2022 EBS 수능특강 수학1 1. 지수와 로그 (2)

이 서적은 「저작권법」에 따라 보호됩니다.
본 자료의 무단 배포, 도용 시, 저작권법에 의거하여 책임을 질 수 있습니다.

p5 1번 단순변형

1. $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} \times \sqrt[4]{(-4)^8}$ 의 값은?

① -8 ② -4 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

p5 2번 단순변형

2. $\sqrt[18]{3} \times \frac{\sqrt[30]{3}}{\sqrt[15]{3}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{3}}$ 를 만족시키는 4 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하면?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

p7 3번 단순변형

3. $\left(\sqrt{\sqrt[3]{27^4}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{9^3}}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^k$을 만족시키는 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

p7 4번 단순변형

4. $\left\{2^{3\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}}\right\}^{\sqrt{2}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $2^{\sqrt{2}}$
④ 4 ⑤ $2^{2\sqrt{2}}$

p9 5번 단순변형

5. $4^x = 72$, $y = \log_2 \frac{32}{9}$ 을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $2x+y$의 값은?

① 2 ② 5 ③ 8
④ 11 ⑤ 14

p9 6번 단순변형

6. $\dfrac{\log_8 \sqrt{810} + \log_8 \sqrt{3.6} + \frac{1}{6}}{\log_8 63 - \log_8 3.5}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

p11 7번 단순변형

7. $\log_2 8\sqrt{3}+2\log_{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

p11 8번 단순변형

8. $\frac{1}{\log_{36}3}-\frac{1}{\log_8 3}+\log_3 54$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

p13 9번 단순변형

9. $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$일 때, $\log 10800$의 값은?

① -4.0333 ② -2.0333 ③ 0.0333

④ 2.0333 ⑤ 4.0333

p13 10번 단순변형

10. $\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$일 때, 다음 중 $\log_9 10$를 a, b로 나타낸 것은?

① $\frac{1+ab}{2a}$ ② $\frac{2+ab}{2a}$ ③ $\frac{3+ab}{2a}$

④ $\frac{1+ab}{a}$ ⑤ $\frac{2+ab}{a}$

p14 1번 단순변형

11. $a>0$, $a\neq 1$일 때, $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt[6]{a}}{a\sqrt{a}}}$ 의 값은?

① $\sqrt{a}$ ② $\sqrt[3]{a}$ ③ $\sqrt[4]{a}$

④ $\sqrt[6]{a}$ ⑤ $\sqrt[12]{a}$

p14 3번 단순변형

12. 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^{-\frac{1}{12}}=6$, $b^{-\frac{1}{3}}=12$, $c^{-\frac{1}{4}}=36$일 때, $\frac{a}{bc}$의 값은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

p14 4번 단순변형

13. 두 실수 x, y에 대하여 $16^{x}=81$, $36^{y}=27$일 때, $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}$의 값은?

① -5 ② -2 ③ 3
④ 3 ⑤ 5

p14 5번 응용변형

14. 10보다 작은 자연수 a, b에 대하여 $\sqrt[3]{\frac{2^{a}\times 3^{b}}{3}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

p15 6번 단순변형

15. $\frac{1}{2}log_{2}24+3\log_{2}\sqrt{2}-\log_{2}\sqrt{6}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

p15 7번 단순변형

16. $(3\log_{2}3+\log_{4}9)(2\log_{3}4+\log_{9}8)$의 값은?

① 14 ② 12 ③ 10
④ 8 ⑤ 6

p15 9번 단순변형

17. $a=\log 0.03$일 때, 다음 중 $\log 2700$을 a로 나타낸 것은?

① $2a+2$ ② $2a+4$ ③ $2a+8$
④ $3a+4$ ⑤ $3a+8$

p15 10번 단순변형

18. 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $\sqrt[4]{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt{c}$일 때, $\log_{a}\sqrt[4]{b}+\log_{b}\frac{1}{\sqrt[6]{c}}+\log_{c}\sqrt[8]{a}$의 값을 구하면?

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{47}{144}$ ③ $\frac{49}{144}$
④ $\frac{17}{48}$ ⑤ $\frac{53}{144}$

p16 1번 응용변형

19. 임의의 실수 x에 대하여 x의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f_n(x)$라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $n \geq 2$)

[보 기]

ㄱ. $a = 2021$ 일 때,
$f_2(a) + f_3(a) + f_4(a) + \cdots + f_{10}(a) = 14$

ㄴ. -5의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때,
$f_2(b) + f_3(b) + f_4(b) + \cdots + f_{10}(b) = 4$

ㄷ. $f_n(x) = 3$ 을 만족하는 실수 x와 2 이상의 정수 n이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

p16 2번 응용변형

20. $a = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1} + \sqrt[3]{2} - 1}$일 때, $\dfrac{a + a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$의 값은?

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}+1$
④ $\sqrt[3]{2}-1$ ⑤ $\sqrt[3]{2}+1$

p16 3번 응용변형

21. 양수 a에 대하여 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 5$일 때, $\dfrac{a^2 + a^{-2} - 2}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 5}$의 값은?

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4
④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

p16 4번 응용변형

22. 두 실수 a, b에 대하여 $20^a = \dfrac{1}{3}$, $20^b = 5$일 때, $4^{\frac{1-a-b}{1-b}}$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

p16 5번 응용변형

23. $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{12\sqrt[3]{3}}}\right)^{36}$의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)에 대하여 $m+n$의 최댓값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

p17 6번 응용변형

24. 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $4\log_a c - 3\log_b c = 0$일 때, $\log_a b + \log_b a = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하면? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

p17 7번 응용변형

25. $1 < a < b$인 두 실수 a, b가
$4a : 2\log_a b = b : 4\log_b a = (2a+b) : 4$를 만족시킬 때,
$\log_a b + \log_b a$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

p17 8번 응용변형

26. $a>1$, $0<b<1$인 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 두 집합 A, B를 $A=\{2,\ \log_2 ab\}$, $B=\{1,\ 3,\ \log_2 a\sqrt{b^3}\}$라 하자. $A-B=\phi$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① 32 ② 64 ③ 128
④ 256 ⑤ 512

p17 9번 단순변형

27. 좌표평면에서 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 위의 점 P와 원점 O 사이의 거리를 l_{P}라 하자. $2\log_2 l_{\mathrm{P}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

p16 1번 응용변형

28. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $n^2-11n+28$의 n제곱근 중에서 음의 실수만 존재하면 $f(n)=-4n$이고, 양의 실수만 존재하면 $f(n)=n$이고, 음의 실수와 양의 실수가 모두 존재하면 $f(n)=2n$이고, 음의 실수와 양의 실수가 모두 존재하지 않으면 $f(n)=0$이다. 이때, $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$의 값은?

① 32 ② 33 ③ 34
④ 35 ⑤ 36

p14 4번 응용변형

29. 두 양수 a, b와 두 실수 x, y가 다음 조건을 만족시킨다. $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하면?

(단, p, q는 서로소인 자연수)

(가) $a^{4x}=\dfrac{1}{(2b)^{5y}}$
(나) $a^{2}b^{3}=32$
(다) $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{5y}=4$

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

p18 3번 응용변형

30. 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$A_m=\left\{(a,\ b)\,|\,a=\log_2\dfrac{m}{b}\text{이고 } a,\ b\text{는 자연수}\right\}$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?30.

[보 기]

ㄱ. $n(A_3)=1$
ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^{k}$이면 $n(A_m)=k$이다.
ㄷ. $n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)+\cdots+n(A_{20})=18$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 해설

1	①	2	④	3	②	4	④	5	③
6	④	7	⑤	8	③	9	⑤	10	①
11	⑤	12	④	13	②	14	③	15	④
16	①	17	⑤	18	②	19	④	20	③
21	⑤	22	①	23	⑤	24	④	25	②
26	③	27	④	28	①	29	③	30	④

1. 답: ①

[출제범위] 거듭제곱근의 성질

<풀이>

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}\times\sqrt[4]{(-4)^8}=\sqrt[5]{-\frac{1}{2^5}}\times\sqrt[4]{4^8}$$

$$=\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}\times\sqrt[4]{(4^2)^4}$$

$$=-\frac{1}{2}\times4^2$$

$$=-8$$

필수 개념

▸ 거듭제곱근의 성질

n이 2이상의 정수이고 $a>0$일 때,

(1) n이 홀수일 때,

① $\sqrt[n]{a^n}=a$

② $\sqrt[n]{(-a)^n}=-a$

(2) n이 짝수일 때,

① $\sqrt[n]{a^n}=a$

② $\sqrt[n]{(-a)^n}=a$

2. 답: ④

[출제범위] 거듭제곱근의 성질

<풀이>

15, 18, 30의 최소공배수는 90이므로 90제곱근으로 통일하여 나타낼 수 있다.

즉, $\sqrt[18]{3}\times\dfrac{\sqrt[30]{3}}{\sqrt[15]{3}}=\sqrt[90]{3^5}\times\dfrac{\sqrt[90]{3^3}}{\sqrt[90]{3^6}}$

$$=\sqrt[90]{\frac{3^5\times3^3}{3^6}}$$

$$=\sqrt[90]{3^2}$$

$$=\sqrt[45]{3}$$

$\sqrt[18]{3}\times\dfrac{\sqrt[30]{3}}{\sqrt[15]{3}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{3}}$ 이므로

$\sqrt[45]{3}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{3}}$ 에서 $\sqrt[45]{3}=\sqrt[mn]{3}$

즉, $mn=45$

따라서 이를 만족시키는 4 이상의 두 자연수 m, n은

$m=5$, $n=9$ 또는 $m=9$, $n=5$이므로 $m+n=14$이다.

필수 개념

▸ 거듭제곱근의 성질

근호 안의 수를 소인수 분해한 후, 거듭제곱근의 성질을 이용한다. m, n이 2이상의 정수이고 $a>0$, $b>0$일 때,

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(2) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(4) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (p는 자연수)

3. 답: ②

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$$\left(\sqrt{\sqrt[3]{27^4}}\times\frac{1}{\sqrt[4]{9^3}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[6]{3^{12}}\times\frac{1}{\sqrt[4]{3^6}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=(3^2\times3^{-\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$$

$$=(3^{2-\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$$

$$=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$$

$$=3^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}$$

$$=3^{\frac{1}{3}}$$

따라서 $k=\dfrac{1}{3}$이다.

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 m, $n(m\geq2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n=\dfrac{b^n}{a^n}$

4. 답: ④

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$$\left\{2^{3\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}}\right\}^{\sqrt{2}}=\left(2^{3\sqrt{2}}\times2^{-2\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$
$$=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$$
$$=2^2$$
$$=4$$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 m, $n(m\geq2)$이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

5. 답: ③

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$4^x=72$에서 $x=\log_4 72$이므로

$$2x+y=2\log_4 72+\log_2\frac{32}{9}$$
$$=\log_2 72+\log_2\frac{32}{9}$$
$$=\log_2\left(72\times\frac{32}{9}\right)$$
$$=\log_2 2^8$$
$$=8$$

다른풀이

$y=\log_2\frac{32}{9}$에서 $2^y=\frac{32}{9}$이고,

$4^x=72$에서 $2^{2x}=72$이다.

$$2^{2x}\times2^y=72\times\frac{32}{9}$$

$$2^{2x+y}=256$$

따라서 $2x+y=\log_2 256=\log_2 2^8=8$이다.

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$

(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

6. 답: ④

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$$\frac{\log_8\sqrt{810}+\log_8\sqrt{3.6}+\frac{1}{6}}{\log_8 63-\log_8 3.5}=\frac{\frac{1}{6}\log_2 810+\frac{1}{6}log_2 3.6+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\log_2 63-\frac{1}{3}log_2 3.5}$$
$$=\frac{\frac{1}{6}(\log_2 810+\log_2 3.6+1)}{\frac{1}{3}(\log_2 63-\log_2 3.5)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_2(810\times3.6)+1}{\log_2\left(\frac{63}{3.5}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_2 2^2 3^6+1}{\log_2(2\times3^2)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3+6\log_2 3}{1+2\log_2 3}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3(1+2\log_2 3)}{1+2\log_2 3}$$
$$=\frac{3}{2}$$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

7. 답: ⑤

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$$\log_2 8\sqrt{3}+2\log_{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}=\log_2 8\sqrt{3}+2\log_{2^{-2}}\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\log_2 8\sqrt{3}-\frac{2}{2}\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\log_2 8\sqrt{3}-\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\log_2\frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\log_2 16$$
$$=\log_2 2^4$$
$$=4$$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$　(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$　(4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

8. 답: ③

[출제범위] 로그의 밑의 변환

<풀이>

$$\frac{1}{\log_{36}3}-\frac{1}{\log_8 3}+\log_3 54=\log_3 36-\log_3 8+\log_3 54$$
$$=\log_3\frac{36\times 54}{8}$$
$$=\log_3(9\times 27)$$
$$=\log_3 3^5$$
$$=5$$

필수 개념

▸ 밑의 변환 공식

$a\neq 1$, $a>0$, $b>0$일 때,

(1) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq 1)$

(2) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq 1,\ c>0)$

9. 답: ⑤

[출제범위] 상용로그

<풀이>

$$\log 10800=\log(2^2\times 3^3\times 10^2)$$
$$=\log 2^2+\log 3^3+\log 10^2$$
$$=2\log 2+3\log 3+2\log 10$$
$$=2\times 0.3010+3\times 0.4772+2$$
$$=4.0333$$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$　(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$　(4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

▸ 상용로그의 값

임의의 양수 N은 $N=a\times 10^n$ $(1\leq a<10,\ n$은 정수$)$의 꼴로 나타낼 수 있다. 즉,

$\log N=\log(a\times 10^n)=\log a+\log 10^n=n+\log a$

10. 답: ①

[출제범위] 로그의 성질

<풀이>

$\log_3 2=\frac{1}{\log_2 3}=\frac{1}{a}$, $\log_3 5=b$이므로

$$\log_9 10=\log_{3^2}10$$
$$=\frac{1}{2}\log_3 10$$
$$=\frac{1}{2}\log_3(2\times 5)$$
$$=\frac{1}{2}(\log_3 2+\log_3 5)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+b\right)$$
$$=\frac{1+ab}{2a}$$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

▸ 밑의 변환 공식

$a\neq1$, $a>0$, $b>0$일 때,

(1) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq1)$

(2) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq1,\ c>0)$

11. 답: ⑤

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt[6]{a}}{a\sqrt{a}}}=\sqrt[3]{\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}}}\times\sqrt[4]{\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a\times a^{\frac{1}{2}}}}$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{12}}}\times\frac{a^{\frac{1}{24}}}{a^{\frac{3}{8}}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{12}-\frac{3}{8}}$$

$$=a^{\frac{12+1-2-9}{24}}$$

$$=a^{\frac{1}{12}}$$

$$=\sqrt[12]{a}$$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 $m,\ n(m\geq2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

12. 답: ④

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$a^{-\frac{1}{12}}=6$에서 $a=6^{-12}=(2\times3)^{-12}=2^{-12}\times3^{-12}$

$b^{-\frac{1}{3}}=12$에서 $b=12^{-3}=(2^2\times3)^{-3}=2^{-6}\times3^{-3}$

$c^{-\frac{1}{4}}=36$에서 $c=36^{-4}=(2^2\times3^2)^{-4}=2^{-8}\times3^{-8}$

따라서

$$\frac{a}{bc}=\frac{2^{-12}\times3^{-12}}{2^{-14}\times3^{-11}}$$

$$=\frac{2^{14}\times3^{11}}{2^{12}\times3^{12}}$$

$$=\frac{4}{3}$$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 $m,\ n(m\geq2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

13. 답: ②

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$16^x=81$에서 $2^{4x}=3^4$이므로 $2=3^{\frac{1}{x}}$ ---㉠

$36^y=27$에서 $6^{2y}=3^3$이므로 $6=3^{\frac{3}{2y}}$ ---㉡

이때, ㉠÷㉡에서

$3^{\frac{1}{x}-\frac{3}{2y}}=\frac{1}{3}=3^{-1}$이므로 $\frac{1}{x}-\frac{3}{2y}=-1$---㉢이다.

따라서 ㉢의 양변에 2를 곱하면

$\frac{1}{x}-\frac{3}{2y}=-1$에서 $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-2$이다.

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 m, $n(m\geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

14. 답: ③

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

$\sqrt[3]{\frac{2^a\times 3^b}{3}}=(2^a\times 3^{b-1})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{a}{3}}\times 3^{\frac{b-1}{3}}$에서

$\sqrt[3]{\frac{2^a\times 3^b}{3}}$의 값이 자연수가 되려면

$2^{\frac{a}{3}}\times 3^{\frac{b-1}{3}}$이 자연수가 되어야 하므로

a는 10보다 작은 3의 배수이므로

$a=3$ 또는 $a=6$ 또는 $a=9$이고,

또, b는 10보다 작고 $b-1$이 3의 배수이어야 하므로

$b=1$ 또는 $b=4$ 또는 $b=7$이다.

따라서 a, b의 최솟값은 각각 $a=3$, $b=1$이므로

$a+b$의 최솟값 m은 $m=3+1=4$이고,

a, b의 최댓값은 각각 $a=9$, $b=7$이므로

$a+b$의 최댓값 M은 $M=9+7=16$이다.

$\therefore\ M+m=16+4=20$

필수 개념

▸ 거듭제곱근이 자연수가 되는 미지수 구하기

$a^{\frac{m}{n}}$ (a는 소수)이 자연수이기 위한 조건

i) $mn>0$

ii) n은 m의 약수

15. 답: ④

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$$\frac{1}{2}log_2 24+3\log_2\sqrt{2}-\log_2\sqrt{6}=\log_2\sqrt{24}+\log_2(\sqrt{2})^3-\log_2\sqrt{6}$$
$$=\log_2 2\sqrt{6}+\log_2 2\sqrt{2}-\log_2\sqrt{6}$$
$$=\log_2\left(\frac{2\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)$$
$$=\log_2 4\sqrt{2}$$
$$=\log_2 2^{\frac{5}{2}}$$
$$=\frac{5}{2}$$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m}x=\frac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

16. 답: ①

[출제범위] 로그의 성질

<풀이>

$$(3\log_2 3+\log_4 9)(2\log_3 4+\log_9 8)$$
$$=(3\log_2 3+\log_{2^2}3^2)(2\log_3 2^2+\log_{3^2}2^3)$$
$$=(3\log_2 3+\log_2 3)\left(2\log_3 2+\frac{3}{2}log_3 2\right)$$
$$=4\log_2 3\times\frac{7}{2}log_3 2$$
$$=14\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}$$
$$=14$$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m}x=\frac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

▸ 밑의 변환 공식

$a\neq 1$, $a>0$, $b>0$일 때,

(1) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq 1)$

(2) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq 1,\ c>0)$

17. 답: ⑤

[출제범위] 상용로그

<풀이>

$a=\log 0.03$

$\quad =\log\dfrac{3}{100}$

$\quad =\log 3-\log 10^2$

$\quad =\log 3-2$

이므로 $\log 3=a+2$

따라서

$\log 2700=\log(3^3\times 10^2)$

$\qquad =\log 3^3+\log 10^2$

$\qquad =3\log 3+2$

$\qquad =3(a+2)+2$

$\qquad =3a+8$

필수 개념

▸ 상용로그의 값

임의의 양수 N은 $N=a\times 10^n$ $(1\le a<10,\ n$은 정수$)$의 꼴로 나타낼 수 있다. 즉,

$\log N=\log(a\times 10^n)=\log a+\log 10^n=n+\log a$

18. 답: ②

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$\sqrt[4]{a}=\sqrt[3]{b}$에서 $a^{\frac{1}{4}}=b^{\frac{1}{3}}$이므로 $b=a^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[3]{b}=\sqrt{c}$에서 $b^{\frac{1}{3}}=c^{\frac{1}{2}}$이므로 $c=b^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[4]{a}=\sqrt{c}$에서 $a^{\frac{1}{4}}=c^{\frac{1}{2}}$이므로 $a=c^2$

$\log_a\sqrt[4]{b}+\log_b\dfrac{1}{\sqrt[6]{c}}+\log_c\sqrt[8]{a}$

$=\dfrac{1}{4}\log_a b-\dfrac{1}{6}\log_b c+\dfrac{1}{8}\log_c a$

$=\dfrac{1}{4}\log_a a^{\frac{3}{4}}-\dfrac{1}{6}\log_b b^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{8}\log_c c^2$

$=\dfrac{3}{16}\log_a a-\dfrac{1}{9}\log_b b+\dfrac{1}{4}\log_c c$

$=\dfrac{3}{16}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{47}{144}$

다른풀이

$\sqrt[4]{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt{c}=k$라 하면

$a=k^4,\ b=k^3,\ c=k^2$이므로

$\log_a\sqrt[4]{b}+\log_b\dfrac{1}{\sqrt[6]{c}}+\log_c\sqrt[8]{a}$

$=\dfrac{1}{4}\log_a b-\dfrac{1}{6}\log_b c+\dfrac{1}{8}\log_c a$

$=\dfrac{1}{4}\log_{k^4}k^3-\dfrac{1}{6}\log_{k^3}k^2+\dfrac{1}{8}\log_{k^2}k^4$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{8}\times 2$

$=\dfrac{3}{16}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{47}{144}$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0,\ a\ne 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m}x=\dfrac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

19. 답: ④

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

x의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f_n(x)$라 할 때,

ㄱ. $a=2021$일 때, $a>0$이므로

n이 홀수이면 $f_n(x)=1$, n이 짝수이면 $f_n(x)=2$이다.

이때, $f_2(a)+f_3(a)+f_4(a)+\cdots+f_{10}(a)=2\times 5+4=14$이다.

(참)

ㄴ. -5의 세제곱근 중 실수인 것은 $b=\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$이고, $b<0$이므로

n이 홀수이면 $f_n(x)=1$, n이 짝수이면 $f_n(x)=0$이다.

이때, $f_2(b)+f_3(b)+f_4(b)+\cdots+f_{10}(b)=0\times 5+4=4$이다.

(참)

ㄷ. $f_n(x)$의 값은 다음과 같다.

(ⅰ) n이 홀수일 때, $f_n(x)=1$

(ⅱ) n이 짝수일 때,

$x>0$이면 $f_n(x)=2$, $x=0$이면 $f_n(x)=1$, $x<0$이면 $f_n(x)=0$

이므로

$f_n(x)=3$을 만족하는 실수 x와 2 이상의 정수 n이 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

필수 개념

▸ a의 n제곱근 중에서 실수의 개수

n이 2이상의 정수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	2개 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	1개 0	없다.
n이 홀수	1개 $\sqrt[n]{a}$	1개 0	1개 $\sqrt[n]{a}$

20. 답: ③

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$a=\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\sqrt[3]{2}}-1$에서

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)}+\sqrt[3]{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1}+\sqrt[3]{2}}$$
$$=\sqrt{\sqrt[3]{2^2}+2\sqrt[3]{2}+1}$$
$$=\sqrt{(\sqrt[3]{2}+1)^2}$$
$$=\sqrt[3]{2}+1$$

이므로 $a=\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\sqrt[3]{2}}-1=\sqrt[3]{2}+1-1=\sqrt[3]{2}$이다.

따라서 $a=\sqrt[3]{2}$이므로 $a^3=2$이고, $a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2}$이다.

이때, $\frac{a+a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}=\frac{a+a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\times\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{a^{\frac{3}{2}}+1}{a^3-1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}$$
$$=\sqrt{2}+1$$

이다.

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 m, $n(m\geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

21. 답: ⑤

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$에서

$$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}$$
$$=5^2-2$$
$$=23$$

이때, a^2+a^{-2}

$$=(a+a^{-1})^2-2aa^{-1}$$
$$=23^2-2$$
$$=527$$

$$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$$
$$=5^3-3\times 5$$
$$=110$$

따라서 $\frac{a^2+a^{-2}-2}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-5}$의 값을 구하면

$\frac{a^2+a^{-2}-2}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-5}=\frac{527-2}{110-5}=\frac{525}{105}=5$이다.

필수 개념

▸ 곱셈공식의 변형

(1) $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2$

(2) $a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1})$

(3) $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2$

(4) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

22. 답: ①

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

$20^a = \frac{1}{3}$, $20^b = 5$에서

$4 = \frac{20}{5} = \frac{20}{20^b} = 20^{1-b}$이므로

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1-a-b}{1-b}} &= (20^{1-b})^{\frac{1-a-b}{1-b}} \\ &= 20^{1-a-b} \\ &= 20 \times \frac{1}{20^a} \times \frac{1}{20^b} \\ &= 20 \times 3 \times \frac{1}{5} \\ &= 12 \end{aligned}$$

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 m, $n(m \geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ $(ab)^n = a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

23. 답: ⑤

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{12\sqrt[3]{3}}}\right)^{36} &= \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{2^2 \times 3 \times 3^{\frac{1}{3}}}}\right)^{36} \\ &= \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{2^2 \times 3^{\frac{4}{3}}}}\right)^{36} \\ &= \left(2^2 \times 3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{36}{mn}} \\ &= 2^{\frac{72}{mn}} \times 3^{\frac{48}{mn}} \end{aligned}$$

이때, $2^{\frac{72}{mn}} \times 3^{\frac{48}{mn}}$이 자연수가 되기 위해서는 $\frac{72}{mn}$, $\frac{48}{mn}$이 모두 자연수가 되어야 하므로

mn은 두 수 48, 72의 공약수가 되어야 한다.

이때, 두 수 48, 72의 최대공약수는 24이므로

mn은 24의 약수이다.

즉, mn은 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이고, $m+n$의 값이 최대가 되기 위해서는 $mn=24$일 때이다.

$mn=24$가 되는 순서쌍 $(m,\ n)$을 구하면

$(2,\ 12)$, $(3,\ 8)$, $(4,\ 6)$, $(6,\ 4)$, $(8,\ 3)$, $(12,\ 2)$이다.

따라서 $m+n$의 최댓값은 $m=2$, $n=12$ 또는 $m=12$, $n=2$일 때 $m+n=2+12=14$이다.

필수 개념

▸ 거듭제곱근이 자연수가 되는 미지수 구하기

$a^{\frac{m}{n}}$ (a는 소수)이 자연수이기 위한 조건

i) $mn>0$

ii) n은 m의 약수

24. 답: ④

[출제범위] 로그의 성질

<풀이>

$4\log_a c - 3\log_b c = 0$에서 $4\log_a c = \frac{3\log_a c}{\log_a b}$이다.

이때, $\log_a c \neq 0$ ($\because$ $c \neq 1$)이므로 $4 = \frac{3}{\log_a b}$에서

$\log_a b = \frac{3}{4}$이다.

따라서 $\log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$이므로

$p=12$, $q=25$이다.

$\therefore$ $p+q=12+25=37$

다른풀이

$4\log_a c - 3\log_b c = 0$에서 $\frac{4}{\log_c a} = \frac{3}{\log_c b}$이므로

$4\log_c b = 3\log_c a$이다.

즉, $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b = \frac{3}{4}$이므로 $\log_b a = \frac{4}{3}$이다.

따라서 $\log_a b + \log_b a = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$이므로

$p=12$, $q=25$이다.

$\therefore$ $p+q=12+25=37$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n = n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

▸ 밑의 변환 공식

$a\neq 1$, $a>0$, $b>0$일 때,

(1) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq 1)$

(2) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq 1,\ c>0)$

25. 답: ②

[출제범위] 로그의 성질

<풀이>

$b:4\log_b a=(2a+b):4$에서

$4(2a+b)\log_b a=4b$이므로 $\log_a b=\frac{2a+b}{b}$ ---㉠

$4a:2\log_a b=(2a+b):4$에서

$2(2a+b)\log_a b=16a$이므로 $\log_a b=\frac{8a}{2a+b}$---㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{2a+b}{b}=\frac{8a}{2a+b}$이므로

$4a^2+4ab+b^2=8ab$

$4a^2-4ab+b^2=0$

$(2a-b)^2=0$

$\therefore\ b=2a$

따라서 $b=2a$이므로

$\log_a b=\frac{2a+b}{b}=\frac{2a+2a}{2a}=2$이고,

$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore\ \log_a b+\log_b a=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0$, $a\neq 1$이고 $x>0$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n = n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

▸ 밑의 변환 공식

$a\neq 1$, $a>0$, $b>0$일 때,

(1) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq 1)$

(2) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq 1,\ c>0)$

26. 답: ③

[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

$A-B=\phi$이므로 $A\subset B$이다.

즉, $2\in B$이어야 하므로

$\log_2 a\sqrt{b^3}=2$에서 $a\sqrt{b^3}=4$이므로 $a^2b^3=16$---㉠이다.

또, $\log_2 ab\in B$이므로 $\log_2 ab=1$ 또는 $\log_2 ab=3$이다.

ⅰ) $\log_2 ab=1$일 때,

$\log_2 ab=1$에서 $ab=2$이므로 $b=\frac{2}{a}$를 ㉠에 대입하면

$a^2\times\frac{8}{a^3}=16$이다.

즉, $a=\frac{1}{2}$이고, $b=4$이다.

그런데 $a>1$, $0<b<1$이므로 조건을 만족하지 않는다.

ⅱ) $\log_2 ab=3$일 때,

$\log_2 ab=3$에서 $ab=8$이므로 $b=\frac{8}{a}$을 ㉠에 대입하면

$a^2\times\frac{512}{a^3}=16$이다.

즉, $a=32$이고, $b=\frac{1}{4}$이므로 조건을 만족한다.

따라서 ⅰ), ⅱ)에서 조건을 만족하는 두 양수 a, b는

$a=32$, $b=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{a}{b}=\frac{32}{\frac{1}{4}}=128$이다.

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0,\ a\neq 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m} x=\dfrac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

27. 답: ④

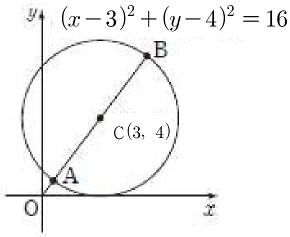
[출제범위] 로그의 기본성질

<풀이>

원 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$의 중심을 C라 하면

C$(3,\ 4)$이고 반지름의 길이는 4이다.

그림과 같이 원점 O와 중심 C를 잇는 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.



$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{3^2+4^2}=5,\ \overline{\mathrm{OA}}=5-4=1,\ \overline{\mathrm{OB}}=5+4=9$이므로

원 위의 점 P에 대하여 $1\leq l_{\mathrm{P}}\leq 9$이다.

이때, $2\log_2 l_{\mathrm{P}}=\log_2 (l_p)^2$의 값이 자연수이려면 $(l_{\mathrm{P}})^2=2^n$(n은 자연수)이어야 한다.

따라서 $1\leq l_{\mathrm{P}}\leq 9$에서 $1\leq (l_p)^2\leq 81$이므로

$(l_{\mathrm{P}})^2$의 값이 $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6$이 되는 점 P의 개수는 각각 2이므로 $2\log_2 l_{\mathrm{P}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는 12이다.

필수 개념

▸ 로그의 기본성질

$a>0,\ a\neq 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때,

(1) $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$ (2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (n은 실수)

(5) $\log_{a^m} x=\dfrac{1}{m}\log_a x$ (m은 실수)

28. 답: ①

[출제범위] 거듭제곱근

<풀이>

2 이상의 자연수 n에 대하여

ⅰ) $n^2-11n+28=0$일 때

즉, $n=4,\ n=7$일 때에는

0의 제곱근 중 음수와 양수는 존재하지 않으므로

$f(4)=f(7)=0$이다.

ⅱ) $n^2-11n+28<0$일 때

즉, $4<n<7$일 때

n이 홀수여야 n제곱근 중에서 음의 실수만 존재한다.

따라서 $f(5)=-20,\ f(6)=0$이다.

ⅲ) $n^2-11n+28>0$일 때

즉, $n<4$ 또는 $7<n$일 때에는

n이 짝수여야 n제곱근 중에서 음의 실수와 양의 실수가 모두 존재하므로 $f(2)=4,\ f(8)=16,\ f(10)=20$이고,

n이 홀수이면 n제곱근 중에서 양의 실수만 존재한다.

즉, $f(3)=3,\ f(9)=9$이다.

따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여

$f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값은

$4+3+0-20+0+0+16+9+20=32$이다.

필수 개념

▸ a의 n제곱근 중에서 실수의 개수

n이 2이상의 정수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	2개 $\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	1개 0	없다.
n이 홀수	1개 $\sqrt[n]{a}$	1개 0	1개 $\sqrt[n]{a}$

29. 답: ③

[출제범위] 지수법칙

<풀이>

조건 (가)에서

$a^{4x}=\dfrac{1}{(2b)^{5y}}=k\ (k>0)$로 놓으면

$a^{4x}=k$에서 $a^2=k^{\frac{1}{2x}}$ ---㉠,

$\dfrac{1}{(2b)^{5y}}=k$에서 $2b=k^{-\frac{1}{5y}}$이므로 $(2b)^3=k^{-\frac{3}{5y}}$ ---㉡이다.

이때, ㉠×㉡에서

$k^{\frac{1}{2x}-\frac{3}{5y}}=a^2\times(2b)^3=8a^2b^3$이다.

조건 (나)에서

$k^{\frac{1}{2x}-\frac{3}{5y}} = 8a^2b^3 = 8\times 32 = 2^8$이고,

조건 (다)에서 $\frac{1}{2x}-\frac{3}{5y}=4$이므로

$k^4 = 2^8 = (2^2)^4$

$\therefore\ k=4$ ($\because$ k는 실수)

즉, $a^{4x}=k$에서 $a^{4x}=4$이므로 $a^{2x}=2$이다.

따라서 $a^{2x}=2$이므로 $\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 값을 구하면

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{4-\frac{1}{2}}{2+1}=\frac{7}{6}\text{이다.}$$

이때, $p=6$, $q=7$이므로 $p+q=13$이다.

필수 개념

▸ 지수의 확장

(1) $a>0$이고 m, $n(m\geq 2)$이 정수일 때,

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ $(ab)^n = a^n b^n$ ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

30. 답: ④

[출제범위] 지수와 로그의 성질

ㄱ. A_3은 $a=\log_2\frac{3}{b}$에서 $2^a=\frac{3}{b}$이므로 $3=2^a\times b$이다.

이때, a, b가 자연수이므로 조건을 만족하는 자연수는 존재하지 않는다.

$\therefore\ A_3=\phi$

즉, $n(A_3)=0$이다. (거짓)

ㄴ. $m=2^k$이면 $A_m=A_{2^k}$이므로

A_m은 $2^a=\frac{2^k}{b}$에서 $2^k=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$A_m=\{(1,\ 2^{k-1}),\ (2,\ 2^{k-2}),\ (3,\ 2^{k-3}),\ \cdots,\ (k,\ 2^{k-k})\}$이다.

따라서 $n(A_m)=k$이다. (참)

ㄷ. A_m은 $a=\log_2\frac{m}{b}$에서 $2^a=\frac{m}{b}$이므로 $m=2^a\times b$이다.

그런데 a, b는 자연수이므로 $2^a\times b$는 짝수이므로

m이 홀수 이면 조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

즉, $n(A_1)+n(A_3)+n(A_5)+\cdots n(A_{19})=0$이다.

ㄴ에서 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이므로

$n(A_2)=1$, $n(A_4)=2$, $n(A_8)=3$, $n(A_{16})=4$이다.

$m\neq 2^k$인 짝수일 때, $2^a=\frac{m}{b}$에서

$A_6=\{(1,\ 3)\}$이므로 $n(A_6)=1$

$A_{10}=\{(1,\ 5)\}$이므로 $n(A_{10})=1$

$A_{12}=\{(1,\ 6),\ (2,\ 3)\}$이므로 $n(A_{12})=2$

$A_{14}=\{(1,\ 7)\}$이므로 $n(A_{14})=1$

$A_{18}=\{(1,\ 9)\}$이므로 $n(A_{18})=1$

$A_{20}=\{(1,\ 10),\ (2,\ 5)\}$이므로 $n(A_{20})=2$

이다.

따라서 $n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)+\cdots+n(A_{20})$의 값은

$n(A_2)+n(A_4)+n(A_6)+\cdots+n(A_{20})$와 같고

$n(A_2)+n(A_4)+n(A_6)+\cdots+n(A_{20})$

$=1+2+1+3+1+2+1+4+1+2=18$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

필수 개념

▸ 지수와 로그

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$일 때,

$a^x=b \quad\Leftrightarrow\quad x=\log_a b$

서지정보
저자 윤종구
발행처 나무아카데미
isbn 979-11-377-0485-5
제본형태 hwp pdf 파일
발행일 2021.04.02
가격 1,500원

값 1,500원
55410
9 791137 704855
ISBN 979-11-377-0485-5 (EPUB2)