§1.1. 지수와 로그

§1.1.1. 거듭제곱과 거듭제곱근

Def. 거듭제곱

$a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ a의 n제곱 : a^n

$$\doteq \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{번}}$$

$\therefore$ a의 거듭제곱

$\doteq a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots$ 통틀어 이르는 말

$\therefore$ a^n의 밑 $\doteq a$

$\therefore$ a^n의 지수 $\doteq n$

e.g.) $\underline{2^5} = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$.

Def. 거듭제곱근

$a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$\therefore$ x가 a의 n제곱근이다

$\doteq x^n = a$.

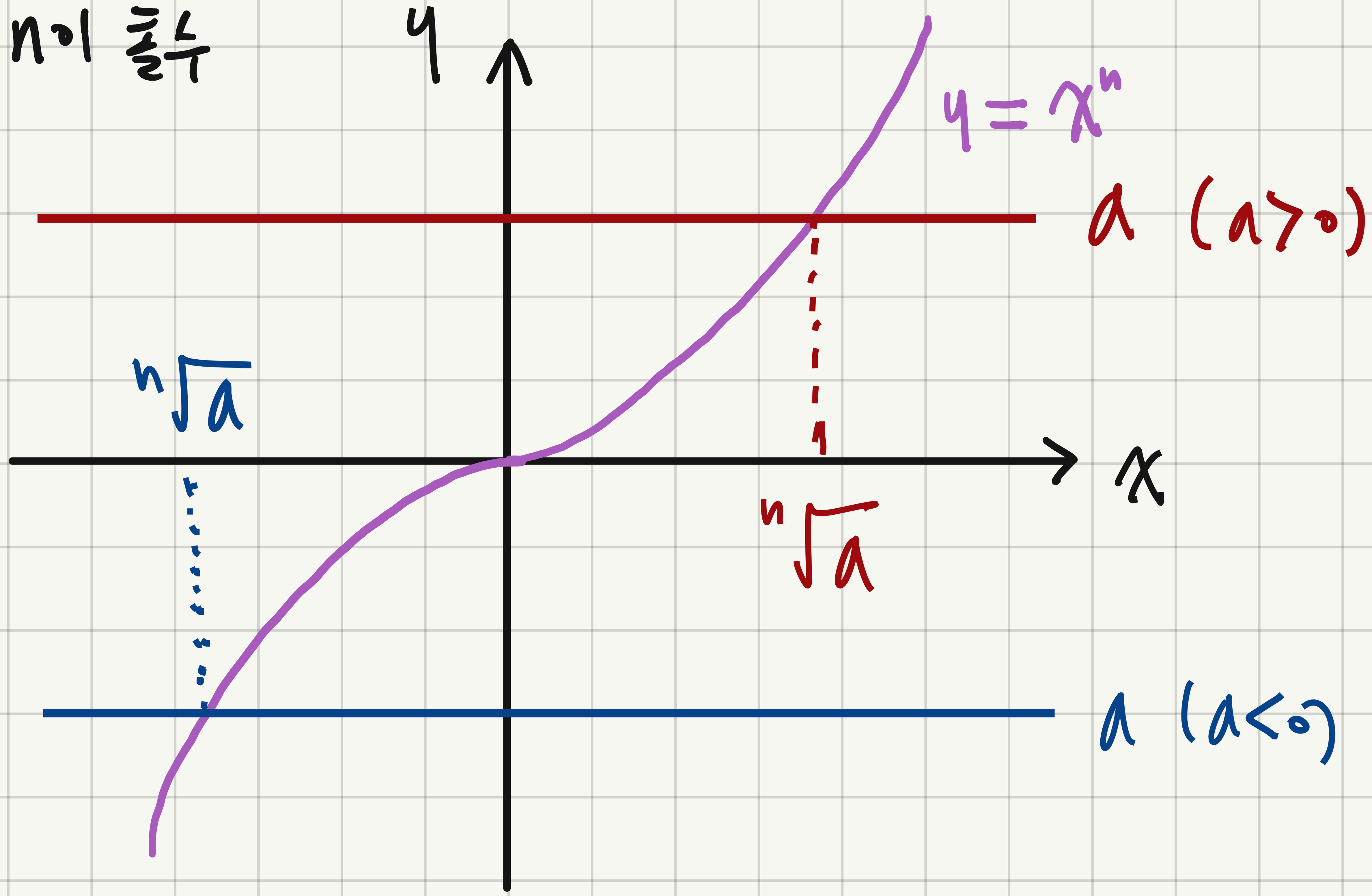
e.g.) 16의 4제곱근 : $2, -2$

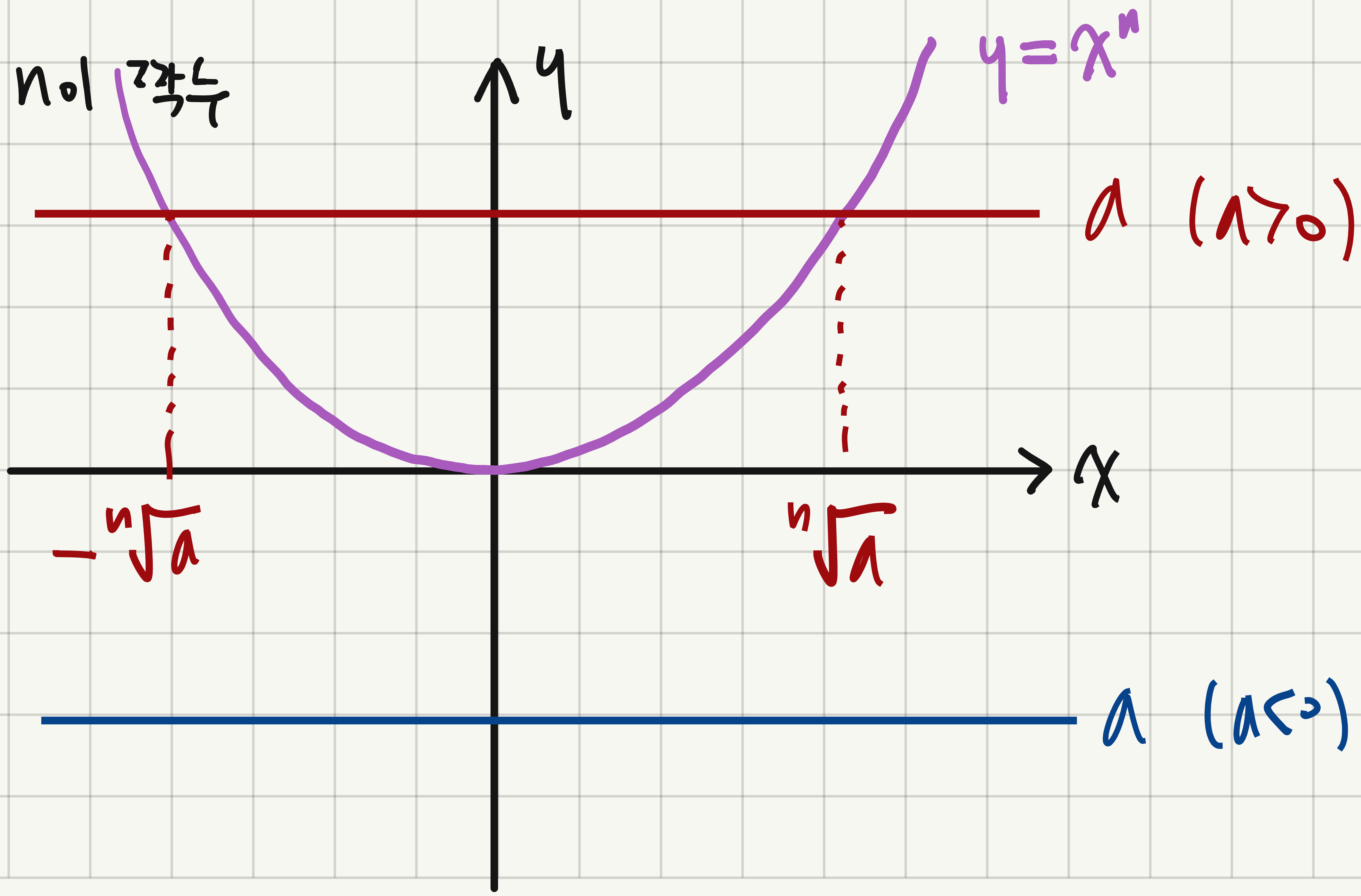
-27의 3제곱근 : -3

-1의 제곱근 : $i, -i$

a의 실수인 n제곱근이 존재.

$$\therefore \sqrt[n]{a} \doteq \begin{cases} n\text{이 홀수일 때, } a\text{의 } n\text{제곱근} \\ n\text{이 짝수일 때, 0 이상인 } a\text{의 } n\text{제곱근} \end{cases}$$





Note : a의 실수인 n 제곱근

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

01. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은?

$f(n)$

[3점][2020년 6월 가12]

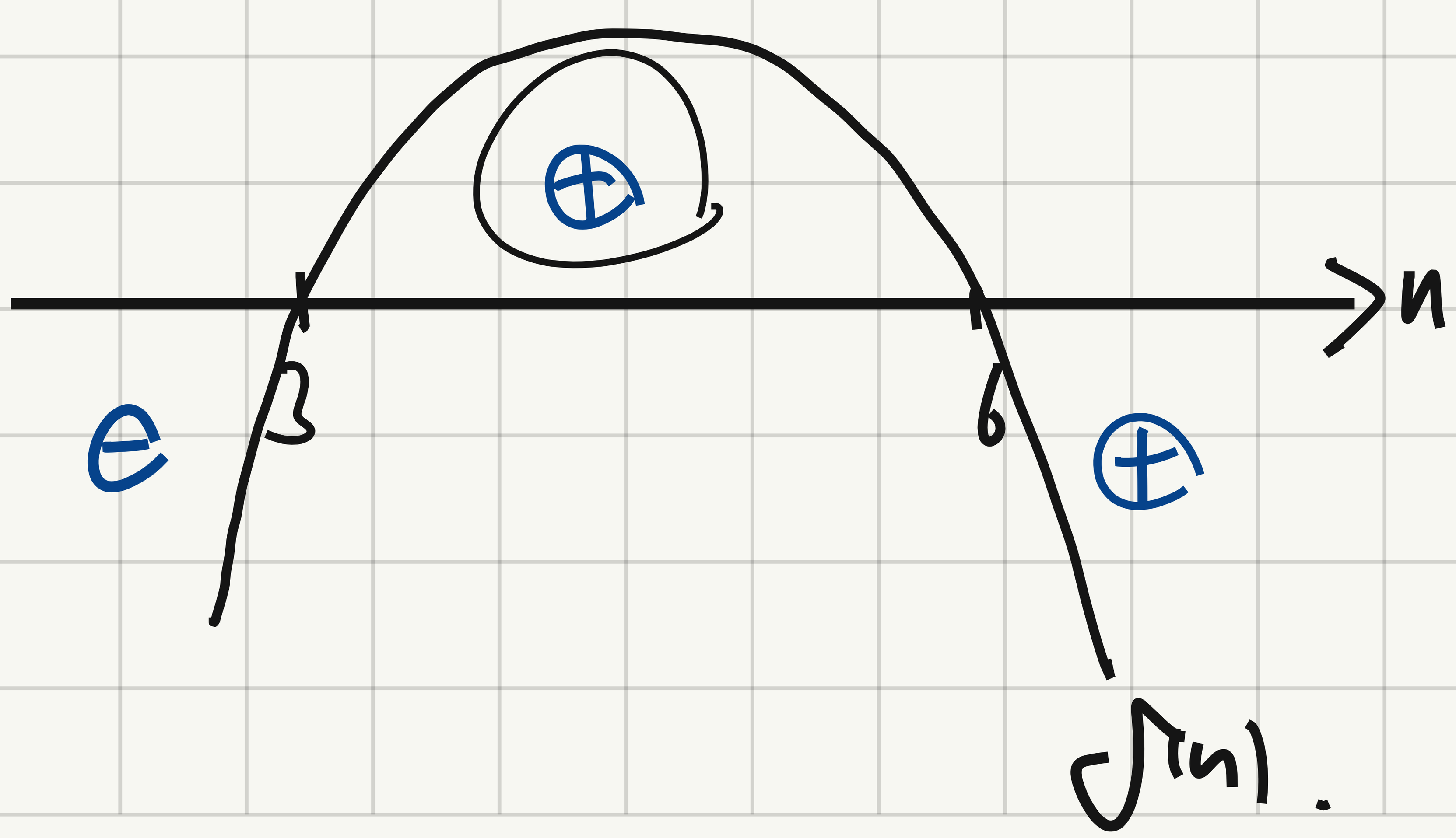
① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

n이 짝수 : $f(n) > 0$

n이 홀수 : $f(n) < 0$

$f(n) = -n^2+9n-18$

$= -(n-6)(n-3)$



$n=4$

$n=7, 9, 11$

$\therefore$ 구 $= 4+7+9+11$

$= 31$

Thm. 거듭제곱근의 성질

$a>0 \wedge b>0 \wedge m,n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$\therefore$ ① $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

$\therefore$ ② $\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

$\therefore$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

$\therefore$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Pf.

① GOAL : ab의 양의 n제곱근 $= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

i) $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$. $\Rightarrow \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} > 0$.

ii) $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n$

$= a \cdot b$

③ GOAL : a^m의 양의 n제곱근 $= (\sqrt[n]{a})^m$.

i) $\sqrt[n]{a}>0 \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^m > 0$.

ii) $((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = (\sqrt[n]{a})^{nm}$

$= ((\sqrt[n]{a})^n)^m$

$= a^m$.

$\boxtimes$

02. $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[4]{3}$ 일 때, $\sqrt[8]{6}$을 a, b로 나타내면?

[2점][2004년 4월 가나01]

① $\sqrt[4]{a}\,\sqrt{b}$　　② $\sqrt[3]{a}\,\sqrt{b}$　　③ $\sqrt{a}\,b$

④ $a^2 b$　　⑤ $a^4 b^2$

$\therefore\ \sqrt[8]{6} = \sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[8]{3}$.　(∵①)

$= \sqrt[(4\cdot 2)]{2}\cdot\sqrt[(2\cdot 4)]{3}$

$= \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{b}$　(∵④).

03. $1 \leqq m \leqq 3$, $1 \leqq n \leqq 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

[3점][2010년 9월 나26]

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

지수성질 .. 나중에.