이 나오는 경우이다.
이때, 3이 적힌 공이 두 개 나오는 경우는 나머지 여섯 개의 공 중에서 두 개의 공을 꺼낼 때 4가 적힌 공 두 개가 나오는 경우를 빼면 되므로
${}_6C_2 - 1 = 15 - 1 = 14$
따라서, 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 경우의 수는
$14\times 2+1=29$
또한, 3이 적힌 공이 두 개 나온 경우 중 검은 공이 두 개인 경우는 나머지 검은 공 중 4가 적힌 공을 제외한 두 개의 공 중 한 개를 꺼내고 흰 공 3개 중에서 한 개를 꺼내거나 나머지 검은 공 중 4가 적힌 공을 꺼내고 흰 색 공 중 4를 제외한 두 개의 공 중에서 한 개의 공을 꺼내면 되므로
${}_2C_1\times {}_3C_1 + 1\times {}_2C_1 = 6+2 = 8$
따라서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같으면서 검은 공의 개수가 두 개인 경우의 수는
$2({}_2C_1\times {}_3C_1 + 1\times {}_2C_1)+1 = 17$
이때 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 사건을 A, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 사건을 B라 하면 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{17}{70}}{\frac{29}{70}} = \frac{17}{29}$$
따라서 $p=29,\ q=17$ 이므로
$p+q=46$

127) 114
2명의 학생을 A, B라 하고 두 학생 A, B가 받는 볼펜의 개수를 (A, B)로 나타내면
(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4),
(0, 5)
의 6가지이다.
또한, A, B학생에게 나눠 준 검은색 볼펜, 파란색 볼펜, 빨간색 볼펜의 개수를 각각 a,b,c라 하면
$a+b+c=5$
(단, $0\leq a\leq 1,\ 0\leq b\leq 4,\ 0\leq c\leq 4$) 이다.
(i) (5, 0)인 경우
① $a=0$이면 $b+c=5$에서
순서쌍 (b,c)의 개수는 (4, 1), (3, 2),
(2, 3), (1, 4)의 4이다.
② $a=1$ 이면 $b+c=4$ 이므로
순서쌍 (b,c)의 개수는
${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = 5$
(ii) (4, 1)인 경우
① B에게 검은 볼펜을 나눠 준 경우

$b+c=4$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 5이다.
② B에게 파란색 볼펜을 나눠 준 경우
$a+b+c=4$
(단, $0\le a\le 1$, $0\le b\le 3$, $0\le c\le 4$)
이고
㉠ $a=0$ 이면 $b+c=4$ 이므로
순서쌍 (b,c)의 개수는 (3, 1), (2, 2)
(1, 3), (0, 4)의 4이다.
㉡ $a=1$ 이면 $b+c=3$ 이므로
순서쌍 (b,c)의 개수는
${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3=4$
③ B에게 빨간색 볼펜을 나눠 준 경우도 (ii) ②와 같다.
(iii) (3, 2)인 경우
① B에게 검은색, 파란색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우
$b+c=3$ (단, $0\le b\le 3$, $0\le c\le 4$)
이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 4이다.
② B에게 검은색, 빨간색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우도 (iii) ①과 같다.
③ B에게 파란색, 빨간색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우
$a+b+c=3$
(단, $0\le a\le 1$, $0\le b\le 3$, $0\le c\le 3$)
㉠ $a=0$ 이면 $b+c=3$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 4이다.
㉡ $a=1$ 이면 $b+c=2$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는
${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2=3$
④ B에게 파란색 볼펜을 2개 나눠 준 경우
$a+b+c=3$
(단, $0\le a\le 1$, $0\le b\le 2$, $0\le c\le 4$)
㉠ $a=0$이면 $b+c=3$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 (2, 1), (1, 2), (0, 3)의 3이다.
㉡ $a=1$이면 $b+c=2$ 이므로 순서쌍 (b,c)의 개수는 3이다.
⑤ B에게 빨간색 볼펜을 2개 나눠 준 경우는 (iii) ④의 경우와 같다.
또한, (2, 3), (1, 4), (0, 5)인 경우는 각각 (3, 2), (4, 1), (5, 0)인 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는
$2\{(4+5)+(5+8\times 2)+(4\times 2+7+3\times 2\times 2)\}$
$=2\times(9+21+27)$
$=2\times 57$
$=114$

128) 74
조건 (가)를 만족시키는 순서쌍의 개수는
${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6$
$={}_9C_6$
$={}_9C_3$
$=84$
이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수는 방정식 $a+b+c+d=6$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수와 같다. 이 개수는
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$
이라 하면
$a'+b'+c'+d'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a',b',c',d')의 개수와 같으므로
${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2$
$={}_5C_2$
$=10$
따라서 구하는 순서쌍의 개수는
$84-10=74$

129) 15
집합 A에서 A로의 모든 함수의 개수는
${}_4\Pi_4=4^4=256$
조건을 만족시키는 함수의 개수는 조건 (가)에 의하여 다음 네 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $f(1)=f(2)=3$인 경우
조건 (나)를 만족시키기 위하여 정의역의 원소 3, 4의 함숫값은 1, 2, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 순서대로 짝지으면 된다. 그러므로 이 경우의 수는
${}_3P_2=6$
(ii) $f(1)=f(2)=4$인 경우
(i)과 마찬가지로 생각하면 이 경우의 수는
6
(iii) $f(1)=3$, $f(2)=4$인 경우
조건 (나)를 만족시키기 위하여 치역의 원소의 개수가 3이 되어야 하므로 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
㉠ $f(3)$의 값이 3 또는 4인 경우 $f(4)$의 값은 1 또는 2가 되어야 하므로 이 경우의 수는
$2\times 2=4$
㉡ $f(4)$의 값이 3 또는 4인 경우 $f(3)$의 값은 1 또는 2가 되어야 하므로 이 경우의 수는
$2\times 2=4$
㉢ $f(3)$, $f(4)$의 값이 모두 1이거나 모두 2인 경우의 수는
2
그러므로 이 경우의 수는
$4+4+2=10$
(iv) $f(1)=4$, $f(2)=3$인 경우
(iii)과 마찬가지로 생각하면 이 경우의 수는
10
(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 함수의 개수는
$6+6+10+10=32$
따라서
$p=\frac{32}{256}=\frac{1}{8}$
이므로
$120p=120\times\frac{1}{8}=15$

130) ④
$\mathrm{P}(Y\le m+4)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{4-m}{\sigma}\right)=0.3085$
$\mathrm{P}\left(Z\le -\frac{1}{2}\right)=0.3085$
$\frac{4-m}{\sigma}=-\frac{1}{2}$ … ㉠
$\mathrm{P}(X\le 8)+\mathrm{P}(Y\le 8)=1$에서
$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{8-m}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{8-2m}{\sigma}\right)=1$
$\frac{8-m}{2}=-\frac{8-2m}{\sigma}$
㉠에서 $-\frac{8-2m}{\sigma}=1$이므로 $\frac{8-m}{2}=1$이고
$m=6$, $\sigma=4$
$\mathrm{P}(X\le\sigma)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{4-6}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le -1)=0.1587$

131) ②
주사위를 3번 던져 첫 번째, 두 번째, 세 번째 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라 하고 세 수 a, b, c의 순서쌍을 $(a,\ b,\ c)$라 하자.
주사위를 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는
$6^3=216$
주어진 조건ㅇ르 만족시키지 않는 경우는 빈 접시가 생기는 경우이다.
(i) 빈 접시가 1개인 경우
예를 들어, 1이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는
$(3,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 5,\ 5)$, $(3,\ 4,\ 5)$
인 각각의 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로
$2\times\frac{3!}{2!}+3!=12$(가지)
같은 방법으로 빈 접시가 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는 접시인 경우도 각각 12가지이다.
그러므로 $12\times 6=72$
(ii) 빈 접시가 2개인 경우
빈 접시가 2개인 경우는 두 접시가 이웃하는 경우이다. 예를 들어, 1, 2가 적혀 있는 접시가 빈 접시인

경우는

$(4,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 5)$

인 각각의 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로

$2\times\frac{3!}{2!}=6$(가지)

같은 방법으로 빈 접시가 2, 3과 3, 4와 4, 5와 5, 6과 6, 1이 적혀 있는 접시인 경우도 각각 6가지이다.

그러므로 $6\times6=36$

(iii) 빈 접시가 3개인 경우

예를 들어, 1, 2, 3이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는

$(5,\ 5,\ 5)$

인 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 1가지이다.

같은 방법으로 빈 접시가 2, 3, 4와 3, 4, 5와 4, 5, 6과 5, 6, 1과 6, 1, 2가 적혀 있는 접시인 경우도 각각 1가지이다.

그러므로 $1\times6=6$

(i), (ii), (iii)에 의하여 빈 접시가 생기는 경우의 수는 $72+36+6=114$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{114}{216}=\frac{17}{36}$

132) 327

(i) $f(3)$이 3의 배수인 경우

① $f(3)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

그러므로 $6\times20=120$

② $f(3)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는

${}_1\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_3=1$

그러므로 $21\times1=21$

①, ②에 의하여 $f(3)$이 3의 배수인 경우의 수는

$120+21=141$

(ii) $f(6)$이 3의 배수인 경우

① $f(6)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

② $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_5={}_{10}\mathrm{C}_5=252$

①, ②에 의하여 $f(6)$이 3의 배수인 경우의 수는

$21+252=273$

(iii) $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우

① $f(3)=f(6)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_1\mathrm{H}_2={}_2\mathrm{C}_2=1$

그러므로 $6\times1=6$

② $f(3)=3$, $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

그러므로 $6\times10=60$

③ $f(3)=f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_1\mathrm{H}_2={}_2\mathrm{C}_2=1$

그러므로 $21\times1=21$

①, ②, ③에 의하여 $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우의 수는

$660+21=87$

따라서 (i) (ii) (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

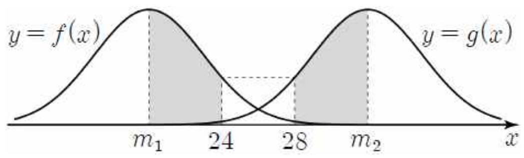
$141+273-87=327$

133) ②

표준편차가 같은 정규분포곡선의 모양은 항상 일정하다. 확률변수 X, Y는 표준편차가 같은 정규분포를 따르고, 조건 (가)에 의하여

$m_1<24<28<m_2$, $f(24)=g(28)$

인 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$라 하자.

$\mathrm{P}(m_1\le X\le 24)=\mathrm{P}(28\le Y\le m_2)=0.4772$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{24-m_1}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{28-m_2}{\sigma}\le Z\le 0\right)=0.4772$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)=0.4772$

이므로

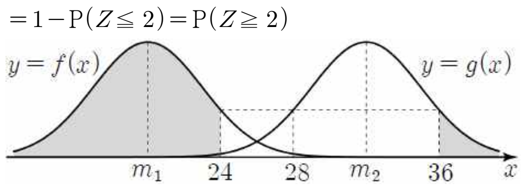
$\frac{24-m_1}{\sigma}=2$, $\frac{28-m_2}{\sigma}=-2$

$24-m_1=2\sigma$, $m_2-28=2\sigma$ … ㉠

조건 (나)에 의하여

$\mathrm{P}(Y\ge 36)=1-\mathrm{P}(X\le 24)$

$=1-\mathrm{P}(Z\le 2)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$



$\frac{36-m_2}{\sigma}=2$, $36-m_2=2\sigma$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $m_2-28=36-m_2$

$m_2=32$이므로 $\sigma=2$, $m_1=20$

따라서 $\mathrm{P}(18\le X\le 21)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.5)$

$=0.3413+0.1915=0.5328$

134) 10

$a-b$의 값이 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은

$-3,\ -2.\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\mathrm{E}(X)=(-3)\times\frac{1}{16}+(-2)\times\frac{2}{16}+(-1)\times\frac{3}{16}+0\times\frac{4}{16}+1\times\frac{3}{16}+2\times\frac{2}{16}+3\times\frac{1}{16}=0$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\times\frac{1}{16}+(-2)^2\times\frac{2}{16}+(-1)^2\times\frac{3}{16}+0^2\times\frac{4}{16}+1^2\times\frac{3}{16}+2^2\times\frac{2}{16}+3^2\times\frac{1}{16}=\frac{5}{2}$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{5}{2}$

따라서 $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+1)=4\times\mathrm{V}(X)=10$

135) 72

3명의 학생을 A, B, C라 하자.

(i) 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받는 경우

흰 공 2개를 모두 받는 1명의 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

흰 공 2개를 모두 받은 학생이 A일 때, 학생 A는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다. 학생 A에서 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2=36$

학생 B가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수이므로 ${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2=9$

같은 방법으로 학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수도 ${}_2H_2\times{}_2H_2=9$

학생 B와 C가 모두 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 ${}_1H_2\times{}_1H_2=1$

그러므로 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받도록 나누어 주는 경우의 수는

$3\times(36-2\times9+1)=57$

(ii) 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받는 경우

흰 공을 1개씩 받는 2명의 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

흰 공을 1개씩 받은 학생이 A, B일 때, 학생 A, B는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다. 학생 A, B에게 각각 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_1\times{}_3H_1=9$

학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는

${}_2H_1\times{}_2H_1=4$

그러므로 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는 $3\times(9-4)=15$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$57+15=72$

136) ④

(가)에서 $m=15$

(나)에서 $\dfrac{17-15}{4}+\dfrac{20-17}{\sigma}=0,\ \sigma=6$

$P(X\le15+6)=P(Z\le1.5)=0.9332$

137) 259

① $a_1>a_2,\ a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$

a_1을 2,3,4,5,6 중에서 하나 정하면 된다.

따라서 5가지

② $a_1<a_2,\ a_2>a_3,\ a_3<a_4<a_5<a_6$

a_1와 a_3는 a_2보다 작으므로 가능한 a_2는

3,4,5,6이고 그 각각에 대하여 a_2보다 작은 a_1을

정하기만 하면 되는데, 각각 2,3,4,5 가지이므로

모두 14가지

③ $a_1<a_2<a_3,\ a_3>a_4,\ a_4<a_5<a_6$

a_3보다 작은 것이 a_1, a_2, a_4이므로 가능한 a_3는

4,5,6이고 그 각각에 대하여 $a_1<a_2$를 정하기만

하면된다. 따라서 ${}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2=19$가지

④ $a_4>a_5$인 경우는 ②를 반대로 대칭배열한다.

따라서 14가지

⑤ $a_5>a_6$인 경우도 ①을 반대로 대칭배열한다.

따라서 5가지

모든 경우의 수는 6!이므로 구하는 확률은

$\dfrac{5+14+19+14+5}{6!}=\dfrac{19}{240},\ \therefore\ 19+240=259$

138) ⑤

$2k=m+10$이므로

$P(Y\le2k)=P(Y\le m+10)$

$=P(Z\le2)=0.9772$

139) 50

ab가 홀수인 경우는

(1,1) 일 때, $c+d+e=8$ -- ${}_7C_2=21$

(1,3),(3,1) 일 때, $c+d+e=6$ -- $2\times{}_5C_2=20$

(1,5),(3,3),(5,1)일 때, $c+d+e=4$ -- $3\times{}_3C_3=9$

$\therefore\ 21+20+9=50$

140) ③

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\sigma^2)$을 따른다고 하면

$P(X\ge3.4)=\dfrac{1}{2}$이므로 $m=3.4$

또, $P(Z\le-1)=P(Z\ge1)$이므로

$P(X\le3.9)+P(Z\ge1)=1$에서

$P(X\ge3.9)=P(Z\ge1)$

$P(X\ge3.9)=P\left(Z\ge\dfrac{3.9-3.4}{\sigma}\right)=P\left(Z\ge\dfrac{0.5}{\sigma}\right)$

이므로 $\dfrac{0.5}{\sigma}=1,\ \sigma=0.5$

따라서 확률변수 X가 정규분포 $N(3.4,\,0.5^2)$을 따르므로

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(3.4,\,0.1^2)$을 따른다.

즉 $P(\overline{X}\ge3.55)=P\left(Z\ge\dfrac{3.55-3.4}{0.1}\right)$

$=P(Z\ge1.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

141) ③

7개 동아리의 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는 7!

(i) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B 보다 먼저 발표하는 경우

두 동아리 A, B를 같은 것으로 보고 순서를 정하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!}$

이 경우의 확률은

$\dfrac{\frac{7!}{2!}}{7!}=\dfrac{1}{2}$

(ii) 두 수학 동아리 사이에 과학 동아리 2개가 발표하는 경우

두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하고 순서를 정하는 경우의 수는

$2\times{}_5P_2=40$

네 동아리를 하나로 묶어 전체 순서를 정하는 경우의 수는

4!

이 경우의 확률은

$\dfrac{40\times4!}{7!}=\dfrac{4}{21}$

(iii) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B 보다 먼저 발표하고, 두 수학 동아리 사이에 과학 동아리 2개가 발표하는 경우

두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하고 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

네 동아리를 하나로 묶어 전체 순서를 정하는 경우의 수는

4!

이 경우의 확률은

$\dfrac{20\times4!}{7!}=\dfrac{2}{21}$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{21}-\dfrac{2}{21}=\dfrac{25}{42}$

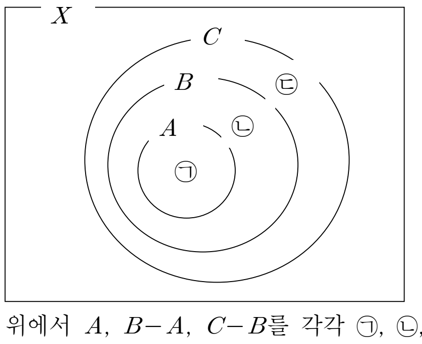
142) ②

공집합이 아닌 서로 다른 15개의 집합에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는

$15\times14\times13$ ------㉠

이때, 세 부분집합이 A, B, C로 나열되었을 때, $A\subset B\subset C$를 만족시켜야 하므로 다음 그림과 같고 다음 세 조건을 만족시켜야 한다.

$A\ne\phi$이고 $B-A\ne\phi$이고 $C-B\ne\phi$



위에서 $A,\ B-A,\ C-B$를 각각 ㉠, ㉡, ㉢이라 하고 이 부분에 들어갈 원소의 개수로 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) ㉡ : 1개, ㉢ : 1개

1, 2, 3, 4 중 ㉡과 ㉢에 들어갈 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수는

4×3

이 각각에 대하여 ㉠에 2개가 들어가는 경우의 수는 1이고 ㉠에 1개가 들어가는 경우의 수는 2이므로 경우의 수는

3

그러므로 이 경우의 수는

$4\times3\times3$
(ii) ㉡ : 1개, ㉢ : 2개
1, 2, 3, 4중 ㉡과 ㉢에 원소를 배정하는 경우의 수는
$4\times{}_3C_2=4\times3$
나머지 원소 1개는 ㉠에 들어가야 하므로 경우의 수는
$4\times3\times1=4\times3$
(iii) ㉡ : 2개, ㉢ :1개
(ii)와 같은 방법으로 하면 경우의 수는
4×3
따라서 구하는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned}P(E)&=\frac{4\times3\times3+4\times3\times2}{15\times14\times13}\\&=\frac{4\times3\times5}{15\times14\times13}\\&=\frac{2}{7\times13}\\&=\frac{2}{91}\end{aligned}$$

143) 121
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=5-2^2=1$
이때, $Y=10X+1$이므로
$E(Y)=E(10X+1)$
$=10E(X)+1$
$=10\times2+1=21$
$V(Y)=V(10X+1)$
$=100V(X)$
$=100\times1=100$
따라서
$E(Y)+V(Y)=21+100=121$

144) 168
(i) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 4, 0, 0인 경우
흰 공의 개수가 4인 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 x, 나머지 두 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 각각 y, z라 하면
$x+y+z=6$에서 $x\geq0$, $y\geq2$, $z\geq2$이어야 한다.
$y-2=y'$, $z-2=z'$이라 하면
$x+y'+z'=2$ (단, x, y', z'은 음이 아닌 정수) ……㉠
㉠을 만족시키는 순서쌍 (x, y', z')의 개수는
${}_3H_2={}_4C_2=6$
이 각각에 대하여 흰 공이 4개 들어갈 상자를 택하는 경우의 수가
${}_3C_1=3$
이므로 이 경우의 수는
$6\times3=18$
(ii) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 3, 1, 0인 경우
흰 공의 개수가 3, 1, 0인 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=6$에서 $x\geq0$, $y\geq1$, $z\geq2$이어야 한다.
$y-1=y'$, $z-2=z'$이라 하면
$x+y'+z'=3$ (단, x, y', z'은 음이 아닌 정수) ……㉡
㉡을 만족시키는 순서쌍 (x, y', z')의 개수는
${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$
이 각각에 대하여 흰 공이 3개, 1개 들어갈 상자 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
이므로 이 경우의 수는
$10\times6=60$
(iii) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 2, 2, 0인 경우
흰 공의 개수가 2, 2, 0인 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=6$에서 $x\geq0$, $y\geq0$, $z\geq2$이어야 한다.
$z-2=z'$이라 하면
$x+y+z'=4$ (단, x, y, z'은 음이 아닌 정수)
……㉢
㉢을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z')의 개수는
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
이 각각에 대하여 흰 공이 2개 들어갈 상자 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
이므로 이 경우의 수는
$15\times3=45$
(iv) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 2, 1, 1인 경우
흰 공의 개수가 2, 1, 1인 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=6$에서 $x\geq0$, $y\geq1$, $z\geq1$이어야 한다.
$y-1=y'$, $z-1=z'$이라 하면
$x+y'+z'=4$ (단, x, y', z'은 음이 아닌 정수) ……㉣
㉣을 만족시키는 순서쌍 (x, y', z')의 개수는
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
이 각각에 대하여 흰 공이 2개 들어갈 상자 1개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
이므로 이 경우의 수는
$15\times3=45$
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$18+60+45+45=168$

145) ⑤
모든 순서쌍 (a_1, a_2, b_1, b_2)의 개수는
${}_6C_2\times{}_6C_2=15\times15$
이때 $A\cap B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건은
$a_2<b_1$ 또는 $b_2<a_1$이다.
따라서 $A\cap B=\varnothing$을 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, b_1, b_2)의 개수는 다음과 같다.
(i) $a_2<b_1$일 때
$a_2=2$일 때 ${}_1C_1\times{}_4C_2=1\times6=6$
$a_2=3$일 때 ${}_2C_1\times{}_3C_2=2\times3=6$
$a_2=4$일 때 ${}_3C_1\times{}_2C_2=3\times1=3$
따라서 $6+6+3=15$
(ii) $b_2<a_1$일 때
(i)과 마찬가지이므로 이 경우의 수도
15이다.
이상에서 $A\cap B=\varnothing$일 확률은
$\frac{15+15}{15\times15}=\frac{2}{15}$
이므로 여사건의 확률에 의해 $A\cap B\neq\varnothing$일 확률은
$1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$

146) ⑤
확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.
(i) $f(8)>f(14)$에서 $m<\frac{8+14}{2}$, 즉 $m<11$
(ii) $f(2)<f(16)$에서 $m>\frac{2+16}{2}$, 즉 $m>9$
(i), (ii)에서 m은 자연수이므로 $m=10$
$P(X\leq6)=P\left(Z\leq\frac{6-10}{4}\right)=P(Z\leq-1)$
$=0.5-P(0\leq Z\leq1)=0.1587$

147) ①
원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_4=210$
1부터 10까지의 자연수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 수의 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면
$A_0=\{3, 6, 9\}$, $A_1=\{1, 4, 7, 10\}$, $A_2=\{2, 5, 8\}$
이다. 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아니려면 집합 X는 세 집합 A_0, A_1, A_2 중 두 집합에서 각각 2개의 원소를 택하여 이 네 수를 원소로 해야 한다.
(i) A_0, A_1인 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_4C_2=18$
(ii) A_0, A_2인 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_3C_2=9$
(iii) A_1, A_2인 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_3C_2=18$
(i), (ii), (iii)에서 집합 X의 서로 다른 세 원소의
합이 항상 3의 배수가 아닌 경우의 수는
$18+9+18=45$
따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

148) 37

A가 반드시 빵을 1개 이상 받는 경우의 수는 A에게 빵 1개와 우유 1개를 먼저 주고, 남은 빵 2개와 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수와 같다.

(ⅰ) A에게 남은 빵 2개를 주는 경우
남은 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$이다.

(ⅱ) A에게 남은 빵 2개 중 1개를 주는 경우
남은 빵 1개를 B 또는 C에게 나누어 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$이므로 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$이다.

(ⅲ) A에게 남은 빵을 주지 않는 경우
남은 빵 2개를 B 또는 C 중 한 명에게 모두 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$이므로 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$이다.
또 남은 빵 2개를 학생 B와 C에게 각각 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 1이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개씩 주고 남은 우유 1개를 세 명의 학생에게 주는 경우의 수가 3이므로 경우의 수는 $1 \times 3 = 3$이다.
따라서 A에게 남은 빵을 주지 않는 경우의 수는 $12 + 3 = 15$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$10 + 12 + 15 = 37$이다.

149) 525

자연수 a, b, c에 대하여 $a < b$이고 조건 (나)에서 $a + b > c$이므로 $c \geq 4$이다.

(ⅰ) $c = 2k\,(k = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10)$인 경우
$b = 2k - 1$일 때 $2 \leq a \leq 2k - 2$
$b = 2k - 2$일 때 $3 \leq a \leq 2k - 3$
⋮
$b = k + 1$일 때 $a = k$
이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$(2k-3) + (2k-5) + (2k-7) + \cdots + 3 + 1$
$= \dfrac{(k-1)\{(2k-3)+1\}}{2} = (k-1)^2$

(ⅱ) $c = 2k + 1\,(k = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9)$인 경우
$b = 2k$일 때 $2 \leq a \leq 2k - 1$
$b = 2k - 1$일 때 $3 \leq a \leq 2k - 2$
⋮
$b = k + 2$일 때 $k \leq a \leq k + 1$
이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$(2k-2) + (2k-4) + (2k-6) + \cdots + 4 + 2$
$= \dfrac{(k-1)\{(2k-2)+2\}}{2} = k(k-1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$\displaystyle\sum_{k=2}^{10}(k-1)^2 + \sum_{k=2}^{9}k(k-1)$
$\displaystyle= \sum_{k=1}^{9}k^2 + \sum_{k=1}^{9}(k^2 - k) = \sum_{k=1}^{9}(2k^2 - k)$
$= 2 \times \dfrac{9 \times 10 \times 19}{6} - \dfrac{9 \times 10}{2} = 525$

150) ⑤

$E(Y) = E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 1 + 6^2 = 37$

151) 84

(가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_3H_{14} = {}_{16}C_2 = 120$

(나)에서 $a \neq 2$, $b \neq 2$, $c \neq 2$

(ⅰ) a, b, c 중 1개가 2인 경우
$a = 2$일 때, $b + c = 12$를 만족시키는 b와 c의 모든 순서쌍 (b, c)의 개수는 ${}_2H_{12}$이고 $(2, 10)$, $(10, 2)$인 경우를 제외하면 ${}_2H_{12} - 2 = 11$
$b = 2$, $c = 2$인 경우의 수도 각각 11이므로 a, b, c 중 1개가 2인 경우의 수는 $11 \times 3 = 33$

(ⅱ) a, b, c 중 2개가 2인 경우
순서쌍 (a, b, c)를 구하면 $(2, 2, 10)$, $(2, 10, 2)$, $(10, 2, 2)$의 세 가지 경우가 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $120 - (33 + 3) = 84$

152) 135

한 번의 시행 결과로 나타나는 경우의 확률은 다음과 같다.

① A가 가진 공의 개수가 1개 늘어나는 경우:
A가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이므로 확률은 $\dfrac{1}{4}$

② A가 가진 공의 개수의 변화가 없는 경우:
A, B가 던진 주사위의 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 확률은 $\dfrac{1}{2}$

③ A가 가진 공의 개수가 1개 줄어드는 경우:
A가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이므로 확률은 $\dfrac{1}{4}$

한편, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 되는 경우는 4번째 시행에서 ①이 일어나고 3번째 시행에서는 ① 또는 ②가 일어나야 한다.

(ⅰ) 3번째 시행에서 ①이 일어나는 경우
첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ③이 일어나거나 두 시행 모두 ②가 일어나야 하므로
$\left\{2! \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{32}$

(ⅱ) 3번째 시행에서 ②가 일어나는 경우
첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ②가 일어나야 하므로 $\left({}_2C_1 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{1}{2}$
$= \dfrac{1}{8}$

그러므로 구하는 확률은 $\left(\dfrac{3}{32} + \dfrac{1}{8}\right) \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{128}$

따라서 $p = 128$, $q = 7$이므로 $p + q = 135$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.