

# 패턴 8

## 증명과정의 빈칸넣기

편집:우에노리에

1. **2009 교육청(3점)**

다음은 등식  $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$  가 성립함을 증명한 것이다.

[증명]

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) \\ &= \sum_{k=1}^n \boxed{\text{(가)}} \\ &= 4! \left\{ \frac{4!}{4!0!} + \frac{5!}{4!1!} + \cdots + \frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} \right\} \\ &= 4! \cdot \sum_{k=1}^n \boxed{\text{(나)}} \\ &= 4! \cdot \boxed{\text{(다)}} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- |   | (가)                     | (나)           | (다)           |
|---|-------------------------|---------------|---------------|
| ① | $\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$ | ${}_{k+2}C_3$ | ${}_{n+3}C_4$ |
| ② | $\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$ | ${}_{k+2}C_3$ | ${}_{n+4}C_5$ |
| ③ | $\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$ | ${}_{k+2}C_3$ | ${}_{n+3}C_4$ |
| ④ | $\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$ | ${}_{k+3}C_4$ | ${}_{n+3}C_4$ |
| ⑤ | $\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$ | ${}_{k+3}C_4$ | ${}_{n+4}C_5$ |

2. **2007 교육청(3점)**

다음은  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  일 때,  $A^n$ 을 구하는 과정이다.

< 다 음 >

모든 자연수  $n$ 에 대하여  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ 이라 하자.

행렬의 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하여

$A^{n+1} = A \cdot A^n = A^n \cdot A$ 이므로

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + c_n & b_n + d_n \\ 2c_n & 2d_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_n + 2b_n \\ c_n & c_n + 2d_n \end{pmatrix} \text{이다.}$$

따라서  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + c_n = a_n \\ b_{n+1} = b_n + d_n = a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = 2c_n = c_n \\ d_{n+1} = 2d_n = c_n + 2d_n \end{cases}$  이므로

$b_{n+1} = 2b_n + \boxed{\text{(가)}}$  이고,  $d_{n+1} = \boxed{\text{(나)}}$  이다.

$\therefore A^n = \boxed{\text{(다)}}$  이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- |  |   |
|--|---|
| (가) (나) (다)  | (가) (나) (다)   |
| <p>① <math>\frac{1}{2} \quad 2^n \quad \begin{pmatrix} 1 &amp; 2^n - 1 \\ 0 &amp; 2^{n+1} \end{pmatrix}</math></p> <p>③ <math>1 \quad 2^n \quad \begin{pmatrix} 1 &amp; 2^n - 1 \\ 0 &amp; 2^{n+1} \end{pmatrix}</math></p> <p>⑤ <math>1 \quad 2^{n+1} \quad \begin{pmatrix} 1 &amp; 2^n \\ 0 &amp; 2^n - 1 \end{pmatrix}</math></p> | <p>② <math>\frac{1}{2} \quad 2^{n+1} \quad \begin{pmatrix} 1 &amp; 2^{n+1} \\ 0 &amp; 2^n - 1 \end{pmatrix}</math></p> <p>④ <math>1 \quad 2^{n+1} \quad \begin{pmatrix} 1 &amp; 2^n - 1 \\ 0 &amp; 2^n \end{pmatrix}</math></p> |

3. 2009 교육청(3점)

다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

i)  $n=1$ 일 때,

(좌변)=(우변)= (가) 이므로 주어진 등식은 성립한다.

ii)  $n=k(k \geq 1)$ 일 때, 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \\ &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} \text{이다.} \end{aligned}$$

$n=k+1$ 일 때,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \text{(나)}$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} + \text{(나)}$$

$$= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k+1} + \text{(다)}$$

$$= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \text{이다.}$$

그러므로  $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 i), ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}$
②	1	$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}$
③	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}$
④	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}$
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}$

4. **2005 교육청(3점)**

2 이상의 자연수  $n$  에 대하여 부등식  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$  가 성립함이 알려져 있다.

다음은 이 사실을 이용하여  $n$  이 6 이상의 자연수일 때, 부등식  $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$  이 성립함을 수학  
적귀납법으로 증명한 것이다. (단,  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ )

< 증 명 >

( i )  $n = 6$  일 때,  
 $3^6 = 729$ ,  $6! = 720$  이므로 성립한다.

( ii )  $n = k$  ( $k \geq 6$ ) 일 때 성립한다고 가정하면  

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^k}{k^k} \cdot ( \quad )$$

$$= \frac{k+1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot ( \text{가} )$$

$$> \frac{k+1}{2} \cdot ( \text{나} ) = ( \quad )$$
 이므로  $n = k + 1$  일 때도 성립한다.

( i ), ( ii )에 의하여 주어진 부등식은 6 이상의 모든 자연수에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- |  |   |
|--|---|
| ① $k^k$ , $(k+1)!$                     | ② $k^k$ , $2k!$                           |
| ③ $k^k$ , $k!$                         | ④ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ , $(k+1)!$ |
| ⑤ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ , $2k!$ |   |

5. 2006 평가원(3점)

다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(i)  $n = 1$ 일 때,  $4 > 2 + 1$   
 $n = 2$ 일 때,  $8 > 6 + 1$ 이므로 성립한다.

(ii)  $n = k (k \geq 2)$ 일 때,  $2^{k+1} > \boxed{\text{(가)}} + 1 \dots \textcircled{㉠}$ 이  
 성립한다고 가정하자.  
 ㉠의 양변에 2를 곱하면  
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$   
 이때,  $2(k^2 + k + 1) - \boxed{\text{(나)}} = k^2 - k - 1$   
 $k \geq 2$ 일 때,  $k^2 - k - 1 \boxed{\text{(다)}} 0$ 이므로  
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{\text{(나)}}$   
 $\therefore 2^{k+2} > \boxed{\text{(나)}}$   
 따라서  $n = k + 1$ 일 때도 성립한다.  
 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여  
 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- | (가)        | (나)                | (다) |
|------------|--------------------|-----|
| ① $k(k-1)$ | $(k+1)(k+2)$       | <   |
| ② $k(k+1)$ | $(k+1)(k+2)$       | >   |
| ③ $k(k-1)$ | $\{(k+1)(k+2)+1\}$ | >   |
| ④ $k(k-1)$ | $\{(k+1)(k+2)+1\}$ | <   |
| ⑤ $k(k+1)$ | $\{(k+1)(k+2)+1\}$ | >   |

6. **2008 교육청(3점)**

자연수  $n$ 에 대하여  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 로 정의한다.

다음은 2 이상인 모든 자연수  $n$ 에 대하여 등식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n(a_n - 1)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1)  $n=2$ 일 때, (좌변)=(우변)= (가) 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2)  $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} = k(a_k - 1)$$

양변에  $a_k$ 를 더하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \text{(나)}$$

그런데  $a_k = a_{k+1} - \text{(다)}$  이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = (k+1)(a_{k+1} - 1)$$

그러므로  $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 2 이상인 모든 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

(가)	(나)	(다)
① 1	$ka_{k+1} - k$	$\frac{1}{k}$
② 1	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k+1}$
③ 1	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k}$
④ $\frac{3}{2}$	$ka_{k+1} - k$	$\frac{1}{k+1}$
⑤ $\frac{3}{2}$	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k+1}$

7. **2009** **교육청(3점)**

다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  이라 하자.

(1)  $n=1$  일 때,  $S_1 = \boxed{(\text{가})}$   $= T_1$  이므로 (\*)이 성립한다.

(2)  $n=m$  일 때, (\*)이 성립한다고 가정하면

$$S_{m+1} = S_m + \boxed{(\text{나})}$$

$$T_{m+1} = \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \dots + \frac{1}{2m+2}$$

$$= T_m - \boxed{(\text{다})} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2}$$

$$= T_m + \boxed{(\text{나})}$$

이므로  $n=m+1$  일 때도 (\*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 (\*)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 것으로 알맞은 것은?

(가)	(나)	(다)
① 1	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m}$
② 1	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m+1}$
③ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}$	$\frac{1}{m+1}$
④ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}$	$\frac{1}{m}$
⑤ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m+1}$



8.

2011

평가원(3점)

수열  $\{a_n\}$  은  $a_1 = 1$  이고

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} a_k \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$  을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터  $a_2 = \boxed{\text{(가)}}$  이다.

자연수  $n$  에 대하여

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{\text{(나)}} \sum_{k=1}^n 2^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{\text{(다)}} a_{n+1} \end{aligned}$$

이다.

따라서  $a_1 = 1$  이고,  $n \geq 2$  일 때

$$a_n = (\boxed{\text{(다)}})^{n-2} \text{ 이다.}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각  $p, q, r$  라 할 때,  
 $p+q+r$  의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

9. 2010 평가원(3점)

다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여 부등식

$$(n!)^2 \cdot 4^n > (2n)! \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1)  $n = 1$  일 때, (좌변) = 4, (우변) = (가)

이므로  $\textcircled{A}$ 이 성립한다.

(2)  $n = k$  일 때,  $\textcircled{A}$ 이 성립한다고 가정하면

$$(k!)^2 \cdot 4^k > (2k)! \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

이다.  $n = k+1$  일 때  $\textcircled{A}$ 이 성립함을 보이자.

$\textcircled{B}$ 의 양변에 (나)를 곱하면

$$\begin{aligned} \{(k+1)!\}^2 \cdot 4^{k+1} &> (\textcircled{나}) (2k)! \\ &> (2k+2) (\textcircled{다}) (2k)! \\ &= (2k+2)! \end{aligned}$$

따라서  $n = k+1$  일 때에도  $\textcircled{A}$ 은 성립한다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $\textcircled{A}$ 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$4(k+1)^2$	$2k$
②	1	$2(k+1)^2$	$2k$
③	2	$4(k+1)^2$	$2k+1$
④	2	$2(k+1)^2$	$2k+1$
⑤	2	$4(k+1)^2$	$2k$

10. **2011** **교육청(3점)**

다음은 자연수  $n$  에 대하여 부등식

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

이 성립함을  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$  을 이용하여 증명하는 과정이다.

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \boxed{\text{(가)}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right. \\ & \quad \left. + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \right\} \\ &< \boxed{\text{(가)}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \\ &= \boxed{\text{(나)}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\text{즉, } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \boxed{\text{(나)}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ 이다.} \\ & \quad \vdots \\ &\text{따라서, } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(n)$ ,  $g(n)$  이라 할 때,  $\frac{g(5)}{f(10)}$  의 값은?

① 10

② 12

③ 15

④ 18

⑤ 22

11. **2011** **교육청(3점)**

다음은 자연수  $n$ 에 대하여 등식

$\sum_{i=1}^{2n-1} \{i + (n-1)^2\} = (n-1)^3 + n^3 \cdots \cdots (*)$  이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[ 증 명 ]

(1)  $n=1$ 일 때,  $1+0^2=0^3+1^3$  이므로  $(*)$ 이 성립한다.

(2)  $n=k$ 일 때,  $(*)$ 이 성립한다고 가정하고,

$n=k+1$ 일 때  $(*)$ 이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2k+1} (i+k^2) &= \sum_{i=1}^{2k-1} \{i+(k-1)^2\} + \sum_{i=1}^{2k-1} (2k-1) + \boxed{(가)} \\ &= \boxed{(나)} \end{aligned}$$

그러므로  $n=k+1$ 일 때도  $(*)$ 이 성립한다.

따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $(*)$ 이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을  $f(k)$ , (나)에 알맞은 식을  $g(k)$ 라 할 때,  $\frac{g(4)}{f(4)}$ 의 값은?

①  $\frac{23}{7}$

②  $\frac{24}{7}$

③  $\frac{25}{7}$

④  $\frac{26}{7}$

⑤  $\frac{27}{7}$

12. **2010** **평가원(4점)**

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1=1$ 이고,  $a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)a_k$  ( $n \geq 2$ )를 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$ 을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식으로부터  $a_2=7$ 이다.

자연수  $n$  ( $n \geq 3$ )에 대하여

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)a_k = n^2 + \sum_{k=1}^{n-2} (2k+1)a_k + (2n-1)a_{n-1} \\ &= n^2 + a_{n-1} - \boxed{(가)} + (2n-1)a_{n-1} \text{이므로,} \end{aligned}$$

$a_n+1=2n(a_{n-1}+1)$ 이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned} a_n+1 &= n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times \boxed{(나)} \times (a_2+1) \\ &= 4 \times n! \times \boxed{(나)} \text{이다.} \end{aligned}$$

위의 (가)에 알맞은 식을  $f(n)$ , (나)에 알맞은 식을  $g(n)$ 이라 할 때,  $f(9) \times g(9)$ 의 값은?

①  $2^{13}$

②  $2^{14}$

③  $2^{15}$

④  $2^{16}$

⑤  $2^{17}$

다음은 임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n > 0$  이고  $\sum_{k=1}^n a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2$  이면  $a_n = \boxed{\text{(가)}}$  임을 증명하는 과정이다.

< 증 명 >

임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n > 0$  이고  $\sum_{k=1}^n a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2$  이므로

$$\begin{aligned} a_{k+1}^3 &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i^3 - \sum_{i=1}^k a_i^3 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i - \sum_{i=1}^k a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^k a_i\right) \\ &= \boxed{\text{(나)}} \left( \boxed{\text{(나)}} + 2 \sum_{i=1}^k a_i \right) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{k+1}^2 = a_{k+1} + 2 \sum_{i=1}^k a_i \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$\text{즉, } a_k^2 = a_k + 2 \sum_{i=1}^{k-1} a_i \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

$$\text{①과 ②에서 } a_{k+1}^2 - a_k^2 = \boxed{\text{(다)}}$$

따라서  $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

$$\therefore a_n = \boxed{\text{(가)}}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$a_n = 2n$	$a_{k+1}$	$a_{k+1} + a_k$
②	$a_n = 2n$	$a_k$	$a_{k+1} - a_k$
③	$a_n = n$	$a_{k+1}$	$a_{k+1} - a_k$
④	$a_n = n$	$a_k$	$a_{k+1} + a_k$
⑤	$a_n = n$	$a_{k+1}$	$a_{k+1} + a_k$

14. **2011**      **평가원 (4점)**

수열  $\{a_n\}$  은  $a_1 = 1$  이고,

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{4a_n - 1} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$  을 구하는 과정의 일부이다.

모든 자연수  $n$  에 대하여

$$4a_{n+1} - 1 = 4 \times \frac{3a_n - 1}{4a_n - 1} - 1 = 2 - \frac{1}{4a_n - 1}$$

이다. 수열  $\{b_n\}$  을

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = (4a_n - 1)b_n \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots (*)$$

이라 하면,

$\vdots$

$$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n \text{ 이다.}$$

즉,  $\{b_n\}$  은 등차수열이므로  $(*)$  에 의하여

$$b_n = \boxed{\text{(가)}} \text{ 이고, } a_n = \boxed{\text{(나)}} \text{ 이다.}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(n)$ ,  $g(n)$  이라 할 때,  $f(14) \times g(5)$  의 값은?

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

15. **2011** **교육청 (4점)**

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 10$ 이고,

$$a_{n+1} = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$ 을 구하는 과정이다.

$n \geq 2$ 인 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = \left( a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n \right) - \left( a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n-1}a_{n-1} \right) \text{이므로}$$

$$a_{n+1} = \boxed{(가)} \times a_n \text{이다.}$$

$n = 2, 3, 4, \cdots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_3 = \frac{3}{2}a_2$$

$$a_4 = \frac{4}{3}a_3$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1} \text{이므로}$$

$$a_n = \boxed{(나)} \quad (n \geq 2)$$

따라서 주어진 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_1 = 10 \text{이고, } a_n = \boxed{(나)} \quad (n \geq 2)$$

위의 (가)에 알맞은 식을  $f(n)$ , (나)에 알맞은 식을  $g(n)$ 이라 할 때,  $f(5) \times g(10)$ 의 값은?

- ① 60                      ② 75                      ③ 90  
④ 105                    ⑤ 120

16. **2012** **교육청 (4점)**

수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n + 1$$

을 만족시킬 때, 다음은 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다.

$n \geq 1$ 일 때,

$$a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + \boxed{(가)} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이고,  $\textcircled{8}$ 에서  $\textcircled{7}$ 을 뺀 식으로부터

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

을 얻는다.  $b_n = a_{n+1} - a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

이므로

$$b_n = 2^{n+1} - 1$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 1) \quad (n \geq 2)$$

$$= 2^{n+1} + \boxed{(나)}$$

이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각  $f(n)$ ,  $g(n)$ 이라 할 때,  
 $f(5) - g(5)$ 의 값은?

- ① 14                      ② 16                      ③ 18  
 ④ 20                      ⑤ 22



17. **2012** **평가원 (4점)**

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = -\frac{4}{9}$ 이고,

$$2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$ 을 구하는 과정이다.

주어진 식  $2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n$ 의 양변을  $2^{2n+1}$ 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2^{2n+1}} \quad (n \geq 1)$$

이므로  $n \geq 2$ 인 자연수  $n$ 에 대하여

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} \quad \dots\dots (*)$$

이다. 한편

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} &= \frac{2}{3} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{n-1}{4^{n-1}} \right) - \left( \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{n-1}{4^n} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{(가)}}{4^n} \right) \end{aligned}$$

이므로 (\*)에 의하여

$$\begin{aligned} a_n &= \boxed{(나)} + \frac{2^{n+1}}{3} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{(가)}}{4^n} \right) \\ &= -\frac{3n+1}{9 \cdot 2^{n-1}} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(n)$ ,  $g(n)$ 이라 할 때,  $f(10) \times g(5)$ 의 값은?

- ① -64                      ② -56                      ③ -48                      ④ -40                      ⑤ -32

18. 2012 평가원(4점)

수열  $\{a_n\}$  은  $a_1 = 2$  이고,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  라 할 때,

$$a_{n+1} = \frac{S_n}{a_n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은  $S_n$  을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터  $a_2 = \frac{S_1}{a_1} = 1$  이다.

$n \geq 3$  일 때,

$$a_n = \frac{S_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_{n-2} + a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2}a_{n-1} + a_{n-1}}{a_{n-1}}$$

이므로

$$a_n = a_{n-2} + 1$$

이다. 따라서 일반항  $a_n$  을 구하면, 자연수  $k$  에 대하여

$$n = 2k - 1 \text{ 일 때, } a_{2k-1} = k + 1$$

$$n = 2k \text{ 일 때, } a_{2k} = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 한편,  $S_n = a_n a_{n+1}$  이므로

$$S_n = \begin{cases} (k+1) \times \boxed{\text{(가)}} & (n = 2k - 1) \\ \boxed{\text{(나)}} & (n = 2k) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각  $f(k)$ ,  $g(k)$  라 할 때,  $f(6) + g(7)$  의 값은?

- ① 65                      ② 67                      ③ 69  
④ 71                      ⑤ 73

19. **2012** **교육청(4점)**

일반항이  $a_n = \frac{n(n+1)}{2} (n=1, 2, 3, \dots)$ 인 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_n$ 의 값이 6의 배수인 항들을

작은 것부터 차례로 나열한 수열을  $\{b_n\}$ 이라 할 때, 다음은  $\sum_{k=1}^{4n} b_k$ 를 구하는 과정이다.

$a_{n+12} - a_n = \boxed{\text{(가)}}$  이므로  $a_{n+12} - a_n$ 은 6의 배수이다. .... ㉠

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$  중에서 6의 배수인 것은

$a_3 = 6, a_8 = 36, a_{11} = 66, a_{12} = 78$ 이므로

$b_1 = a_3, b_2 = a_8, b_3 = a_{11}, b_4 = a_{12}$ 이다. .... ㉡

㉠, ㉡에서

$$b_{4n-3} = a_{12n-9} = 6(4n-3)(3n-2)$$

$$b_{4n-2} = a_{12n-4} = 6(3n-1)(4n-1)$$

$$b_{4n-1} = \boxed{\text{(나)}}$$

$$b_{4n} = 6n(12n+1)$$

따라서  $\sum_{k=1}^{4n} b_k = \sum_{k=1}^n (\boxed{\text{(다)}}) = \boxed{\hspace{2cm}}$

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각  $f(n), g(n), h(k)$ 라 할 때,  $f(1)+g(2)+h(1)$ 의 값은?

① 552

② 558

③ 564

④ 570

⑤ 576

20.

2010

교육청(4점)

수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2 + 5 \cdot 6a_3 + \cdots + (2n-1) \cdot 2na_n \geq n$$

을 만족시킬 때, 다음은 부등식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq \boxed{\text{(가)}} \text{ 이 성립함을 증명한 것이다.}$$

【 증 명 】

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 \cdot 2a_1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)(3 \cdot 4a_2) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)(5 \cdot 6a_3) \\ & \quad + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\{(2n-1) \cdot 2na_n\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(1 \cdot 2a_1) \\ & \quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2) \\ & \quad + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)(1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2 + 5 \cdot 6a_3) + \cdots \\ & \quad + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\{1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2 + \cdots + (2n-1) \cdot 2na_n\} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ & \quad + \cdots + \boxed{\text{(나)}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \boxed{\text{(다)}} \end{aligned}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- |   |                                 |   |   |
|---|---------------------------------|---|---|
|   | (가)                             | (나)   | (다)   |
| ① | $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$    | $\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$  | $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ |
| ② | $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$    | $n\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$ | $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ |
| ③ | $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$ | $n\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$ | $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ |
| ④ | $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$ | $n\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$ | $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$  |
| ⑤ | $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$ | $\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$  | $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$  |

21.

2004

평가원(4점)

다음은 수열  $\{a_n\}$ 에서 일반항  $a_n$ 이  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  일 때,  $n \geq 2$ 인 모든 자연수에  $n$ 에 대하여  $n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = na_n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

## [ 증 명 ]

i)  $n=2$  일 때,

$$(\text{좌변}) = 2 + \frac{1}{1} = 3, (\text{우변}) = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = 3 \text{ 이므로,}$$

주어진 식이 성립한다.

ii)  $n=k$  ( $k \geq 2$ )일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$$k + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = ka_k \cdots \cdots \textcircled{가}$$

이 때, 식  $\textcircled{가}$ 의 좌변에  $1 + a_k$ 를 더하면

$$\begin{aligned} k + 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k \\ &= \boxed{\text{가}} + 1 + a_k \\ &= (k+1) a_k + 1 \\ &= (k+1) \left( \boxed{\text{나}} \right) + 1 \\ &= (k+1) a_{k+1} \end{aligned}$$

따라서,  $n=k+1$  일 때도 주어진 식이 성립한다.

그러므로 i), ii)에 의하여

$$n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = na_n$$

은  $n \geq 2$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- |   | (가)        | (나)                       |
|---|------------|---------------------------|
| ① | $ka_k$     | $a_k + \frac{1}{k+1}$     |
| ② | $ka_k$     | $a_{k+1} - \frac{1}{k+1}$ |
| ③ | $ka_k$     | $a_{k+1} + \frac{1}{k+1}$ |
| ④ | $(k+1)a_k$ | $a_k + \frac{1}{k+1}$     |
| ⑤ | $(k+1)a_k$ | $a_{k+1} - \frac{1}{k+1}$ |

22.

2010

교육청(4점)

다음은 3이상의 자연수  $n$ 에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{(n-i)2^{i-1}} < 4 \text{가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.}$$

[ 증 명 ]

자연수  $n(n \geq 3)$ 에 대하여  $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{(n-i)2^{i-1}}$ 이라 하자.

(1)  $n=3$ 일 때,  $S_3 = 3 < 4$ 이므로 성립한다.

(2)  $n=k(k \geq 3)$ 일 때,  $S_k < 4$ 가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{k+1}{k+1-i} \times \frac{1}{2^{i-1}} \right) \\ &= \frac{k+1}{k} + \frac{1}{2} \left( \frac{k}{k-1} + \frac{k}{k-2} \times \frac{1}{2} + \cdots + \frac{k}{2^{k-2}} \right) \\ &\quad + \boxed{(가)} \times \left( \frac{k}{k-1} + \frac{k}{k-2} \times \frac{1}{2} + \cdots + \frac{k}{2^{k-2}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{k} + \boxed{(나)} \times S_k \end{aligned}$$

그런데,  $k \geq 3$ ,  $S_k < 4$ 이므로

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{k} + \boxed{(나)} \times S_k < 4 \text{이다.}$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 3이상의 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식의 합을  $f(k)$ 라 할 때,  $f(3)$ 의 값은?

①  $\frac{2}{3}$

②  $\frac{3}{4}$

③  $\frac{4}{5}$

④  $\frac{5}{6}$

⑤  $\frac{6}{7}$

23.

2006

교육청(4점)

음의 자연수  $n$ 에 대하여

$$1 = 1^3$$

$$3 + 5 = 2^3$$

$$7 + 9 + 11 = 3^3$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^n (2i + n^2 - n - 1) = n^3$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

【 증 명 】

i)  $n=1$ 일 때,  $2 \cdot 1 + 1^2 - 1 - 1 = 1^3$ 이므로 성립한다.ii)  $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^k (2i + k^2 - k - 1) = k^3 \text{ 이다.}$$

 $n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k+1} \boxed{\text{(가)}} \\ &= \sum_{i=1}^k (2i + k^2 - k - 1) + \sum_{i=1}^k 2k + \boxed{\text{(나)}} \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

그러므로  $n=k+1$ 일 때도 성립한다.i), ii)에 의해서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

(가)(나)

- |   |                    |                |
|---|--------------------|----------------|
| ① | $2i + k^2 + k - 1$ | $k^2 + 3k + 1$ |
| ② | $2i + k^2 + k - 1$ | $k^2 - 3k + 1$ |
| ③ | $2i + k^2 + k + 1$ | $k^2 + 3k + 1$ |
| ④ | $2i + k^2 - k + 1$ | $k^2 - 3k + 1$ |
| ⑤ | $2i + k^2 - k + 1$ | $k^2 + 3k + 1$ |

24.

2006

교육청(4점)

모든 항이 양수인 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,

$$\sum_{k=1}^n \frac{6S_k}{a_k+3} = S_n \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식에  $n=1$ 을 대입하면

$S_1 > 0$ 이므로  $a_1 = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{6S_k}{a_k+3} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6S_k}{a_k+3} = \frac{6S_n}{a_n+3} \quad (n \geq 2) \text{이고}$$

$$a_1 = \frac{6S_1}{a_1+3} \text{이므로}$$

$$\boxed{\text{(나)}} \cdot S_n = a_n^2 + \boxed{\text{(가)}} \cdot a_n \quad (n \geq 1) \text{이다.}$$

$$\text{한편, } 6(S_{n+1} - S_n) = a_{n+1}^2 + 3a_{n+1} - (a_n^2 + 3a_n) \text{이므로}$$

$$6a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + 3a_{n+1} - 3a_n$$

$$\vdots$$

$$\text{따라서 } a_n = \boxed{\text{(다)}}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각  $p$ ,  $q$ 라 하고, (다)에 알맞은 식을  $f(n)$ 이라 할 때,  $p+q+f(10)$ 의 값은?

① 36

② 39

③ 42

④ 45

⑤ 48



25.

2006

교육청(4점)

다음은  $n$  부터  $2n-1$  개의 연속한 자연수의 합에 대하여

$$n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (3n-2) = (2n-1)^2$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[ 증 명 ]

i)  $n = 1$  일때, (좌변)=1, 우변= $1^2$  이므로 성립한다.

ii)  $n = k$ 일때, 성립한다고 가정하면

$$k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (3k-2) = (2k-1)^2$$

$n = k+1$  일때 성립함을 보이자.

$$(k+1) + (k+2) + \cdots + \boxed{\text{( 가 )}}$$

$$= k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (3k-2) + \boxed{\text{( 나 )}}$$

$$= (2k-1)^2 + \boxed{\text{( 다 )}}$$

$$= \boxed{\text{( 다 )}}$$

그러므로  $n = k+1$  일 때도 성립한다.

i), ii)에 의해서 모든 자연수  $n$  에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가) ~ (다)를 바르게 짝지은 것은?

(가)	(나)	(다)
① $3k+1$	$8k$	$(2k+1)^2$
② $3k+1$	$8k$	$4k^2$
③ $3k+2$	$8k$	$(2k+1)^2$
④ $3k+2$	$4k-1$	$(2k+1)^2$
⑤ $3k+2$	$4k-1$	$4k^2$

26.

2010

평가원(4점)

수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1 = \alpha (\alpha \neq 0)$ 이고, 모든  $n(n \geq 2)$ 에 대하여

$$(n-1)a_n + \sum_{m=1}^{n-1} ma_m = 0 \text{을 만족시킨다. 다음은}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \alpha \quad (n \geq 1)$$

임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

[ 증 명 ]

(1)  $n=1$ 일 때,  $a_1 = \alpha = \frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!} \alpha$ 이다.

(2) i)  $n=2$ 일 때,  $a_2 + a_1 = 0$ 이므로

$$a_2 = -a_1 = \frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!} \alpha \text{이다.}$$

따라서 주어진 식이 성립한다.

ii)  $n=k$  ( $k \geq 2$ )일 때 성립한다고 가정하고,

$n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} 0 &= ka_{k+1} + \sum_{m=1}^k ma_m \\ &= ka_{k+1} + \sum_{m=1}^{k-1} ma_m + ka_k \\ &= ka_{k+1} + \left( \boxed{\text{㉠}} \right) \times a_k + ka_k \quad \text{이므로} \end{aligned}$$

$$a_{k+1} = \boxed{\text{㉡}} \times a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \alpha \quad \text{이다.}$$

따라서 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \alpha$ 이다.

위의 ㉠, ㉡에 알맞은 식의 곱을  $f(k)$ 라 할 때,  $f(10)$ 의 값은?

①  $\frac{1}{10}$

②  $\frac{3}{10}$

③  $\frac{1}{2}$

④  $\frac{7}{10}$

⑤  $\frac{9}{10}$

27. **2007 수능 (3점)**

다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \cdots + (n^2 + 1) \cdot n! = n \cdot (n+1)!$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1)  $n=1$ 일 때, (좌변)=2, (우변)=2이므로

주어진 등식은 성립한다.

(2)  $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \cdots$$

$$+ (k^2 + 1) \cdot k! = k \cdot (k+1)!$$

이다.  $n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \cdots$$

$$+ (k^2 + 1) \cdot k! + \{(k+1)^2 + 1\} \cdot (k+1)!$$

$$= \boxed{\text{(가)}} + \{(k+1)^2 + 1\} \cdot (k+1)!$$

$$= (\boxed{\text{(나)}}) \cdot (k+1)!$$

$$= (k+1) \cdot \boxed{\text{(다)}}$$

그러므로  $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

(가)	(나)	(다)
① $k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 2k + 1$	$(k+1)!$
② $k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+2)!$
③ $k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+1)!$
④ $(k+1) \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+2)!$
⑤ $(k+1) \cdot (k+1)!$	$k^2 + 2k + 1$	$(k+1)!$

28.

2005

수능 (4점)

다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{n(5n+3)}{4}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

&lt; 증 명 &gt;

(1)  $n=1$ 일 때, (좌변)=2, (우변)=2이므로

주어진 등식은 성립한다.

(2)  $n=m$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{m} \right) \\ = \frac{m(5m+3)}{4} \end{aligned}$$

이다.  $n=m+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m+1} \right) \\ = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m+1} \right) + \frac{(가)}{m+1} \\ = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{(가)} \right) \\ + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m (5k-3) + \frac{(나)}{m+1} \\ = \frac{m(5m+3)}{4} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \left( \quad (다) \quad \right) \\ = \frac{(m+1)(5m+8)}{4} \end{aligned}$$

그러므로  $n=m+1$ 일 때도 성립한다.따라서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$5m-3$	$m$	$5k+2$
②	$5m-3$	$m+1$	$5k+2$
③	$5m+2$	$m$	$5k-3$
④	$5m+2$	$m$	$5k+2$
⑤	$5m+2$	$m+1$	$5k-3$

29. **2004 수능 (3점)**

다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\text{부등식 } \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

자녀수  $n$ 에 대하여  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$ 이라 할 때,

$a_n > 1$ 임을 보이면 된다.

(1)  $n=1$ 일 때  $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ 이다.

(2)  $n=k$ 일 때  $a_k > 1$ 이라고 가정하면

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4} \\ &= a_k + \left( \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) - \boxed{\text{(가)}} \end{aligned}$$

한편,  $(3k+2)(3k+4) \boxed{\text{(나)}} (3k+3)^2$ 이므로

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \boxed{\text{(다)}}, \text{ 그런데 } a_k > 1 \text{이므로}$$

$$a_{k+1} > a_k + \left( \frac{1}{3k+3} + \boxed{\text{(다)}} \right) - \boxed{\text{(가)}} > 1$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n > 1$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- |   | (가)             | (나) | (다)              |
|---|-----------------|-----|------------------|
| ① | $\frac{1}{k+1}$ | $>$ | $\frac{2}{3k+3}$ |
| ② | $\frac{1}{k+1}$ | $<$ | $\frac{2}{3k+3}$ |
| ③ | $\frac{1}{k+1}$ | $<$ | $\frac{4}{3k+3}$ |
| ④ | $\frac{2}{k+1}$ | $>$ | $\frac{4}{3k+3}$ |
| ⑤ | $\frac{2}{k+1}$ | $<$ | $\frac{1}{k+1}$  |

30. **2011 수능 (4점)**

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 1$ 이고,

$$a_{n+1} = n + 1 + \frac{(n-1)!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$ 을 구하는 과정의 일부이다.

모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n \times (n+1) + (n-1)!$$

이다.  $b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}$  이라 하면,  $b_1 = 1$ 이고

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{(\text{가})}$$

이다. 수열  $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \boxed{(\text{나})} \text{ 이므로 } \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!} = \boxed{(\text{나})} \text{ 이다.}$$

$\vdots$

$$\text{따라서 } a_1 = 1 \text{이고, } a_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{2n-3} \quad (n \geq 2) \text{ 이다.}$$

위의 (가)에 알맞은 식을  $f(n)$ , (나)에 알맞은 식을  $g(n)$ 이라 할 때,  $f(13) \times g(7)$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{70}$                       ②  $\frac{1}{77}$                       ③  $\frac{1}{84}$
- ④  $\frac{1}{91}$                       ⑤  $\frac{1}{98}$

31.

2012

수능 (4점)

첫째항이 1 인 수열  $\{a_n\}$  에 대하여  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  라 할 때

$$nS_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)^3 \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열  $\{a_n\}$  의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

자연수  $n$  에 대하여  $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$  이므로

$$na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이다. 2 이상의 자연수  $n$  에 대하여

$$(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이고, ㉠에서 ㉡을 뺀 식으로부터

$$na_{n+1} = (n+1)a_n + \boxed{\text{(가)}}$$

를 얻는다. 양변을  $n(n+1)$  로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\boxed{\text{(가)}}}{n(n+1)}$$

이다.  $b_n = \frac{a_n}{n}$  이라 하면,

$$b_{n+1} = b_n + 3 + \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 2)$$

이므로

$$b_n = b_2 + \boxed{\text{(다)}} \quad (n \geq 3)$$

이다.

⋮

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각  $f(n)$ ,  $g(n)$ ,  $h(n)$  이라 할 때,  $\frac{f(3)}{g(3)h(6)}$  의 값은?

① 30

② 36

③ 42

④ 48

⑤ 54

- 1) 정답 ⑤
- 2) 정답 ④
- 3) 정답 ④
- 4) 정답 ⑤
- 5) 정답 ⑤
- 6) 정답②
- 7) 정답 ③
- 8) 정답 ④
- 9) 정답 ③
- 10) 정답 ⑤
- 11) 정답 ⑤
- 12) 정답 ①
- 13) 정답 ⑤
- 14) 정답 ①
- 15) 정답 ①
- 16) 정답 ①
- 17) 정답 ①
- 18) 정답 ③
- 19) 정답 ①
- 20) 정답 ②
- 21) 정답 ②
- 22) 정답 ④
- 23) 정답 ①
- 24) 정답 ②
- 25) 정답 ①
- 26) 정답 ⑤
- 27) 정답 ②
- 28) 정답 ③
- 29) 정답 ②
- 30) 정답 ⑤
- 31) 정답 ②



