

[권구승/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사 연습(2/2) |

| 권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 미래탐구(목동), 이투스앤써.

가장 잘하는 학생이 가장 열심히 하더라.

| 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY, 일산종로학원

내일부터 열심히 해야지.

hansungeun.com/texta.html - 공개 모의고사 페이지

썬밋 N제(미적분), 썬밋 N제(수학2) 출간 - 책 사주세요.

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

5지선다형

1. $\sin \frac{\pi}{6}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2. $f(x) = x^3 + x^2 + x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

3. $\log_3 2 = a$, $\log_2 5 = b$ 일 때, $\log_2 60$ 을 a , b 로 옳게 나타낸 것은? [3점]

- ① $a+b+2$ ② $a+b+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{a}+b+2$
④ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2$ ⑤ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}$

4. 부등식 $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \leq 0$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

5. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{6a_1}{a_2 + a_3} = 1$$

일 때, $\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_8}{a_4}$ 의 값은? [3점]

- ① 20 ② 18 ③ 16
 ④ 14 ⑤ 12

6. $\tan\theta < 0$ 이고 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 일 때, $\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
 ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

7. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x < a) \\ x-4 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(x-2)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -3t + 6$$

이다. $t=0$ 부터 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

9. 두 실수 a, c 와 양수 b 에 대하여 함수

$$f(x) = a \cos bx + c$$

의 최솟값은 0, 최댓값은 4이다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 근 중 양수인 근 중 가장 작은 것이 π , 두 번째로 작은 것이 2π 일 때, abc 의 값은? [4점]

- ① -8 ② -4 ③ -2
 ④ 4 ⑤ 8

10. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = 3x^2 + x \int_0^2 t f'(t) dt + \int_0^2 f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

11. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) + ax$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 의 역함수가 존재하도록 하는 실수 a 의 최솟값은? [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

12. 사차함수 $f(x) = x(x-2)(x-5)(x-8)$ 에 대하여

$$\int_m^{m+2} f'(x) dx < 0$$

를 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합은? [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

13. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값은 $m=10$, $m=11$ 일 때 동일한 최댓값을 갖는다. $\sum_{k=m}^{m+4} |S_k|$ 의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m 의 값은? [4점]
- ① 19 ② 20 ③ 21
 ④ 22 ⑤ 23

14. 자연수 n 에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$ 과 곡선 $y=\frac{k}{x}$ 이 네 점에서 만나고, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 $\sqrt{3}n^2$ 이 되도록 하는 양수 k 의 값을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^7 a_n$ 의 값을 구하는 과정은 다음과 같다.

원 $x^2+y^2=n^2$ 과 곡선 $y=\frac{k}{x}$ 의 제1사분면의 두 교점은 서로 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 이 두 점을 $P\left(a, \frac{k}{a}\right)$, $Q\left(\frac{k}{a}, a\right)$ ($a > \frac{k}{a}$)라 하자. P 는 원 $x^2+y^2=n^2$ 위의 점이므로

$$a^2 + \frac{k^2}{a^2} = n^2 \dots (*)$$

이고, 두 점 P , Q 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 $R\left(-a, -\frac{k}{a}\right)$, $S\left(-\frac{k}{a}, -a\right)$ 라 하면 R 과 S 는 모두 원과 곡선의 교점이다. 사각형 $PQRS$ 는 직사각형이고

$$\overline{PQ} = \boxed{(가)} \times \left(a - \frac{k}{a}\right), \quad \overline{QR} = \boxed{(가)} \times \left(\frac{k}{a} + a\right)$$

이므로 $\overline{PQ} \times \overline{QR}$ 과 (*)를 이용하여 사각형 $PQRS$ 의 넓이를 구하면

$$2 \times \sqrt{n^4 - \boxed{(나)}} = \sqrt{3}n^2$$

이다. 따라서 $\sum_{n=1}^7 a_n = \boxed{(다)}$ 이다.

- 위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)에 알맞은 식을 $f(k)$, (다)에 알맞은 수를 q 라 할 때, $f(p)+q$ 의 값은? [4점]
- ① 39 ② 41 ③ 43
 ④ 45 ⑤ 47

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{x \mid f(x)f'(x) = 0, x \text{는 실수}\} = \{0, 3\}$
 (나) 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)| dx = f(t) + f(0)$$

이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
 ㄴ. $f(3) = 27$
 ㄷ. 방정식 $f(x) - f'(k)x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 합은 12이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + (2n - 1)$$

을 만족시킨다. $a_4 = 6$ 일 때, $a_3 + a_6$ 의 값을 구하여라.
 [3점]

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 의 극댓값이 7일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. [3점]

18. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4 = 32, \quad \sum_{n=1}^8 a_n = 4 \sum_{n=3}^{10} a_n$$

를 만족시킬 때, a_6 의 값을 구하여라. [3점]

19. 곡선 $y = -2x^2 + 5x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

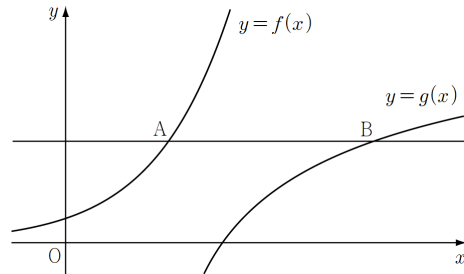
20. 그림과 같이 x 축에 평행한 직선이 두 함수

$$f(x) = 2^{x-1}, \quad g(x) = \log_2(x-2)$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AB} = 4$
 (나) 점 A의 x 좌표는 점 B의 y 좌표와 같다.

점 B의 x 좌표를 구하여라. [4점]



21. 수열 $\{a_n\}$ 은 a_1 이 자연수이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - d & (a_n \geq 0) \\ a_n + d & (a_n < 0) \end{cases} \quad (d \text{는 자연수})$$

이다. $a_n < 0$ 이 되도록 하는 n 의 최솟값을 m 이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 과 m 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 + a_{m-2} = 28$

(나) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 126$

$\sum_{k=1}^p a_{2k} \geq 50$ 을 만족시키는 모든 자연수 p 의 값의 합을 구하여라. (단, m 은 3 이상의 자연수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 0이다.

(나) 방정식 $f(g(x))=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 이 세 실근의 합은 6, 곱은 -10 이다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. ${}_4P_3$ 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 6
④ 12 ⑤ 24

24. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B^c) = \frac{1}{3}$$

일 때, $P(B|A)$ 의 값은? (단, A^c 는 A 의 여사건이다.)

[3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

25. 어느 도시 시민의 2%가 신종 바이러스 모르나19에 감염되어 있다. 모르나19에 대한 진단검사는 감염자의 98%를 양성으로 진단하고, 비감염자의 4%를 양성으로 진단한다. 이 도시의 시민 중 임의로 1명을 선택하여 진단검사를 돌리는 시행을 한다. 진단결과 양성이 떴을 때, 이 시민이 모르나19에 감염되어 있을 확률은?
[3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

26. 1, 2, 3, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 있다. 이 카드 중 한 장을 꺼내어 확인하고 다시 넣는 시행을 2번 반복할 때, 2장의 카드에 적힌 숫자의 평균이 3일 확률은? [3점]

- ① $\frac{3}{25}$ ② $\frac{4}{25}$ ③ $\frac{1}{5}$
 ④ $\frac{6}{25}$ ⑤ $\frac{7}{25}$

27. A, B, C를 포함한 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. A와 B가 서로 이웃하고, B와 C가 서로 이웃하도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

- ① 12 ② 14 ③ 16
 ④ 18 ⑤ 20

28. 집합 $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 모든 일대일 대응 $f: X \rightarrow X$ 중 임의로 하나를 선택할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

집합
 $\{x | f(x) < f(0), x \text{는 집합 } X \text{의 홀수인 원소}\}$
 의 원소의 개수는 2이다.

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a \leq b \leq c \leq d \leq e$

(나) $2(b-a) = e-d$

30. 흰 공 15개와 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 있다. 이 21개의 공을 3명의 학생에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하여라. (단, 흰 구슬끼리는 서로 구별하지 않고, 같은 숫자가 적힌 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 모든 학생은 각각 숫자가 적힌 공을 2개씩 받는다.

(나) 모든 학생이 각각 받은 흰 공의 개수는 자신이 받은 숫자가 적힌 공에 있는 두 숫자 중 작지 않은 숫자보다 크다.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + \ln(1-x)}{x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

24. $f(x) = \sin(2x-2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

25. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n + \frac{n}{n+1} < a_n < b_n + \frac{n+1}{n}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

26. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - 2t$$

에서 $t = a$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$ 이다. 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

27. 자연수 n 에 대하여 원점과 점 $P_n(1, n)$ 을 이은 선분이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n 이라 하자.

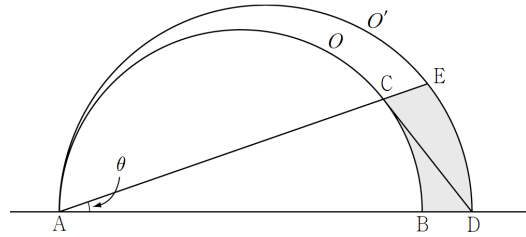
$$\theta_3 - \theta_2 = \theta_p - \theta_q$$

가 되도록 하는 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 최댓값은?
(단, p, q 는 자연수이다.) [3점]

- ① 41 ② 43 ③ 45
④ 47 ⑤ 49

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O 가 있다. 반원 위의 점 C에서 곡선 O 에 접하는 직선과 선분 AB의 연장선이 만나는 점을 D, 선분 AD를 지름으로 하는 반원을 O' , 선분 AC의 연장선과 반원 O' 이 만나는 점을 E라 하자. $\angle CAB = \theta$ 라 할 때, 두 곡선 O, O' 및 두 선분 BD, CE로 둘러싸인 도형 BDEC의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

단답형

29. 두 함수 $f(x) = e^x + 1$, $g(x) = kx^2 + 1 (k > 0)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^n + 2\{g(x)\}^n}{2\{f(x)\}^n + \{g(x)\}^n}$$

이라 하자. 집합 $\{x | h(x) = 1\}$ 의 원소의 개수가 2가 되도록 하는 k 의 값을 $\frac{e^q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p 와 q 는 정수이다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

와 함수

$$g(x) = kxe^{-x+1} \quad (k > 0)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(f(x)) - 2}{x - 2} = 4$$

(나) 함수 $|(f \circ g)(x) - g(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(k+2)$ 의 최댓값을 구하여라. [4점]

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF} = 3$ 일 때, 점 P의 x 좌표는? [2점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ $\frac{11}{12}$ ⑤ 2

24. 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$ 이고, 두 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-3\vec{b}$ 가 서로 수직일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 2 ③ 1
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

25. 쌍곡선 $\frac{(x-4)^2}{6} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1$ 의 두 초점을 F, F'라

할 때, 삼각형 OFF'의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

[3점]

- ① 6 ② $\frac{11}{2}$ ③ 5
 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 4

26. 좌표평면에서 A(1, -1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (4, 3)$ 인 직선 위에 두 점 P, Q가 있다.

점 B(-1, 0)에 대하여 $|\overline{PB} + \overline{QB}|$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

27. 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 x 좌표가 양수인 꼭짓점을 A,

y 좌표가 양수인 꼭짓점을 B라 하자. 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때,

\overline{OP} 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$
 ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{11}}{2}$

28. 반지름의 길이가 1인 원 O 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}, \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} < 0$$

이 성립한다. 원 O 위를 움직이는 점 P에 대하여 네 점 A, B, C, P를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이의 최댓값은? [4점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
 ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

단답형

29. 평행사변형 ABCD와 점 P가

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{BD}$$

를 만족시킨다. 삼각형 PAB의 넓이가 6일 때,
평행사변형 ABCD의 넓이를 구하여라. [4점]

30. 포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점이 F이고, 제1사분면에
있는 포물선 위의 두 점 A, B가 다음을 만족시킨다.

$$(가) \angle OFA + \angle OFB = \pi$$

$$(나) \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 24$$

$\overline{FA} + \overline{FB}$ 의 값을 구하여라. [4점]

[권구승/한성은 모의고사 6월 연습(2/2) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	③	03	③	04	①	05	①
06	④	07	②	08	⑤	09	①	10	④
11	②	12	③	13	⑤	14	③	15	④
16	23	17	5	18	8	19	11	20	6
21	52	22	108						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	③	25	⑤	26	④	27	①
28	②	29	150	30	978				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	④	25	①	26	②	27	⑤
28	⑤	29	6	30	12				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	③	25	①	26	②	27	④
28	③	29	48	30	16				

COMMENT 10

$\int_0^2 t f'(t) dt = a$, $\int_0^2 f(t) dt = b$ 라 두면 $f(x) = 3x^2 + ax + b$ 이다.

$\int_0^2 t(6t+a) dt = a$, $\int_0^2 (3t^2 + at + b) dt = b$ 를 연립하여 푼다.

COMMENT 13

S_n 은 $n=12$, $n=13$ 일 때 최댓값을 가진다. 대칭축이 $x=12.5$ 이므로 $S_n = ax(x-25)$ 이다.

S_{25} 주변을 적당히 살펴보면, $\sum_{k=m}^{m+4} |S_n|$ 의 값은 $m=23$ 일 때 최소이다.

COMMENT 15

$f(0)=0$ 이고 $|f'(x)|=f'(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이다. 켤러보면 $f(x) = (x-3)^3 + 27$ 이다.

방정식 $f(x) - f'(k)x = 0$ 에서 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 k 는

곡선과 직선의 접점의 x 좌표가 $x=0$ 일 때 0, 6이고 접점의 x 좌표가 $\frac{9}{2}$ 일 때 $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$ 이다.

COMMENT 21

잘 켤러보면 a_1 부터 a_{m-1} 까지는 등차수열을 이룬다.

(가)에서 $m-1$ 개의 수 a_1, a_2, \dots, a_{m-1} 의 평균은 14이다.

$\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 14 \times (m-1)$ 이므로 $m=10$ 이다.

$a_5 = 14$, $a_9 > 0$, $a_{10} \leq 0$ 을 만족하는 자연수 d 는 3이다. $\{a_n\}$ 은

26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, ...

이고 $\sum_{k=1}^p a_{2k} \geq 50$ 을 만족시키는 자연수 p 는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이다.

COMMENT 22

방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하자.

방정식 $f(g(x))=0$ 의 실근은 방정식 $g(x)=\alpha$ 의 실근과 방정식 $g(x)=\beta$ 의 실근의 합집합이다.

$g(x)$ 가 이차함수이므로 $g(x)$ 의 극솟값은 α 이고, $g(x)=\beta$ 가 두 개의 실근을 갖는다.

$g(x)$ 의 대칭성을 켤러보면 세 실근은 -1, 2, 5이다. $g(x) = (x-2)^2 + \alpha$ 이므로 $\beta - \alpha = 9$ 이다.

$f(x) = (x-\alpha)(x-\alpha-9)^2$ 에서 극댓값은 $f(\alpha+3) = 108$ 이다.

COMMENT 확률과 통계 26

모두 다른 것으로 봐야 한다. 전체 경우의 수는 5×5 이고,

숫자의 평균이 3인 경우의 수 : (2, 4), (4, 2), $(3_a, 3_a)$, $(3_b, 3_b)$, $(3_a, 3_b)$, $(3_b, 3_a)$ 의 6가지

COMMENT 확률과 통계 28

사건의 경우의 수는 다음과 같다.

Case1) $f(0)=2 : {}_3C_2 \times 2! \times 4! = 144$

Case2) $f(0)=3 : {}_3C_2 \times {}_3C_1 \times 3! \times 3! = 324$

Case3) $f(0)=4 : {}_3C_2 \times {}_3C_2 \times 4! \times 2! = 432$

Case4) $f(0)=5 : {}_3C_2 \times 5! = 360$

구하는 확률은 $\frac{1260}{7!} = \frac{1}{4}$

별해 : 네 수 $f(0), f(1), f(3), f(5)$ 중 $f(0)$ 이 두 번째 큰 수가 되어야 한다.

COMMENT 확률과 통계 29

$b-a$ 와 $e-d$ 에 대하여 분류하자. b 와 d 가 결정되면 a 와 e 는 하나로 결정된다.

Case1) $b-a=0, e-d=0$ 일 때, $1 \leq b \leq c \leq d \leq 10$ 에서 ${}_{10}H_3 = 220$ 이다.

Case2) $b-a=1, e-d=2$ 일 때, $2 \leq b \leq c \leq d \leq 8$ 에서 ${}_7H_3 = 84$ 이다.

Case3) $b-a=2, e-d=4$ 일 때, $3 \leq b \leq c \leq d \leq 6$ 에서 ${}_4H_3 = 20$ 이다.

Case4) $b-a=3, e-d=6$ 일 때, $4 \leq b \leq c \leq d \leq 4$ 에서 ${}_1H_3 = 1$ 이다.

COMMENT 확률과 통계 30

Case1) 숫자 공을 11/22/33로 나눠주는 경우 : $3! \times {}_3H_6 = 168$

Case2) 숫자 공을 11/23/23로 나눠주는 경우 : $3 \times {}_3H_5 = 63$

Case3) 숫자 공을 12/12/33로 나눠주는 경우 : $3 \times {}_3H_5 = 63$

Case4) 숫자 공을 12/13/23로 나눠주는 경우 : $3! \times {}_3H_4 = 90$

Case5) 숫자 공을 13/13/22로 나눠주는 경우 : $3 \times {}_3H_4 = 45$

COMMENT 미적분 27

$\tan \theta_n = n$ 이다. $\tan(\theta_3 - \theta_2) = \tan(\theta_p - \theta_q)$ 은 $\frac{3-2}{1+3 \times 2} = \frac{p-q}{1+pq}$ 이므로

$$pq - 7p + 7q + 1 = 0 \Leftrightarrow (p+7)(q-7) = -50$$

이다. $p+7$ 과 $q-7$ 은 정수이므로 가능한 (p, q) 순서쌍은 $(43, 6), (18, 5), (3, 2)$ 이다.

COMMENT 미적분 28

원 O 의 중심을 O , 원 O' 의 중심을 O' 이라 하자. $\overline{OD} = \frac{1}{\cos 2\theta}$ 이므로 원 O' 의 지름은 $1 + \frac{1}{\cos 2\theta}$ 이다.

원 O 의 반지름 1을 r , 원 O' 의 반지름 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos 2\theta}$ 를 R 이라 하자. 도형 ADE의 넓이는 삼각형 AO'E의 넓이와

부채꼴 O'ED의 넓이의 합이므로 $\frac{1}{2}R^2 \sin 2\theta + \frac{1}{2}R^2(2\theta) = R^2\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta\right)$ 이다.

마찬가지로 도형 ABC의 넓이는 $r^2\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta\right)$ 이다. $S(\theta)$ 는 이 두 값의 차이므로 $S(\theta) = (R^2 - r^2)\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta\right)$ 이다.

COMMENT 미적분 29

$f(x) > 1, g(x) \geq 1$ 이다. $g(x) = f(x)$ 이면 $h(x) = 1, g(x) > f(x)$ 이면 $h(x) = 2,$

$g(x) < f(x)$ 이면 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

두 곡선 $y = e^x + 1, y = kx^2 + 1$ 이 $x = t (t > 0)$ 에서 접해야 한다. $\begin{cases} e^t + 1 = kt^2 + 1 \\ e^t = 2kt \end{cases}$ 에서 $t = 2, k = \frac{e^2}{4}$ 이다.

COMMENT 미적분 30

(가)에서 $f(2) = 2, f'(2) = 2$ 이다.

(나)에서 $h(x) = f(g(x)) - g(x)$ 라 하자.

$h(0) = 0$ 이므로 $|h(x)|$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하려면 $h'(0) = 0$ 이다.

$h'(x) = f'(g(x))g'(x) - g'(x)$ 에서 $h'(0) = g'(0)\{f'(0) - 1\}$ 에서 $f'(0) = 1$ 이다.

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ 이다.

$f(x) = x$ 의 근이 0과 2이므로 $h(x) = 0$ 의 근은 $g(x) = 0$ 또는 $g(x) = 2$ 인 x 값들이다.

$g(x)$ 의 최댓값 k 가 2를 넘으면 안 되는 각, k 의 최댓값은 2이다.

COMMENT 기하 28

$\angle ABC = \frac{2}{3}\pi$ 이다. 선분 CP가 원의 지름일 때 사각형 넓이가 최대이다.

COMMENT 기하 29

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BP}) - \overrightarrow{BP} + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BP}$
이므로 P는 선분 BD를 1:3으로 내분하는 점이다.

COMMENT 기하 30

$\angle OFA = \theta$, $\overline{FA} = a$, $\overline{FB} = b$ 라 하자. θ 를 예각, $a < b$ 라 뒤도 좋기에 행복하다.

$\cos\theta = \frac{6-a}{a}$, $\cos\theta = \frac{b-6}{b}$ 이므로 $a = \frac{6}{1+\cos\theta}$, $b = \frac{6}{1-\cos\theta}$ 이다.

$\overrightarrow{FA} = (-a\cos\theta, a\sin\theta)$, $\overrightarrow{FB} = (b\cos\theta, b\sin\theta)$ 이므로

$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 24 \Leftrightarrow ab(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 24 \Leftrightarrow \frac{36}{1-\cos^2\theta}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 24$$

이다. $a = 4$, $b = 12$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 이다.