◆ 꼭 표시해야 할 도형적 요소

수능에서는 심화 중학교 도형 문제처럼 특별한 보조선을 그을 필요가 없다. **구하려는 도형 넓이나 길이를 구하는 데에 필요한 것만 표시**하자. 표시해야 하는 도형적 요소는 이후에 잘 소개되어있다. **소개하지 않은 보조선 등을 그으면 오히려 그림이 더러워져 문제 풀기 힘들어진다. 필요한 것만 표시했는데도 그림이 더러워진다면 그림을 여러 번 그리자!**

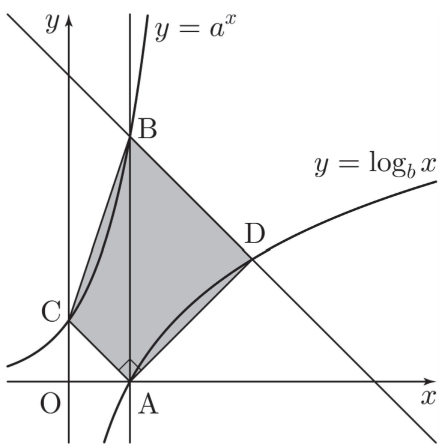
◆ 1. 직각

구하려는 도형 넓이나 변의 길이 주변에 아는 각이나 길이가 있으면 모두 표시하는 것이 좋다. 표시하다 보면 어느 순간 구하려는 도형 길이나 넓이를 어떻게 구해야 할지 감이 잡힐 것이다.

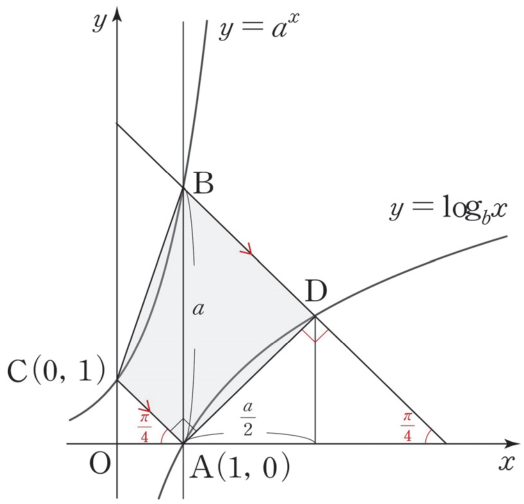
각 중에서 특히 직각은 반드시 표시해줘야 한다. **필요한 경우 수선의 발을 적극적으로 내려 직각을 만들어 줘야 한다.**

예제(23) 20학년도 사관 가형 16번

그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 $\mathrm{C}(0,\ 1)$에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a\times b$의 값은? [4점]



① $4\sqrt{2}$　② $4\sqrt{3}$　③ 8　④ $4\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{6}$



1. 점 $\mathrm{B}(1, a)$이므로 $\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{a}{2}$이다.

2. $\triangle \mathrm{ABD}$의 넓이를 구하자.

$\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{AD}}$이고, $\overline{\mathrm{AC}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{BD}}$이므로 $\overline{\mathrm{AD}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$ 이다. 따라서 $\triangle \mathrm{ABD}$**는 직각이등변삼각형이므로**

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$이고, 점 D에서 직선 AB까지의 거리는 $\frac{a}{2}$이므로 점 $\mathrm{D}\left(\frac{a}{2}+1, \frac{a}{2}\right)$이다.

$\triangle \mathrm{ABD}$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$이다.

3. a와 b의 값을 구하자.

사각형 ADBC의 넓이는 $\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = 6$이므로 $a^2 + 2a - 24 = (a+6)(a-4) = 0$에서 $a = 4$이다.

$\log_b\left(\frac{a}{2}+1\right) = \frac{a}{2}$에서 $\log_b 3 = 2$이므로 $b = \sqrt{3}$이다. 따라서 $ab = 4\sqrt{3}$이다.

답은 ②!!

예제(24) 19년 6월 교육청 고2 가형 18번

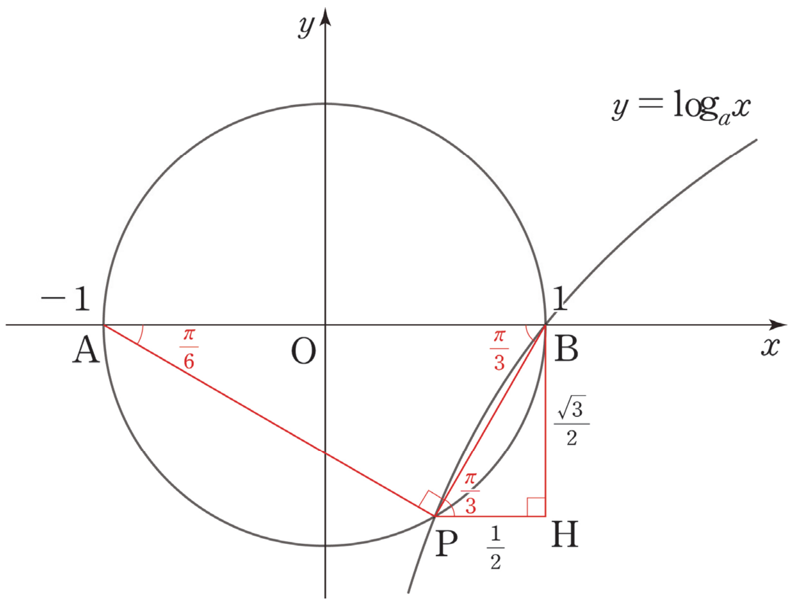
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원 C가 있다. $a > 1$인 실수 a에 대하여 함수 $y = \log_a x$의 그래프와 원 C가 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{3}$일 때, $a^{\sqrt{3}}$의 값은? [4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

1. **점 P는 원 위의 점이므로 $\triangle \mathrm{APB}$는 $\angle \mathrm{P} = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.**

$\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{BP}} = 1$이다.

2. 점 P의 좌표를 구하자.
점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선과 점 B를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 만나는 점을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{AB}} /\!/ \overline{\mathrm{PH}}$이므로 $\angle \mathrm{ABP} = \angle \mathrm{BPH} = \frac{\pi}{3}$이다.

$\overline{\mathrm{BP}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{BH}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{PH}} = \frac{1}{2}$이고, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

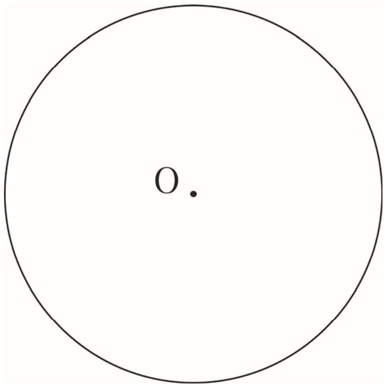
3. a의 값을 구하자.

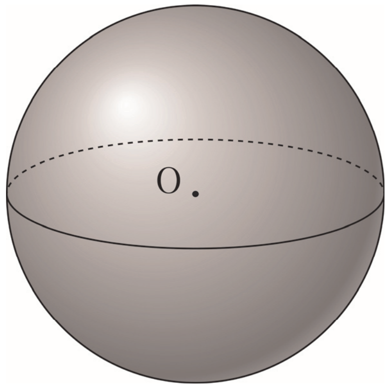
함수 $y = \log_a x$가 점 P를 지나므로 $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \log_a \frac{1}{2}$에서 $a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}$이다.

$a^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$이므로, $a^{\sqrt{3}} = 4$이다.

답은 ②!!

2. 원과 구의 중심과 반지름

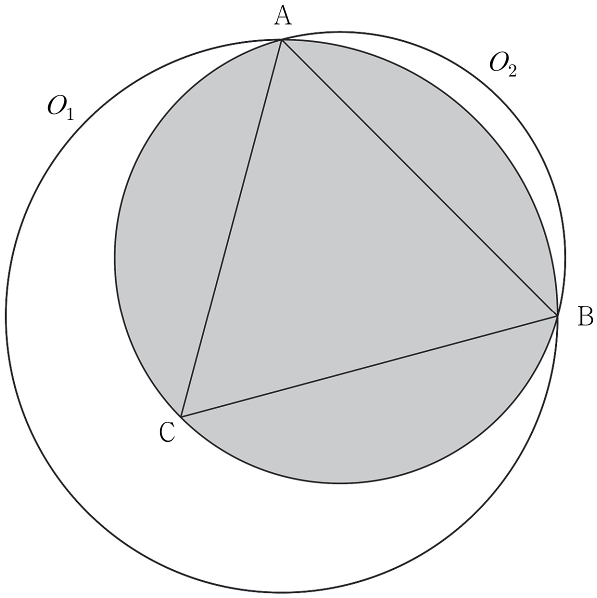




원의 정의는 '평면 위의 한 점에 이르는 거리가 일정한 평면 위 점들의 자취'이고 구의 정의는 '공간 위의 한 점에 이르는 거리가 일정한 공간 위 점들의 자취'이다. 여기에서 **'한 점'은 원과 구의 중심에 해당하고 '거리'는 반지름에 해당**한다. 따라서 **원과 구의 중심과 반지름은 죽었다 깨어나도 표시해야 한다.**

예제(25) 19년 9월 교육청 고2 나형 29번

그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 O_1 이 있다. 원 O_1 위에 서로 다른 두 점 A, B를 $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$ 가 되도록 잡고, 원 O_1 의 내부에 점 C를 삼각형 ACB가 정삼각형이 되도록 잡는다. 정삼각형 ACB의 외접원을 O_2 라 할 때, 원 O_1 과 원 O_2 의 공통부분의 넓이는 $p+q\sqrt{3}+r\pi$ 이다. $p+q+r$ 의 값을 구하시오. (단, p, q, r 는 유리수이다.) [4점]

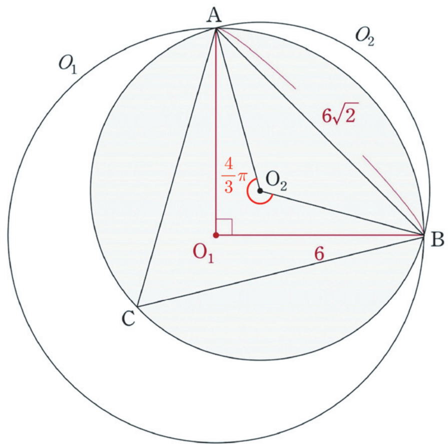


1. 원의 중심부터 표시하자. 원 O_1의 중심을 점 O_1, 원 O_2의 중심을 점 O_2라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$ 이므로 $\triangle \mathrm{AO_1B}$는 직각이등변삼각형이다.

또, 점 O_2는 정삼각형 ABC의 외심이므로 $\triangle \mathrm{ABC}$의 무게중심이다.

따라서 원 O_2의 반지름의 길이는 $\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{2}=2\sqrt{6}$ 이다.



2. 색칠된 영역의 넓이를 구해보자.

(1) 원 O_2에서 부채꼴 $\mathrm{AO_2B}$의 중심각의 크기는 $\frac{4\pi}{3}$ 이므로 부채꼴 $\mathrm{AO_2B}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{6})^2\times\frac{4}{3}\pi=16\pi$이다.

(2) $\triangle \mathrm{AO_2B}$의 넓이는 $\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{2})^2=6\sqrt{3}$ 이다.

(3) 원 O_1에서 활꼴 AB의 넓이를 구해보자.

부채꼴 $\mathrm{AO_1B}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{2}=9\pi$이고, $\triangle \mathrm{AO_1B}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6^2=18$이다.

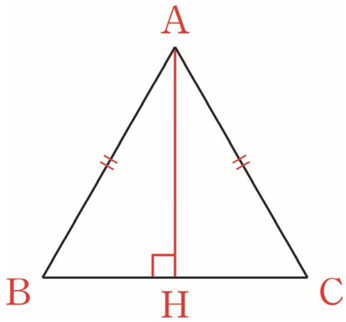
따라서 활꼴 AB의 넓이는 $9\pi-18$이다.

(1), (2), (3) 에 의해 색칠된 영역의 넓이는 $16\pi+6\sqrt{3}+9\pi-18=25\pi+6\sqrt{3}-18$이다.

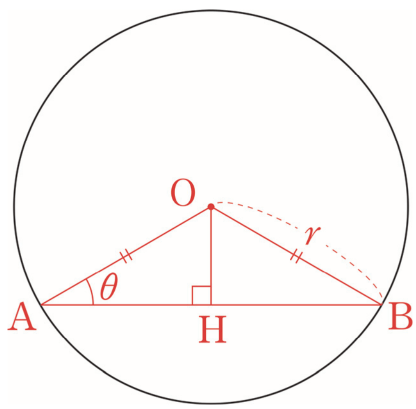
따라서 $p+q+r=-18+6+25=13$이다.

답은 13!!

◆ 3. 길이 동일 표시 및 이등변삼각형의 수직이등분선 표시



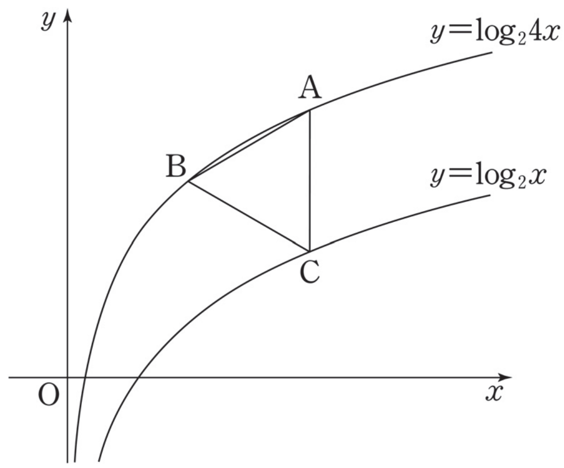
두 변의 길이가 서로 같다면 반드시 '같다'를 나타내는 표시를 해주자. 마음속으로만 생각하다가 문제를 못 풀 수 있다. 위 그림에서 $\triangle ABC$는 **이등변삼각형**이다. $\overline{AB}=\overline{AC}$를 그림에 꼭 표시하자. 더욱 중요한 것은 $\triangle ABC$의 **수직이등분선 $\overline{AH}$를 반드시 그어주어야 한다는 것이다.** 왜? **직각**이 껴있기 때문이다. 정삼각형, 이등변삼각형, 직각삼각형 등 특수한 삼각형이 나오는 경우가 많다. 특수한 삼각형에서 길이, 각 등을 구하려면 직각을 이용하는 것은 필수이다.



이등변삼각형의 수직이등분선이 제일 많이 활용되는 때는 원의 현의 길이를 구할 때이다. 위의 그림에서 현 AB의 길이를 위해서 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$의 길이가 반지름 r로 각각 같다는 점을 이용하여 이등변삼각형 OAB를 만든다. $\triangle OAB$의 수직이등분선 $\overline{OH}$를 그어주자. $\angle OAB=\theta$로 주어질 때 삼각비를 이용하면 현 AB의 길이는 $2r\cos\theta$라는 것을 알 수 있다.

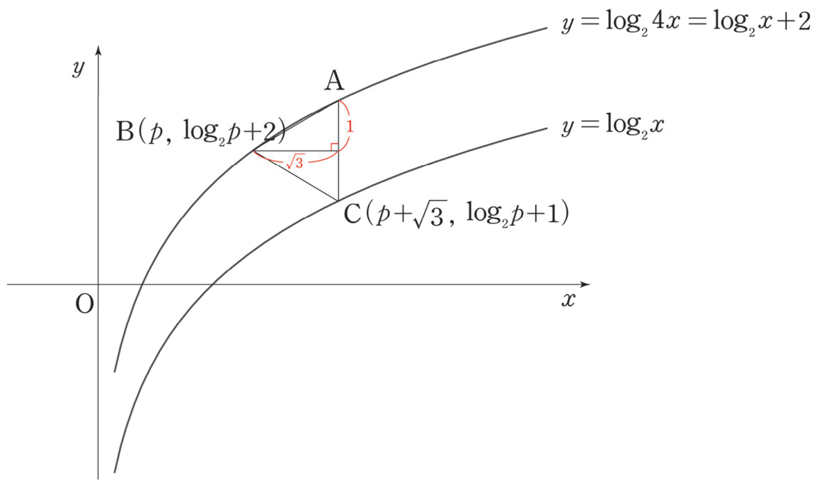
예제(26) 11학년도 9월 평가원 나형 15번

함수 $y=\log_2 4x$ 의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프 위의 점 C에 대하여 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p^2\times 2^q$ 의 값은? [4점]



① $6\sqrt{3}$　② $9\sqrt{3}$　③ $12\sqrt{3}$　④ $15\sqrt{3}$　⑤ $18\sqrt{3}$

1. $\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = \log_2 x + 2$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = 2$이다. 따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다. $\triangle\mathrm{ABC}$**는 이등변삼각형이므로 점** B**에서 수직이등분선을 그어주자.**



그림의 점 $\mathrm{B}(p,\ q)$에서 $q = \log_2 p + 2$이고, 점 C의 좌표는$(p + \sqrt{3},\ \log_2 p + 1)$이다.

점 C는 그래프 $y = \log_2 x$ 위의 점이므로 $\log_2(p + \sqrt{3}) = \log_2 p + 1 = \log_2 2p$이다.

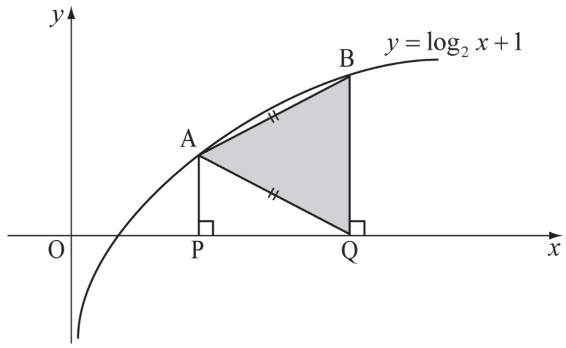
따라서 $p + \sqrt{3} = 2p$이므로 $p = \sqrt{3}$, $q = \log_2 \sqrt{3} + 2$를 얻는다.

2. $p^2 \times 2^q$를 구하자.

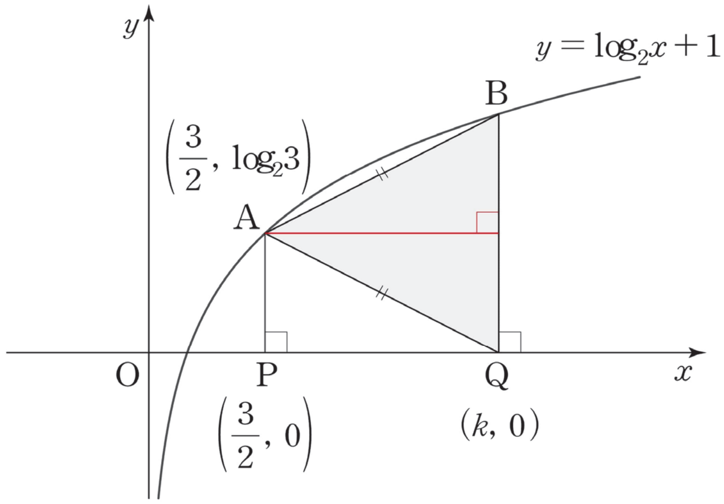
$p^2 \times 2^q = (\sqrt{3})^2 \times 2^{\log_2 \sqrt{3} + 2} = 3 \times 2^{\log_2 \sqrt{3}} \times 2^2 = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ 이므로 **답은 ③!!**

예제(27) 11년 9월 교육청 고2 나형 12번

함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자. 점 P의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AQ}}$일 때, $\triangle \mathrm{ABQ}$의 넓이는? [4점]



① $2\log_2 3$　② $\frac{5}{2}\log_2 3$　③ $3\log_2 3$　④ $\frac{7}{2}\log_2 3$　⑤ $4\log_2 3$



1. 점 P의 x좌표가 $\frac{3}{2}$이므로 점 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ \log_2\frac{3}{2}+1\right)=\left(\frac{3}{2},\ \log_2 3\right)$이다.

2. $\triangle\mathrm{ABQ}$**는 이등변삼각형이므로 점 A에서 수직이등분선을 그어주자.**

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AQ}}$에서 $\overline{\mathrm{BQ}}$의 중점의 y좌표가 점 A의 y좌표이다.

따라서 점 $\mathrm{Q}(k,\ 0)$이라 하면 점 B의 y좌표는 $\log_2 k+1$이다.

따라서 $\log_2 3=\frac{\log_2 k+1}{2}=\log_2\sqrt{2k}$이므로 $\sqrt{2k}=3$에서 $k=\frac{9}{2}$이다.

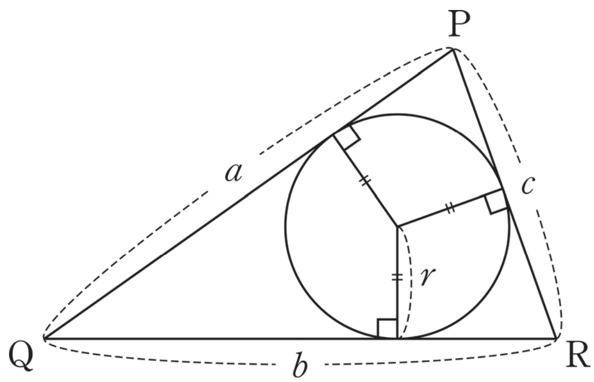
3. $\triangle\mathrm{ABQ}$의 넓이를 구하자.

$\triangle\mathrm{ABQ}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)\times\left(\log_2\frac{9}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\times 3\times 2\log_2 3=3\log_2 3$

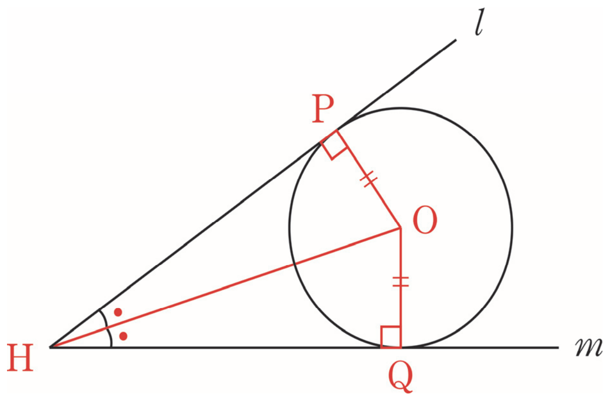
이다.

답은 ③!!

◆ 4. 새 부리를 닮은 내접원 꼴

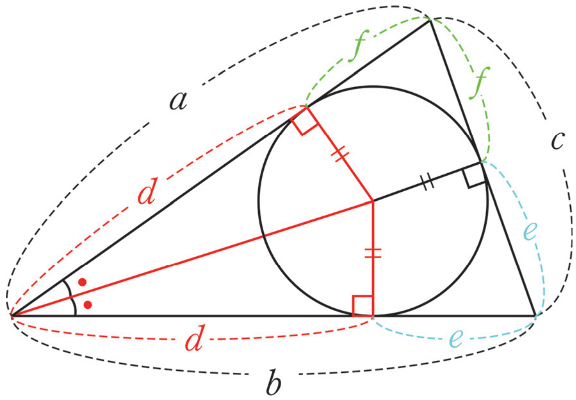


삼각형 전체와 **내접원**이 주어진다면 반사적으로 **내접원의 중심에서 접점을 잇고 직각을 표시**한다. 또한, **내접원의 중심에서 접점을 이을 때 생기는 선분**은 **모두 내접원의 반지름**이므로 **'같다'를 나타내는 표시**도 한다.

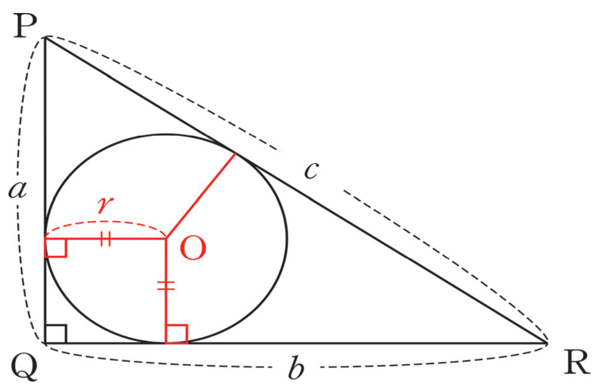


위의 그림은 두 직선이 원과 접할 때이다. **만약 원과 접하고 직선 l, 직선 m과 각각 만나도록 하는 임의의 직선 하나를 추가하면 내접원 꼴을 만들 수 있다.** 하지만 삼각형 전체와 내접원이 주어질 때와는 달리 **두 직선이 원과 접할 때는 의외로 원의 중심에서 접점을 이어 직각을 표시하지 않고 반지름이 같다는 표시를 안 하는 경우가 많다.** 이러면 $\triangle \mathrm{OHQ} \equiv \triangle \mathrm{OHP}$**를 발견하기 힘들어** 필요한 길이나 넓이를 구하는 데에 방해가 된다.

두 직선이 원과 접할 때도 위의 그림과 같이 꼭 표시해줬으면 하는 마음에서 위의 그림과 같은 꼴에 **'새 부리'** 라는 이름을 붙여 주었다. 원을 앵무새의 눈, 원의 중심을 앵무새의 동공, 사각형 OPHQ를 앵무새의 부리라고 생각하면 된다. **앵무새의 부리를 완성하기 위해서는** $\overline{\mathrm{OH}}$ **를 그어주어야 하고** 이를 그어준다면 앵무새의 머리가 완성되고 $\triangle \mathrm{OHQ} \equiv \triangle \mathrm{OHP}$를 쉽게 발견할 수 있을 것이다.



d의 길이는? $d+e+f=\dfrac{a+b+c}{2}$, $e+f=c$이므로 $d=\dfrac{a+b-c}{2}$이다.



$\triangle\mathrm{PQR}$이 직각삼각형일 때, 내접원의 반지름 r의 길이는?

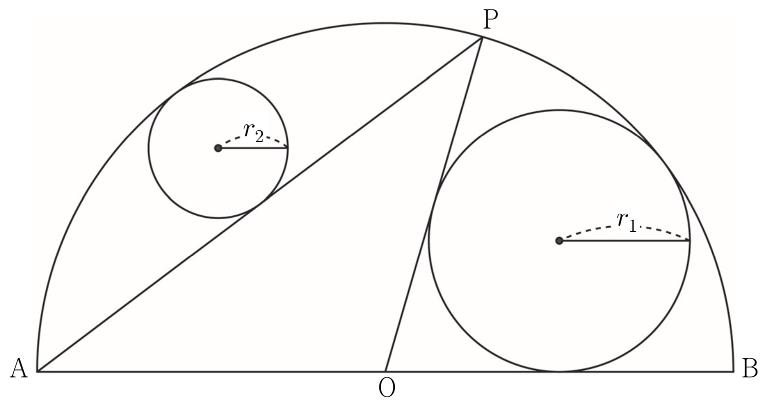
위에서 구한 방식으로 구하면 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$이다. 이전에 배웠던 내접원이 있을 때 삼각형의 넓이를 구하는 방법을 이용하면 어떨까?

$\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이는 밑변×높이를 이용하면 $\dfrac{1}{2}ab$이다. 이는 $\triangle\mathrm{POQ}$, $\triangle\mathrm{QOR}$, $\triangle\mathrm{POR}$ 각각의 넓이의 합과 같아야 한다. $\triangle\mathrm{POQ}$, $\triangle\mathrm{QOR}$, $\triangle\mathrm{POR}$의 밑변은 각각 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$, $\overline{\mathrm{PR}}$이고 밑변의 길이는 각각 a, b, c이다. 이때 $\triangle\mathrm{POQ}$, $\triangle\mathrm{QOR}$, $\triangle\mathrm{POR}$의 높이는 내접원의 반지름 r로 같다. 따라서 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$이다. $\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$이므로 $r=\dfrac{ab}{a+b+c}$이다.

$r=\dfrac{a+b-c}{2}$와 $r=\dfrac{ab}{a+b+c}$를 비교하면 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$의 표현이 더 간단하기에 문제 풀기에 더 좋은 형태임을 알 수 있다.

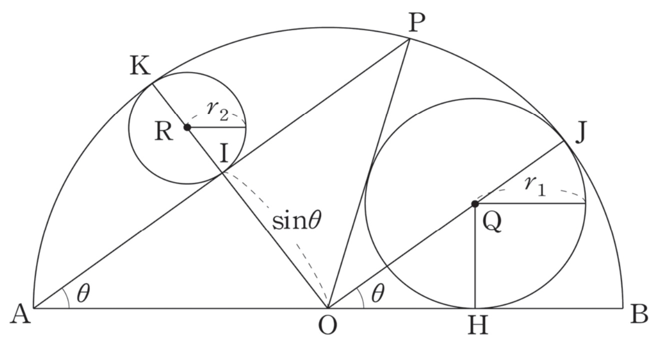
예제(28) 19년 9월 교육청 고2 나형 20번

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하고 중심이 O 인 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P 를 $\cos(\angle \mathrm{BAP}) = \frac{4}{5}$ 가 되도록 잡는다. 부채꼴 OBP 에 내접하는 원의 반지름의 길이가 r_1, 호 AP 를 이등분하는 점과 선분 AP 의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이가 r_2 일 때, $r_1 r_2$의 값은? [4 점]



① $\frac{3}{40}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{3}{20}$ ⑤ $\frac{7}{40}$

1. 새 부리를 닮은 내접원 꼴이 나왔다. 내접원의 중심과 접점을 잇고 직각을 표시하자.
또, 내접원의 중심과 점 O를 잇는 보조선도 그어주자.



반지름의 길이가 r_1인 원의 중심을 Q, 반지름의 길이가 r_2인 원의 중심을 R이라 하고,
점 Q에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H, 점 R에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 I,
각 원과 반원의 접점을 각각 J, K라 하자.

2. $\angle BAP=\theta$라 하면 $\angle BOJ=\theta$이다. $\overline{OJ}=\overline{OQ}+\overline{QJ}=\dfrac{r_1}{\sin\theta}+r_1=r_1\left(1+\dfrac{1}{\sin\theta}\right)=1$이다.

$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이므로 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$이므로 $r_1\left(1+\dfrac{1}{\sin\theta}\right)=r_1\times\dfrac{8}{3}=1$에서 $r_1=\dfrac{3}{8}$이다.

3. $\overline{OK}=\overline{OI}+\overline{IK}=\sin\theta+2r_2=1$이다. $r_2=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$이다.

따라서 $r_1r_2=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{40}$이다.

답은 ①!!

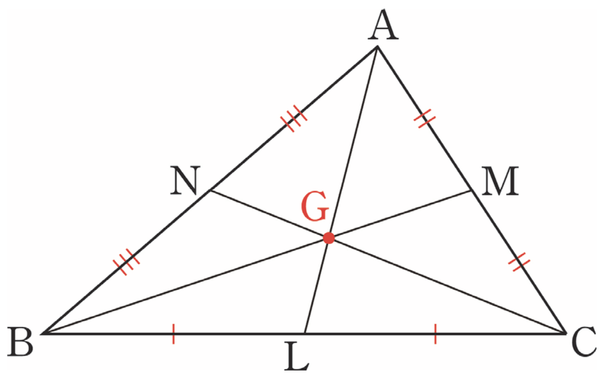
comment

직각삼각형에서 피타고라스 정리를 떠올리는 것도 좋지만 **삼각비를 이용한 길이 표현을 좀 더 자유자재로 다룰 줄 알아야 한다.**

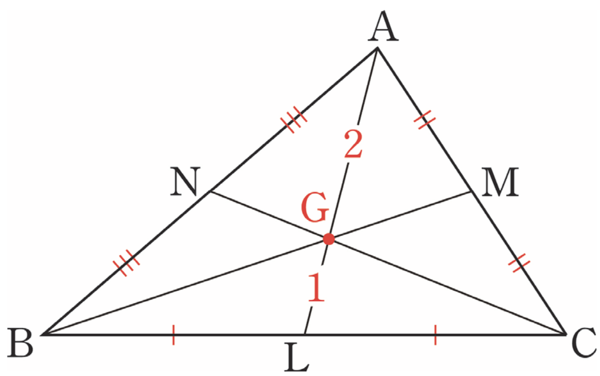
추가적 도형 성질

원과 특수한 삼각형을 제외한 중학교 도형을 완전히 잊은 경우가 있다. **무게중심, 외심, 각 이등분선, 원주각, 원에 내접하는 사각형 성질 정도는 기억하자.** 또한, 원의 반지름, 중심각을 이용하여 원 위의 점의 좌표를 잡는 방법을 짚고 넘어가겠다.

1. 무게중심

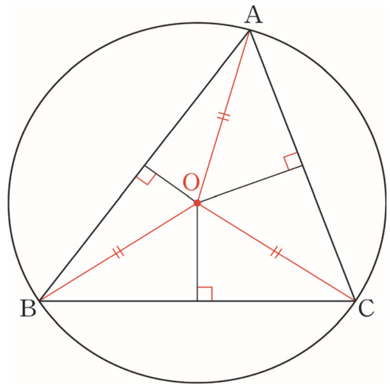


삼각형의 중선은 한 꼭짓점과 그 대변의 중심을 연결한 선을 뜻한다. 삼각형에는 세 개의 중선이 있는데,
이 세 개의 중선의 교점이 바로 무게중심이다.

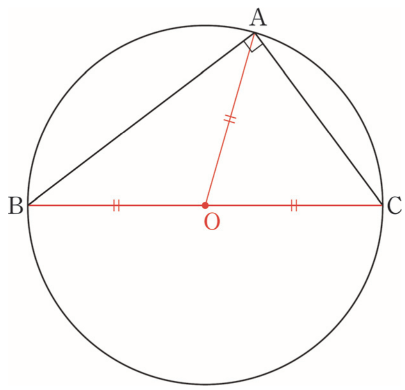


무게중심을 점 G라 하자. $\overline{\mathrm{AG}}:\overline{\mathrm{GL}}=2:1$**이다. 마찬가지로** $\overline{\mathrm{BG}}:\overline{\mathrm{GM}}=2:1$, $\overline{\mathrm{CG}}:\overline{\mathrm{GN}}=2:1$**이다.**
평가원에 기출을 풀기 위한 무게중심의 성질의 끝이다. 까먹지 말자.

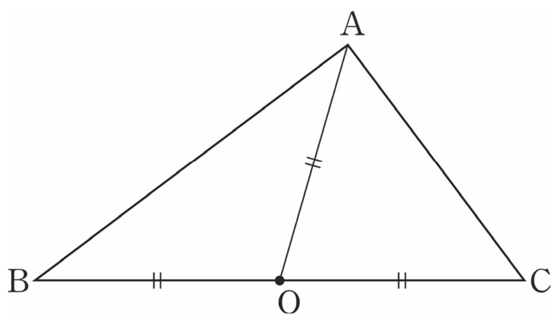
2. 외심

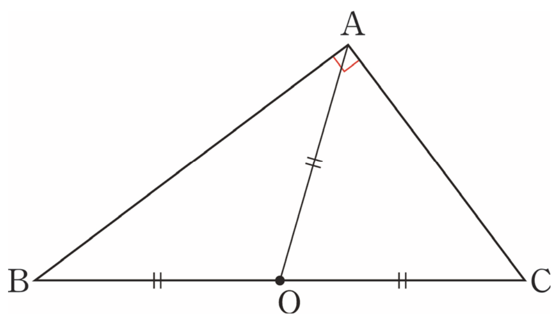


삼각형의 내심은 '새 부리를 닮은 내접원 꼴'을 다루면서 필요한 부분을 모두 다루었다. 삼각형 외심을 살펴보자.
삼각형에서 각 변의 수직이등분선의 교점을 외심이라 한다. 따라서 외심은 곧 삼각형의 외접원의 중심이다.
위 그림의 외심인 점 O에서 삼각형의 각 꼭짓점까지의 거리는 같다.



직각삼각형의 외심의 위치는 일반적인 삼각형과 달리 특이하다.
$\overline{\mathrm{BC}}$**가 외접원의 지름이므로 직각삼각형** $\triangle \mathrm{ABC}$**의 외심은 빗변의 중점** O**이다.**

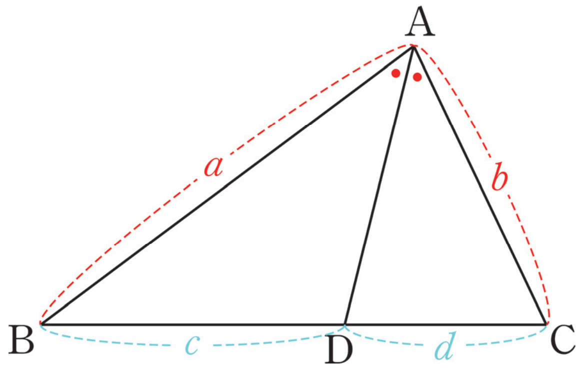




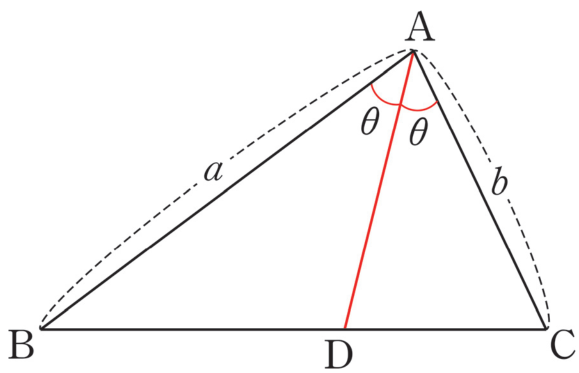
따라서 왼쪽과 같은 그림을 보면 **점** O**가 외심임을 인지하고 외접원을 떠올리며** $\angle \mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$**임을 알아야 한다. 이후 오른쪽 그림처럼 직각 표시를 해주자. 숨겨진 직각을 찾는 것은 중요한 과제이다.**
평가원에 기출을 풀기 위한 외심의 성질의 끝이다. 까먹지 말자.

3. 각의 이등분선

각의 이등분선의 성질을 정리해보겠다.



직선 AD가 $\angle \mathrm{BAC}$를 이등분하면 $a : b = c : d$이다.
평가원에 기출을 풀기 위한 각의 이등분선의 성질의 끝이다. 까먹지 말자.

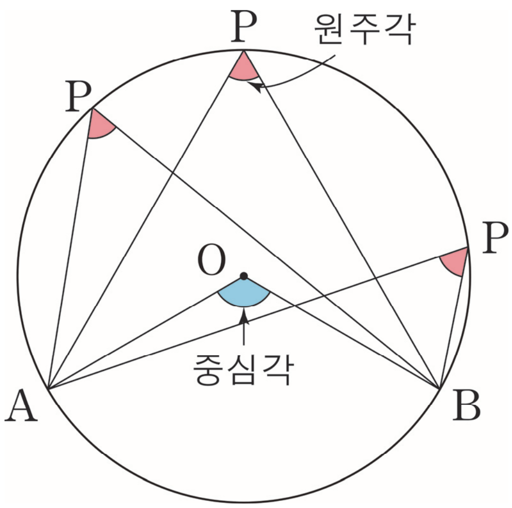


$\overline{\mathrm{AD}}$ 길이를 a, b, θ로 표현하면? 각 이등분선의 성질을 쓰라고 낸 것 같은가? 사실 아니다.
이걸 각의 이등분선의 성질을 이용해 풀려면 코사인법칙을 이용해도 복잡하다.

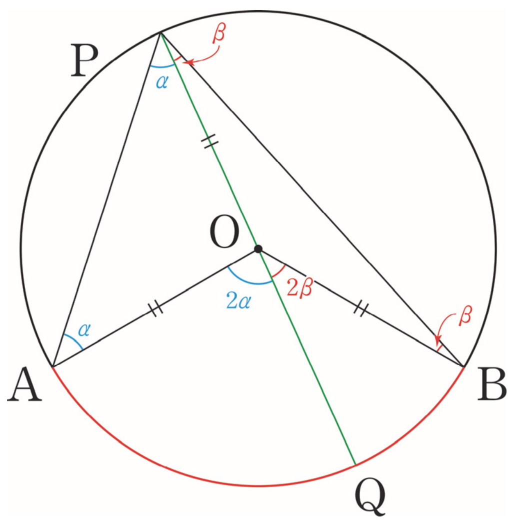
넓이에서 $\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{ABD} + \triangle \mathrm{ADC}$를 이용하면 어떨까? **$\triangle \mathrm{ABD}, \triangle \mathrm{ADC}$의 공통변이 $\overline{\mathrm{AD}}$이므로**
$\overline{\mathrm{AD}}$ 길이를 a, b, θ로 표현할 수 있을 것 같다.

$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin 2\theta$, $\triangle \mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}a\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta$, $\triangle \mathrm{ADC} = \dfrac{1}{2}b\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta$이고
$\dfrac{1}{2}ab\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}a\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta + \dfrac{1}{2}b\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta$이므로 정리하면 $\overline{\mathrm{AD}} = \dfrac{ab\sin 2\theta}{(a+b)\sin\theta}$이다.

◈ 4. 원주각



호 AB에 대한 중심각은 ∠AOB이고 호 AB에 대한 원주각은 ∠APB이다. 점 P가 원 위에 어디에 있든 **호 AB에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배**이다. 증명은 아래와 같다.

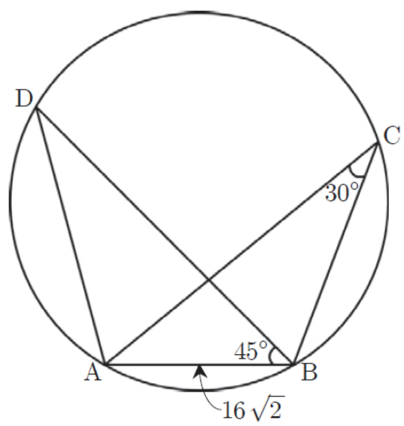


원의 반지름 길이는 모두 같으므로 △OAP, △OBP는 이등변삼각형이다. ∠OPA의 크기를 α로 두고 ∠OPB의 크기를 β로 두자. 호 AB에 대한 원주각 ∠APB의 크기는 $\alpha+\beta$이다.
△OAP의 외각 ∠AOQ의 크기는 2α이고 △OBP의 외각 ∠BOQ의 크기는 2β이다.
호 AB에 대한 중심각 ∠AOB의 크기는 $2\alpha+2\beta$이므로 호 AB에 대한 원주각 ∠APB의 크기의 2배이다.

원주각이 기억 안 난다면 원의 중심과 원 위의 서로 다른 두 점을 이어 만든 이등변삼각형을 이용해도 되지만 굿는 반지름의 수가 너무 많아지면 그림을 알아보기가 힘들다. **웬만하면 원주각을 바로 알아보고 필요한 각을 구하자.**

예제(29) 11년 3월 교육청 고2 25번

그림과 같이 한 원에 내접하는 두 삼각형 ABC, ABD에서 $\overline{AB}=16\sqrt{2}$, $\angle ABD=45°$, $\angle BCA=30°$일 때, 선분 AD의 길이를 구하시오. [3점]



1. 원주각의 성질을 이용하여 $\angle ADB$의 크기를 구하자.
   $\overset{\frown}{AB}$의 원주각은 $\angle ACB=\angle ADB=30°$이다.

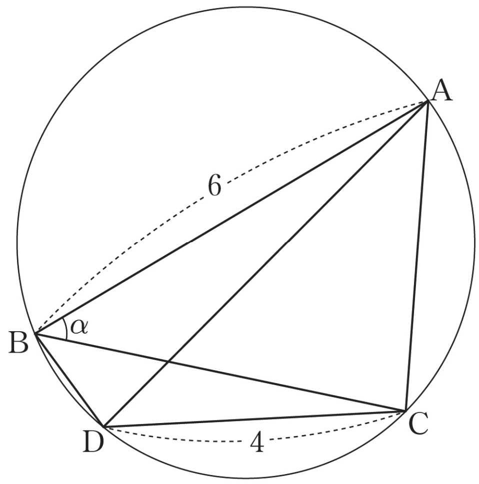
2. $\triangle ABD$에서 사인법칙을 이용하면 $\overline{AD}$를 구할 수 있다.
   $\dfrac{16\sqrt{2}}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin 45°}$에서 $32\sqrt{2}=\overline{AD}\times\sqrt{2}$이다. 따라서 $\overline{AD}=32$이다.

답은 32!!

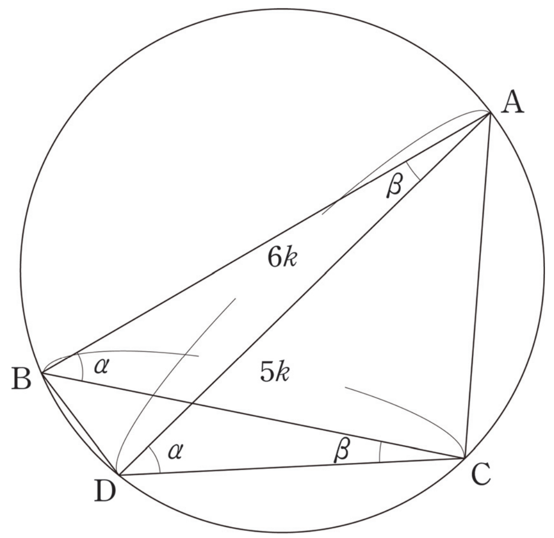
예제(30) 20년 3월 교육청 나형 29번

그림과 같이 예각삼각형 ABC 가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=6$ 이고, $\angle \mathrm{ABC}=\alpha$ 라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ 이다. 점 A 를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D 에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=4$ 이다.

두 삼각형 ABD, CBD 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$ 이다. 삼각형 ADC 의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



1. $\angle\mathrm{ABC}$와 $\angle\mathrm{ADC}$는 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$에 대한 원주각이므로 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$라 하자.
$\angle\mathrm{BAD}$와 $\angle\mathrm{BCD}$는 $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$에 대한 원주각이므로 $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\beta$라 하자.



두 삼각형 ABD, CBD 의 넓이 S_1, S_2는 각각

$S_1=\frac{1}{2}\times 6\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\beta$, $S_2=\frac{1}{2}\times 4\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\beta$이다.

주어진 조건에서 $S_1:S_2=9:5$ **이므로** $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BC}}=6:5$ **이다.** $\overline{\mathrm{AD}}=6k$, $\overline{\mathrm{BC}}=5k$**로 두자.**

2. $\overline{\mathrm{AD}}=6k$를 구하면 삼각형 ADC 의 넓이 S를 구할 수 있다. k를 구해보자.
삼각형 ABC **에서 코사인법칙에 의해** $\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha$**이다.**
삼각형 ADC **에서 코사인법칙에 의해** $\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha$**이다.**

두 식을 연립하면 $11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$에서 $k=1$ 이다. $(k>0)$
따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=6k=6$**이다.**

$\overline{\mathrm{AD}}=6$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로 삼각형 ADC 의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$ 이다.

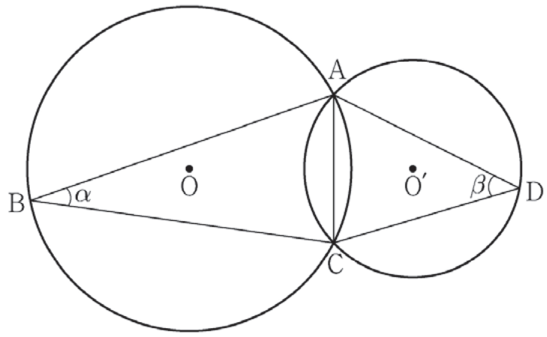
따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$이다.

답은 63!!

예제(31) 22학년도 예비평가 21번

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD 의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle \mathrm{ABC}=\alpha$, $\angle \mathrm{ADC}=\beta$ 라 할 때, $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{OO'}}=1$ 이 성립한다.

삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



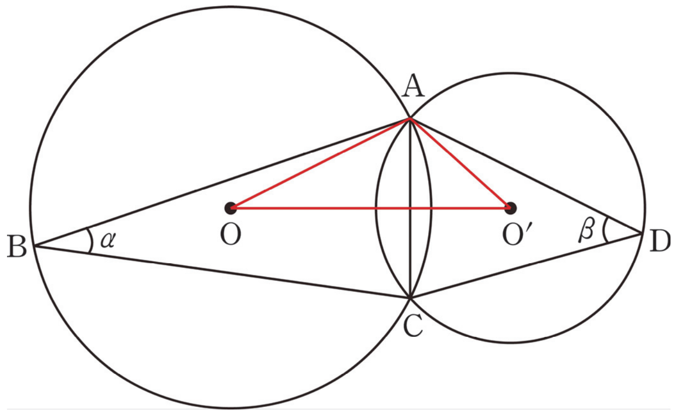
1. **두 원의 공통현은** $\overline{AC}$**이다. 사인법칙을 이용하면** $2\times\overline{OA}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\alpha}$, $2\times\overline{O'A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta}$**이다.**

   $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{2}$**이므로 두 원의 반지름의 길이의 비는** $\overline{OA}:\overline{OA'}=3:2$**이다.**

   각각의 반지름의 길이를 $3k$, $2k$라 하자.

2. **원주각을 이용하기 위해 세 점** A, O, O′**을 이어주자.**

   삼각형 AOO′**에서** $\angle AOO'=\alpha$, $\angle AO'O=\beta$, $\angle OAO'=\pi-(\alpha+\beta)$**이다.**



삼각형 AOO′**에서 코사인법칙을 활용하면** $\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{3}$**이므로**

$1=9k^2+4k^2-12k^2\cos(\pi-(\alpha+\beta))=17k^2$**이다.**

$k^2=\dfrac{1}{17}$, $S=9k^2\pi=\dfrac{9}{17}\pi$, $p+q=26$이다.

답은 26!!

comment

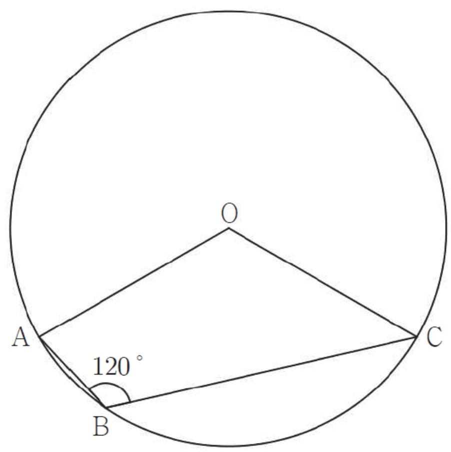
$\angle OAO'$**의 크기를 표시하지 않았다면** $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$**을 어떻게 활용해야 하는지 보이지 않았을 것이다.** $\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)$**를 바로 알아보면 좋다.**

예제(32) 21학년도 사관 가형 15번

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

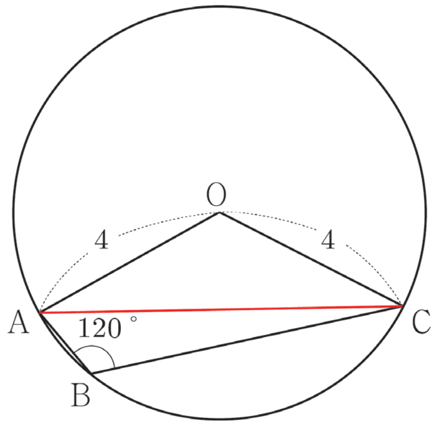
$$\angle ABC = 120°, \ \overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는? [4점]



① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

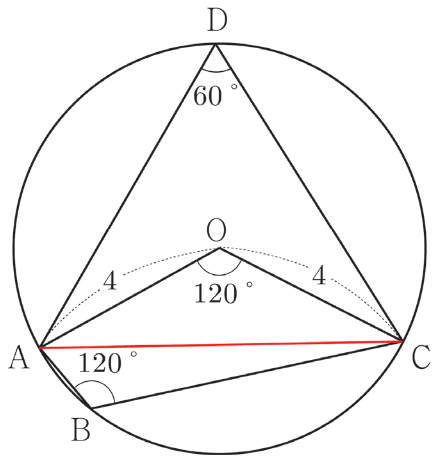
1. 사각형 OABC에 현 $\overline{\mathrm{AC}}$를 그어서 $\triangle\mathrm{OAC}$와 $\triangle\mathrm{ABC}$로 나눠주자.



먼저 $\triangle\mathrm{OAC}$의 넓이를 구하자.

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}=4$이므로 $\angle\mathrm{AOC}$만 구하면 삼각형 $\triangle\mathrm{OAC}$의 넓이를 구할 수 있다.

현 AC의 중심각 $\angle\mathrm{AOC}$의 크기는 현 AC의 원주각의 크기의 두 배이므로
원주각의 크기를 구하자.

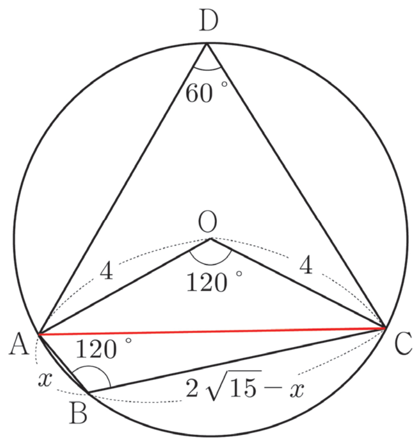


그림에서 사각형 ABCD**는 원에 내접한다.** $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ **이므로**
원에 내접하는 사각형의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{ADC}=60^\circ$ **이므로** $\angle\mathrm{AOC}=120^\circ$ **이다.**

$\triangle\mathrm{OAC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin120^\circ=4\sqrt{3}$ 이고, $\overline{\mathrm{AC}}=2\times4\cos30^\circ=4\sqrt{3}$ 이다.

2. $\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이를 구하기 위해 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 구해보자.

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{15}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=x$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{15}-x$라 하자.



코사인법칙을 활용하자. $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\cos 120°$ 에서

$$\begin{aligned}48 &= x^2+(2\sqrt{15}-x)^2-2\cdot x\cdot(2\sqrt{15}-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= x^2+x^2-4\sqrt{15}x+60+2\sqrt{15}x-x^2\\ &= x^2-2\sqrt{15}x+60\\ &= (x-\sqrt{15})^2+45\end{aligned}$$
이므로

$(x-\sqrt{15})^2=3$, $x=\sqrt{15}-\sqrt{3}$ $(\because \overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{15}-\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{15}+\sqrt{3}$ 이므로

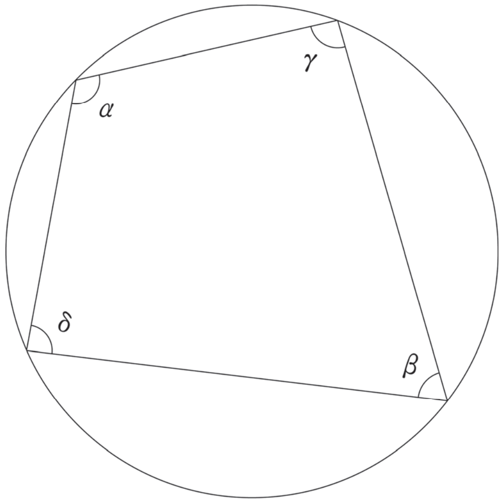
$\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}(\sqrt{15}-\sqrt{3})(\sqrt{15}+\sqrt{3})\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}(15-3)=3\sqrt{3}$ 이므로

사각형 OABC의 넓이는 $4\sqrt{3}+3\sqrt{3}=7\sqrt{3}$ 이다.

답은 ⑤!!

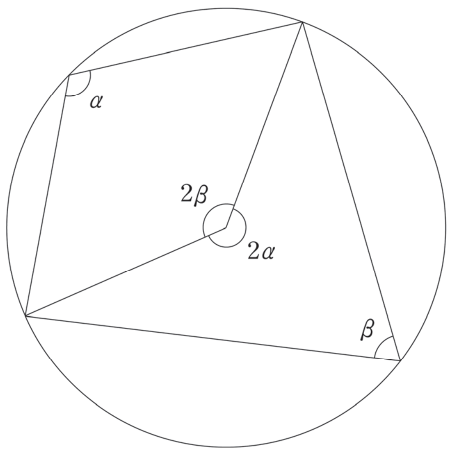
◆ 5. 원에 내접하는 사각형

사인법칙, 코사인법칙과 결합하여 종종 기출에 등장하는 도형이 있다. 바로 원에 내접하는 사각형이다.
이와 관련된 문제를 풀기 위해 원에 내접하는 사각형의 성질 하나 정도만 알면 된다.



바로 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 합은 180° 라는 점이다.
위 그림에서 $\alpha+\beta=180^\circ$, $\gamma+\delta=180^\circ$ 이다.

증명은 다음과 같다.



원의 중심 O를 먼저 표시하자. $\angle\mathrm{BAD}$의 크기를 α로 두고 $\angle\mathrm{BCD}$의 크기를 β로 두자.
$\angle\mathrm{BAD}$는 호 BCD에 대한 원주각이므로 호 BCD의 중심각인 $\angle\mathrm{BOD}$의 크기는 2α이다.
$\angle\mathrm{BCD}$는 호 BAD에 대한 원주각이므로 호 BAD의 중심각인 $\angle\mathrm{BCD}$의 크기는 2β이다.
$2\alpha+2\beta=360^\circ$ 이므로 $\alpha+\beta=180^\circ$ 이다.
따라서 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 합은 180° 이다.

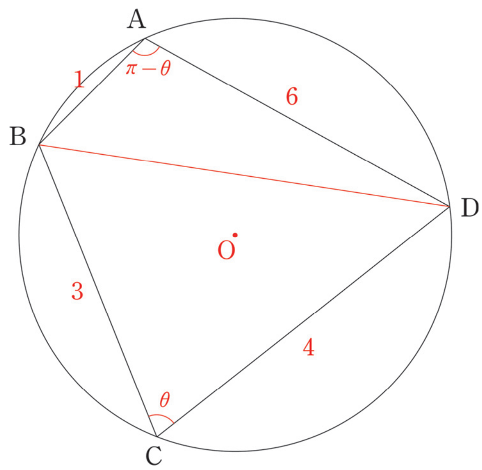
사각형의 '외접원'이 그려져 있지 않더라도, 대각의 합이 180° 라면 외접원을 떠올릴 수 있어야 한다.

예제(33) 15학년도 경찰대 5번

원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{DA}=6$이다. 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]

① $5\sqrt{2}$　② $6\sqrt{2}$　③ $7\sqrt{2}$　④ $8\sqrt{2}$　⑤ $9\sqrt{2}$

1. 조건에 맞는 그림을 그려주자.



원의 중심 O**를 꼭 찍어주자.** 사각형 ABCD의 넓이를 구하기 위해서는 삼각형 BCD와 삼각형 ABD의 넓이를 각각 구한 후 합하면 된다. 이러기 위해서 **선분** BD**를 그어 주자.**

$\angle\mathrm{BCD}$의 크기를 θ로 두면 사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이기에
$\angle\mathrm{BCD}$의 대각인 $\angle\mathrm{BAD}$의 크기는 $\pi-\theta$이다.

2. 선분 BD는 삼각형 BCD와 삼각형 ABD의 공통변이다.
삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면 $\overline{\mathrm{BD}}^2=3^2+4^2-24\cos\theta$로 표현할 수 있다.
삼각형 ABD에서 코사인법칙을 이용하면 $\overline{\mathrm{BD}}^2=1^2+6^2-12\cos(\pi-\theta)$로 표현할 수 있다.

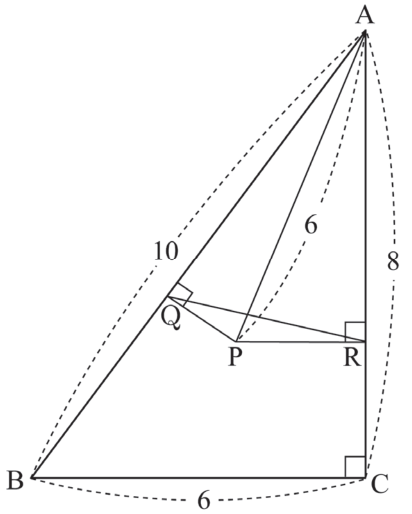
$\overline{\mathrm{BD}}^2=3^2+4^2-24\cos\theta=1^2+6^2-12\cos(\pi-\theta)$이므로 $25-24\cos\theta=37+12\cos\theta$이다.
이를 정리하면 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$이다.

3. 삼각형 BCD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\sin\theta=6\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$이고,
삼각형 ABD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1\times6\times\sin(\pi-\theta)=3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$이므로
사각형 ABCD의 넓이는 $4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$이다.

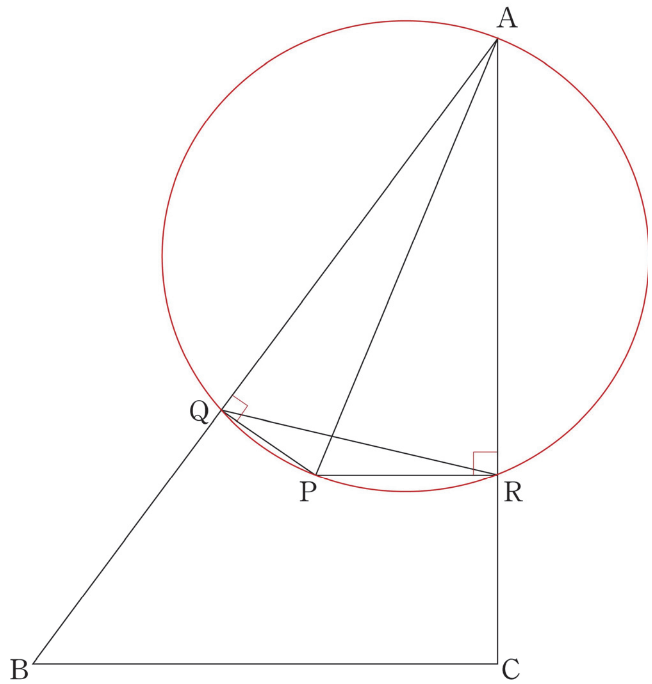
답은 ②!!

예제(34) 09년 3월 교육청 고2 19번

그림과 같이 $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$ 인 삼각형 ABC 와 그 삼각형의 내부에 $\overline{AP}=6$ 인 점 P 가 있다. 점 P 에서 변 AB 와 변 AC 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라 할 때, 선분 QR 의 길이는? [4점]



① $\frac{14}{5}$ ② 3 ③ $\frac{16}{5}$ ④ $\frac{17}{5}$ ⑤ $\frac{18}{5}$



1. $\angle \mathrm{ARP} = \angle \mathrm{AQP} = \frac{\pi}{2}$이다. 사각형 AQPR에서 대각의 합이 π이므로

이 사각형은 $\overline{\mathrm{AP}}$를 지름으로 하는 원에 내접한다. 삼각형 AQR 역시 이 원에 내접한다.

2. 삼각형 AQR에서 사인법칙을 적용하자. $\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\sin \angle \mathrm{A}} = 6$에서 $\sin \angle \mathrm{A} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$이므로

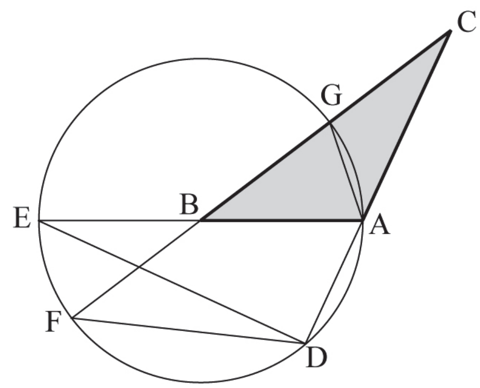
$\overline{\mathrm{QR}} = 6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$이다.

답은 ⑤!!

예제(35) 08년 6월 교육청 고2 가형 14번

다음은 $\angle A$ 가 둔각인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ 라 할 때, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 임을 증명하는 과정이다.

<증명>



그림과 같이 점 B를 중심으로 하고 $\overline{AB}$ 를 반지름으로 하는 원을 그리고, 선분 $\overline{BC}$ 와 원이 만나는 점을 G라 하자.

$\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 연장선과 원이 만나는 점을 각각 D, E, F라 할 때,

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

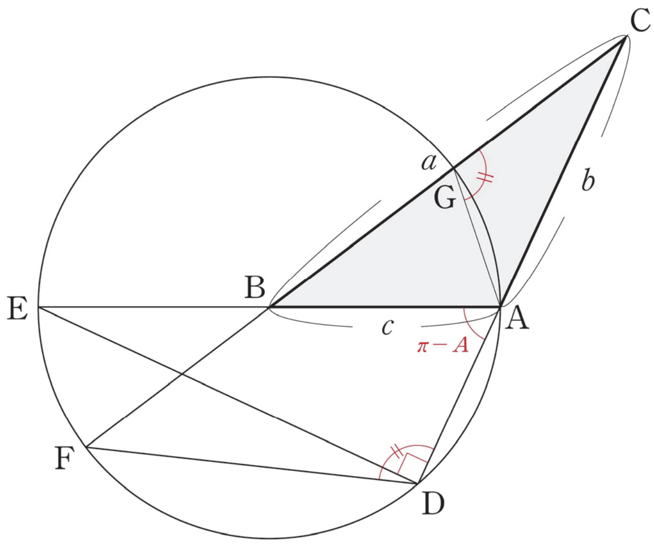
또 $\triangle ACG$ 와 $\boxed{\text{(나)}}$ 는 서로 닮음이므로

$(a-c):b=$ $\boxed{\text{(다)}}$ $:(a+c)$

$\therefore\ \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 이다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\cos A$	$\triangle ABC$	$b+2c\cos A$
②	$\cos A$	$\triangle ABC$	$b-2c\cos A$
③	$-\cos A$	$\triangle ABC$	$b+2c\cos A$
④	$-\cos A$	$\triangle FCD$	$b-2c\cos A$
⑤	$-\cos A$	$\triangle FCD$	$b+2c\cos A$



1. $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AE}}} = \cos(\pi - A) = -\cos A$이다. $\boxed{(가)} = -\cos A$이다.

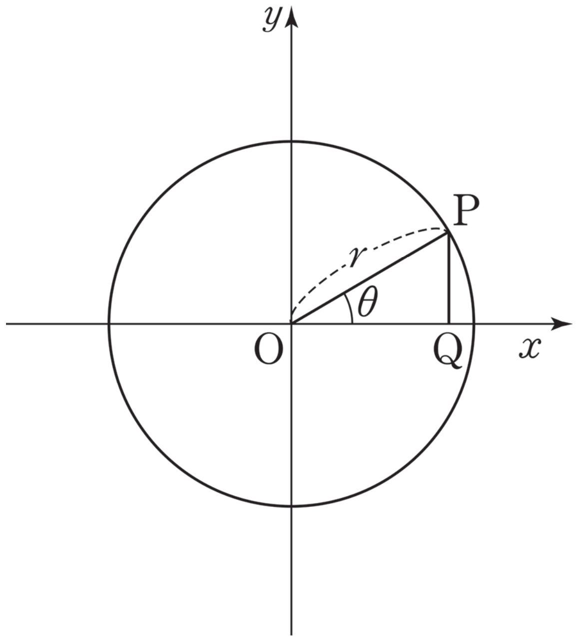
2. **사각형 ADFG는 원에 내접하는 사각형이므로** $\angle\mathrm{ADF} = \pi - \angle\mathrm{AGB} = \angle\mathrm{AGC}$**이다.**
따라서 $\angle\mathrm{C}$는 공통이고 $\angle\mathrm{ADF} = \angle\mathrm{AGC}$이므로 $\triangle\mathrm{ACG}$와 $\triangle\mathrm{FCD}$는 서로 닮음이다.
$\boxed{(나)} = \triangle\mathrm{FCD}$이다.

3. $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BG}} = c$이므로 $a - c = \overline{\mathrm{CG}}$이다. $b = \overline{\mathrm{AC}}$이고, $a + c = \overline{\mathrm{CF}}$이므로
$\boxed{(다)} = \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{CA}} + \overline{\mathrm{AD}} = b - \overline{\mathrm{AE}}\cos A = b - 2c\cos A$이다.

답은 ④!!

6. 원 위의 점 좌표 잡기

문제에서 도형적 요소를 발견하기 힘들거나 많은 생각 없이 마무리하고 싶을 때 좌표를 이용하면 좋다.



$\triangle\mathrm{OPQ}$에서 $\overline{\mathrm{OP}}=r$이므로 삼각비를 이용해 점 P의 좌표를 나타낼 수 있다. 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 **점 P의 좌표는** $(r\cos\theta, r\sin\theta)$이다. θ의 값에 상관없이 항상 성립한다.