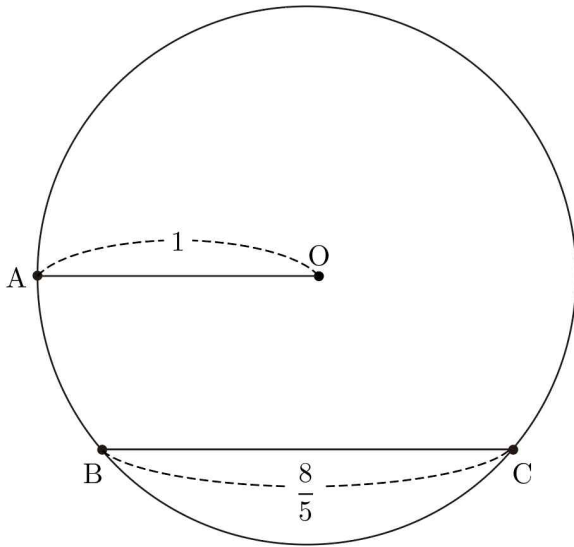


1. [정답] 35 [기하 평면벡터] [출제 및 해설 : Pabloff]

해설 : (가) 조건의  $\overrightarrow{AB} = \frac{8\overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{AC}}{5}$ 에서

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} \text{ 이고 } \frac{8}{5}\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} \text{이다.}$$

이를 그림으로 표현하면 두 선분 AO와 BC가 평행한 상태이므로



와 같은 상황이다.

(나) 조건에서  $\overrightarrow{OM} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{3}$ 임을 알 수 있고,

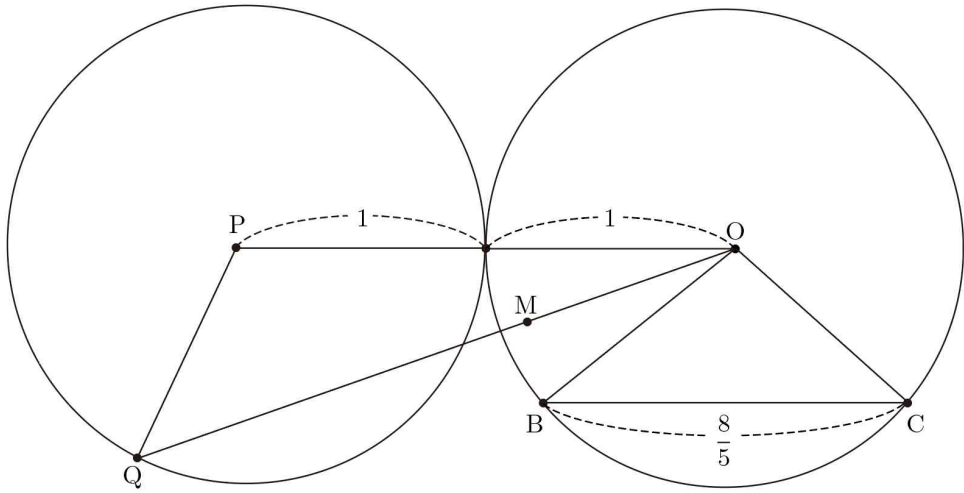
$$3\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \text{이다.}$$

이 때,  $\overrightarrow{OD}$ 는 반지름이 1인 원 위의 점을 의미하지만 하면 되므로  
아래 그림과 같이 점 O에서  $2\overrightarrow{OA}$ 만큼 가서 도달한 점 P에 대하여

$\overrightarrow{OD}$ 의 시점을 점 P로, 종점을 반지름이 1, 중심이 P인 원 위의 점 Q로 옮겨 줄 수 있다.

이 때,  $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ 가 되므로

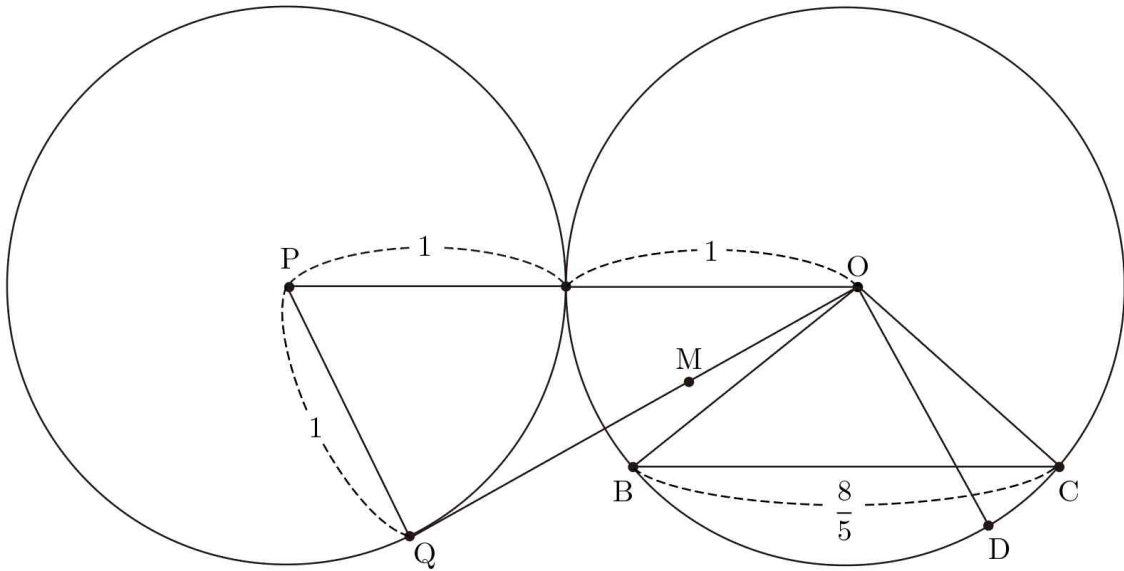
점 M은 선분  $\overline{OQ}$ 의 1 : 2 내분점이다.



이에 따라 위 그림과 같은 상황이 만들어 진다.

$\vec{OB}$ 와  $\vec{OM}$ 이 이루는 각이 최소가 되기 위해서는 직선 OQ가 중심이 P인 원에 접해야 한다.

이 때,  $\vec{PQ}$ 와  $\vec{OD}$ 는 동일한 두 벡터이고 그림은 아래와 같다.



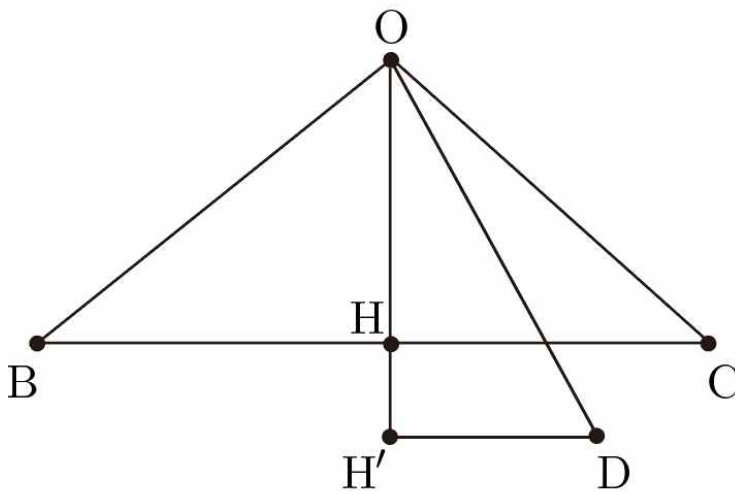
이제 벡터에 대한 해석은 끝났고 코사인 값만 계산해주면 된다.

직각삼각형 OPQ는 빗변과 밑변의 길이비가 2 : 1이어서

특수각 ( $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ) 인 삼각형임을 쉽게 알 수 있고  $\angle POQ = \frac{\pi}{6}$ 이다.

점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

점 H'를 직선 OH 위의 점이고  $\angle OH'D = \frac{\pi}{2}$ 가 되도록 잡아준다.



이 때, 길이와 각을 나타내보면

$\angle DOH' = \frac{\pi}{6}$ ,  $\overline{CH} = \frac{4}{5}$ ,  $\overline{OH} = \frac{3}{5}$ ,  $\overline{DH'} = \frac{1}{2}$ ,  $\overline{OH'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{HH'}^2 + (\overline{CH} - \overline{DH'})^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{3} - 6}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 \\ &= \frac{120 - 60\sqrt{3}}{100} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{3} \end{aligned}$$

이다. 삼각형 COD에 대하여 코사인 법칙을 적용하면

$\overline{CD}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos\theta$ 에서  $\cos\theta = \frac{2}{5} + \frac{3}{10}\sqrt{3}$ 이고,  $a = \frac{2}{5}$ ,  $b = \frac{3}{10}$ ,  $50(a+b) = 35$ 이다.