

[나승민/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사 연습(2/2) |

| 나승민 (성균관대 수학과)

이투스 네오, 미래탐구목동

다들 6평 잘보세요

instagram @cremath_david

| 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY, 일산중로학원

다 잘 보면 재미없죠. 일부는 망쳐야지.

hansungeun.com/texta.html - 공개 모의고사 페이지

썬밋 N제(미적분), 썬밋 N제(수학2) 출간 - 책 사주세요.

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

1

5지선다형

1. $\tan\frac{4}{3}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-2}$ 의 값은? [2점]

- ① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

3. 실수 p 가 모든 양수 a 에 대하여

$$\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[3]{a}} = a^p$$

를 만족시킬 때, p 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ $\frac{7}{6}$ ⑤ 1

4. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 두 곡선 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 와 $y = \sin 2x$ 가

만나는 점의 개수는? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

5. 함수 $f(x) = x+2$ 에 대하여

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = k \left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)^2$$

일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{24}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{3}{8}$
 ④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{13}{24}$

6. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{h} = -18$$

을 만족시키는 실수 k 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

7. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2ax & (x < 1) \\ bx^2 + x + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$ 에서 미분가능할 때, ab 의 값은?

(단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

8. 2와 20 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 20$$

의 모든 항의 합이 143일 때, a_6 의 값은? [3점]

- ① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11
 ④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

9. $\sin\theta \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) < 0$ 이고 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ 일 때,

$\tan(\pi + \theta) \times \sin(\pi + \theta)$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{9}{20}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{20}$
 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

10. 수열 $\{a_n\}$ 가

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 15, \quad \sum_{k=1}^{10} ka_k = 25$$

이고 $a_{11} = \frac{1}{10}$ 을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} k^2(a_k - a_{k+1})$ 의

값은? [4점]

- ① 15 ② 20 ③ 25
 ④ 30 ⑤ 35

11. 악의 과학자 석태가 만들어낸 신종 바이러스 모르나19에 의한 감염병은 회복이 불가능하다. 전 인구의 1%가 모르나19에 감염되어 있는 때부터 t (일) 후 모르나19에 감염된 사람의 비율 p 는

$$p = \frac{a^t}{99+a^t} \quad (\text{단, } a \text{는 } 1 \text{보다 큰 상수이다.})$$

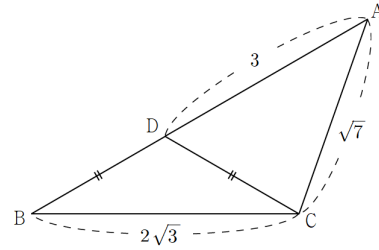
를 만족시킨다. 전 인구의 20%가 감염된 때부터 20일 후 전 인구의 50%가 감염되었다면, 전 인구의 50%가 감염된 때부터 30일 후 감염된 사람의 비율은? [4점]

- ① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{7}{8}$
- ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

12. 그림과 같이 삼각형 ABC와 선분 AB 위의 점 D는

$$\overline{BC} = 2\sqrt{3}, \overline{CA} = \sqrt{7}, \overline{AD} = 3, \overline{BD} = \overline{CD}$$

를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



- ① $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ② $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ③ 5
- ④ $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}\sqrt{6}$

13. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1}$$

를 만족시킨다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{n+1}{3} \dots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

i) $n=2$ 일 때,

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} \text{에 } n=1 \text{을 대입하면}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 1 \text{이므로 } (*) \text{이 성립한다.}$$

ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때 $(*)$ 이 성립한다고 가정하자.

$$a_{k+1} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \dots + \frac{a_{k-1}}{k} + \frac{a_k}{k+1}$$

과

$$a_k = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_3}{4} + \dots + \frac{a_{k-1}}{\boxed{(가)}}$$

에서 $a_{k+1} - a_k = \frac{a_k}{k+1}$ 이므로

$$a_{k+1} = \boxed{(나)} \times a_k \\ = \boxed{(나)} \times \frac{k+1}{3} = \boxed{(다)}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

i), ii)에 의하여 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{n+1}{3} \text{이다.}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$ 라 할 때, $f(5) \times g(14) + h(12)$ 의 값은? [4점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 11

14. 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ 에 대하여 방정식

$$f'(f(x)) = f'(x)$$

의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이

$$\alpha, \beta, 2, \gamma, 4$$

이다. $\beta\gamma$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$
 ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

15. 자연수 n 에 대하여 $n < x < n+1$ 를 만족시키고

$$\frac{x^2 + 4x}{4}$$

의 값이 정수가 되는 실수 x 의 개수를 a_n 이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1}$ 의 값은? [4점]

- ① 152 ② 156 ③ 160
 ④ 164 ⑤ 168

단답형

16. $\int_0^2 (3x^2 + 1)dx - \int_3^2 (3x^2 + 1)dx$ 의 값을 구하여라.

[3점]

17. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & (x < 2) \\ x + b & (x \geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 $2f(2) = f(0)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

[3점]

18. 두 양수 a, b 가

$$a^{-2}(a^2 + ab) = 3, \quad (a^3 + b^3)(a+b)^{-2} = 4$$

를 만족시킬 때, ab 의 값을 구하여라. [3점]

19. 곡선 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 로 둘러싸인

도형의 넓이가 직선 $x = k$ 에 의하여 이등분될 때,
상수 k 의 값을 구하여라. [3점]

20. $f(1) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 $g(2) = 0$ 이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = (x-2)g(x)$$

를 만족시킨다. $f(3)$ 의 값을 구하여라. [4점]

21. 두 함수

$$f(x) = -x^2 + 8x + 3, \quad g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

에 대하여 $0 \leq x \leq 6$ 에서 정의된 함수 $h(x)$ 는

$$h(x) = (g \circ f)(x)$$

이다. $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 만족시키는 $0 \leq x \leq 6$ 인 모든 실수 x 의 값들을 x_1, x_2, \dots, x_k 라 할 때,

$$k + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)$$

의 값을 구하여라. (단, k 는 자연수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(2) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $g(x) = g(2)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
 (나) 실수 a 에 대하여 $g(2)$ 의 값을 $h(a)$ 라 할 때, $h(a)$ 는 $a=5$ 일 때 최댓값 27을 가진다.

$f(6)$ 의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. ${}_3H_4 \times {}_3C_2$ 의 값은? [2점]

- ① 33 ② 36 ③ 39
④ 42 ⑤ 45

24. 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(B|A) = \frac{1}{5}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{7}{8}$
④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

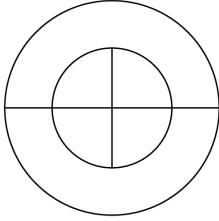
25. $\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^7$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는? [3점]

- ① 162 ② 164 ③ 166
④ 168 ⑤ 170

26. 세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 홀수인 자연수의 개수는? [3점]

- ① 58 ② 56 ③ 54
④ 52 ⑤ 50

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 서로 다른 동심원 두 개와 큰 원의 지름과 작은 원의 지름으로 나뉜 도형이 있다. 이 도형 내부에 만들어지는 6개의 영역에 각각 한 가지 색만을 이용하여 칠한다. 서로 다른 여섯 가지 색을 모두 사용하여 색칠할 수 있는 방법의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 360 ② 390 ③ 420
 ④ 450 ⑤ 480

28. 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 한 장씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 카드를 한 장씩 차례로 꺼낼 때, 첫 번째 카드에 적힌 수보다 큰 수가 적힌 카드가 네 번째에 처음으로 나올 확률은? (단, 꺼낸 카드는 주머니에 다시 넣지 않는다.) [4점]

- ① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$
 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 8 이하의 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

- (가) $a \leq b \leq c \leq d \leq e$
 (나) $b+4=d$

30. 검은색 볼펜 4자루와 흰색 볼펜 4자루를 남학생 2명, 여학생 3명에게 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어주는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

- (가) 각 남학생은 적어도 1개의 검은색 볼펜을 받는다.
 (나) 아무것도 받지 못하는 학생은 없다.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-2x} \right)^{\frac{1}{x}}$ 의 값은? [2점]

- ① e ② e^2 ③ e^3
④ e^4 ⑤ e^5

24. 실수 θ 가 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -2$ 를 만족시킬 때,

$\tan\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 = 12, \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 8$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
 ④ 4 ⑤ 8

26. 함수 $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{x+a}$ 의 극솟값이 e 일 때,
 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ $2e$ ⑤ $3e$

27. 함수 $f(x) = \tan 2x$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(kh) - f(0)}{h} = 10$$

을 만족시키는 실수 k 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

28. 양의 실수 t 에 대하여 원점에서 곡선

$$y = k \ln(x-t)$$

에 접선을 그었을 때, 접점의 y 좌표가 1이 되도록 하는

실수 k 의 값을 $f(t)$ 라 하자. $f(a) = \frac{1}{2}$ 일 때, $a \times f'(a)$ 의

값은? [4점]

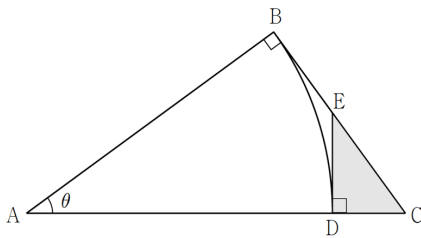
- ① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{8}$

단답형

29. 그림과 같이 $\overline{AC}=1$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC가

있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 \overline{AB} 인 원과 선분 AC의 교점을 D라 하고, 점 D를 지나고 선분 AC와 수직인 직선과 선분 BC의 교점을 E라 하자. $\angle BAC = \theta$ 라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이는 $S(\theta)$ 이다.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$ 라 할 때, $32a$ 의 값을 구하여라. [4점]



30. 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = f(x)e^x$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.
- (나) 모든 실수 x 에 대하여 $g''(x)g''(-x) \geq 0$ 이다.

함수 $h(x) = |g(x) - 3|$ 이 $x = \alpha$, $x = \beta$ 에서 극댓값을 가지고 $h(\alpha) = h(\beta)$ 일 때, $f(6)$ 의 값을 구하여라. [4점]

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(3, -1)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24. 두 초점 사이의 거리가 10인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의

접근선의 방정식은? [3점]

- ① $y = \pm \frac{6}{5}x$ ② $y = \pm \frac{5}{4}x$ ③ $y = \pm \frac{4}{3}x$
④ $y = \pm \frac{3}{2}x$ ⑤ $y = \pm 2x$

25. 점 (4, a)에서 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하자. $m_1 + m_2 = 8$ 일 때, $m_1 m_2$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{45}{7}$ ② 6 ③ $\frac{39}{7}$
 ④ $\frac{36}{7}$ ⑤ $\frac{33}{7}$

26. $|\overline{AB}| = 6$ 인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위의 두 점 C, D가

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30, \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 30$$

을 만족시킬 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [3점]

- ① $5\sqrt{3}$ ② 10 ③ $5\sqrt{5}$
 ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $5\sqrt{7}$

27. 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC와 점 P가

$$2\vec{PA} + a\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$$

을 만족시킨다. 삼각형 PBC의 넓이가 $3\sqrt{3}$ 일 때, a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{2}$ ② 3 ③ $\frac{5}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

28. 두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 초점이 F,

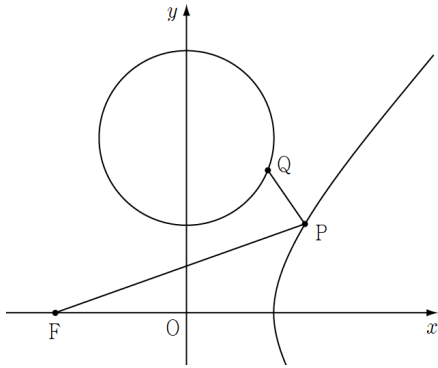
꼭짓점이 F'인 포물선이 만나는 점 중에서 y 좌표가 양수인 점을 P라 하자. $|F'P| = 5$ 일 때, b^2 의 값은?

(단, $b^2 < 36$ 이다.) [4점]

- ① 18 ② 21 ③ 24
 ④ 27 ⑤ 30

단답형

29. 점 $F(-3, 0)$, x 좌표가 양수이며 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위를 움직이는 점 P , 원 $x^2 + (y-4)^2 = r^2$ 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ} + \overline{FP}$ 의 최솟값이 7일 때, r^2 의 값을 구하여라. (단, 쌍곡선과 원은 서로 만나지 않는다.) [4점]



30. 좌표평면에서 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점 A , 중심이 O 이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 한 점 B 에 대하여 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 이 성립한다. 점 P 가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{OP}|$ 의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라 하자. $16(m^2 + M^2)$ 의 값을 구하여라. [4점]

(가) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq -\frac{15}{16}$
 (나) $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} \leq \frac{15}{8}$

[나승민/한성은 모의고사 6월 연습(2/2) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	①	03	④	04	②	05	⑤
06	⑤	07	②	08	③	09	①	10	③
11	④	12	②	13	④	14	①	15	③
16	30	17	10	18	32	19	2	20	12
21	82	22	64						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	①	25	④	26	③	27	①
28	②	29	100	30	255				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	②	24	④	25	⑤	26	②	27	③
28	⑤	29	4	30	24				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	③	25	①	26	③	27	②
28	④	29	4	30	20				

COMMENT 12

$\overline{BD} = a$ 라 하면 $\cos(\angle DBC) = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{12+(a+3)^2-7}{4\sqrt{3}(a+3)}$ 이다.

풀면 $a^3 + 6a^2 + 2a - 36 = 0$ 에서 $a = 2$ 이다.

COMMENT 13

$$f(k) = k, \quad g(k) = \frac{k+2}{k+1}, \quad h(k) = \frac{k+2}{3}$$

COMMENT 14

$f'(x) = 3x^2 - 12x + a$ 는 $x = 2$ 에 대하여 대칭이므로 $f'(a) = f'(b)$ 이면 $a = b$ 또는 $a = 4 - b$ 이다.

따라서 구하는 방정식의 근은 $f(x) = x$ 또는 $f(x) = 4 - x$ 의 근과 같다.

곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(2, 2)$ 를 변곡점으로 가진다. 대칭성에 의해 $\alpha = 0$ 이고,

$f(x) = x(x-2)(x-4) + x$ 이다. $f(x) = 4 - x$ 를 풀면 $\beta\gamma = 2$ 이다.

COMMENT 15

$n = 2k - 1$ 일 때, $2k - 1 < x < 2k$ 이고 이 범위에서 $\frac{x^2 + 4x}{4}$ 의 값은 $k^2 + k - \frac{3}{4}$ 보다 크고 $k^2 + 2k$ 보다 작다.

이 범위의 정수는 $k^2 + k$ 부터 $k^2 + 2k - 1$ 까지 k 개이므로 $a_n = k = \frac{n+1}{2}$ 이다.

$n = 2k$ 일 때, $2k < x < 2k + 1$ 이고 이 범위에서 $\frac{x^2 + 4x}{4}$ 의 값은 $k^2 + 2k$ 보다 크고 $k^2 + 3k + \frac{5}{4}$ 보다 작다.

이 범위의 정수는 $k^2 + 2k + 1$ 부터 $k^2 + 3k + 1$ 까지 $k + 1$ 개이므로 $a_n = k + 1 = \frac{n+2}{2}$ 이다.

COMMENT 21

$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 양수 x 값은 1, 3, 9, 11, 17, 19, 25, 27, ...이다. $0 \leq x \leq 6$ 일 때 $3 \leq f(x) \leq 19$ 이므로

$h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 것은 $f(x)$ 의 값이 3, 9, 11, 17, 19일 때이고 이 중 17인 x 값은 2개다.

$k = 6$ 이고 $f(1) + f(2) + \dots + f(6) = 3 + 9 + 11 + 17 + 17 + 19 = 76$ 이다.

COMMENT 22

$g'(2) = 0$ 이고 $g(x) = g(2)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 두 가지 존재한다.

경우1) 그 삼중근 같은 형태.

경우2) 두 극솟값이 서로 같은 형태

(나)를 보면, $y = g(x)$ 의 그래프에서 x 축을 최대한 아래쪽으로 걸었을 때 $g(2)$ 의 값이 27이다.

경우2)는 $g(2)$ 의 최댓값이 0이므로 불가능하다.

경우1)에서 비율관계 치면 $g(x) = k(x-2)^3(x-6) + b$ 이고

$g(2) - g(5) = 27$ 에서 $k = 1$ 이다. $f(6) = g'(6) = 64$ 이다.

※ 비율관계라 함은 대충 $g(x) = k(x-2)^3(x-c) + b$ 에서 $g'(5) = 0$ 이면 $c = 6$ 임을 의우는 것이다.

COMMENT 확률과 통계 29

$$d \leq e \leq 8 \Leftrightarrow b+4 \leq e \leq 8 \Leftrightarrow b \leq e-4 \leq 4 \text{이므로}$$

$$1 \leq a \leq b \leq e-4 \leq 4$$

에서 (a, b, d, e) 를 선택하는 경우의 수는 ${}_4H_3$ 이고

e 는 $b, b+1, b+2, b+3, b+4$ 의 다섯 가지 경우가 가능하다.

COMMENT 확률과 통계 30

Case1) 검은색 볼펜을 [3, 1]로 나뉘는 경우의 수 : $2 \times {}_5H_1 = 10$

Case2) 검은색 볼펜을 [2, 2]로 나뉘는 경우의 수 : ${}_5H_1 = 5$

Case3) 검은색 볼펜을 [2, 1, 1]로 나뉘는 경우 : ${}_3C_1 \times 3 \times {}_5H_2 = 135$

Case4) 검은색 볼펜을 [1, 1, 1, 1]로 나뉘는 경우 : ${}_3C_2 \times {}_5H_3 = 105$

COMMENT 미적분 28

접점의 x 좌표를 u 라 하면 $\frac{u}{u-t} = \ln(u-t)$ 이고 $k = \frac{u-t}{u} = \frac{1}{\ln(u-t)}$ 이다.

$k = \frac{1}{2}$ 일 때 $u-t = e^2$ 이고 $u = 2e^2, t = e^2$ 이다.

식 $\frac{u}{u-t} = \ln(u-t)$ 를 미분하고 값을 대입하면 $\frac{du}{dt} = \frac{3}{2}$ 이고 $f'(a) = -\frac{1}{8e^2}$ 이다.

※ 접점의 x 좌표를 $e^{\frac{1}{k}+t}$ 로 놓고 풀면 더 간단하다는 것은 비밀.

COMMENT 미적분 30

조건 (가)에서 $g'(0) = 0$ 이고, 조건 (나)에서 $g''(x) = 0$ 의 두 근은 서로 별마다.

여기까지에서 $g(x) = a(x-2)^2 e^x$ 이고 $h(x)$ 를 췌려보면 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 6이다.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 4)$$

COMMENT 기하 27

선분 BC의 $1:a$ 내분점을 D라 하자. 점 P는 선분 AD의 $(a+1):2$ 내분점이므로

삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{2}{a+3}$ 배이다.

COMMENT 기하 28

$\overline{FF'} = 2c$, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{FP} = 7$ 이고, 포물선을 췌려보면 $\overline{F'H} = 7 - 2c$, $\overline{FH} = 4c - 7$ 이다.

두 삼각형 $\overline{PHF'}$, \overline{PHF} 에서 피타고라스 때려서 비교하면 $c = 3$ 이다.

COMMENT 기하 29

$G(3, 0)$ 이라 하자. 두 점 F, G 가 쌍곡선의 초점이므로 $\overline{PG}=x$ 라 하면 $\overline{PF}=x+4$ 이다.
 $\overline{PQ}=y$ 라 하면 $\overline{PQ}+\overline{FP}=x+y+4$ 이다. $x+y$ 의 최솟값은 3이고, 이는 두 점 P, Q 가
 원의 중심과 G 를 연결한 선분 위에 있을 때 얻을 수 있다. 원의 반지름의 길이를 r 이라 하면
 $x+y=5-r$ 에서 $r=2$ 이다.

COMMENT 기하 30

두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 가 수직이므로 $|\overline{AB}| = \sqrt{5}$ 이다.

선분 AB 의 중점을 M 이라 하면 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

(가)에서 점 P 는 M 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 인 원과

그 내부의 점이다. (부등식의 영역이라서 교과범위가 아니라는 생각이 살짝 들지만 그냥 그대로 넣어두자.)

(나)에서 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = \sqrt{5}$ 이므로 점 P 는 그 수직인 직선하고 뭐 알지?
 점 P 의 자취는 오른쪽 그림의 색칠한 영역이다. 대충 120° 뜨구요.

