

기·출·의·파·급·효·과
확률과 통계



확률과 통계
기출의 파급효과

확률과 통계의 도구와 태도

Chapter 1. Advice, 표본공간과 사건, 평가원 4번_ 010p

Chapter 2. 여사건, 부분 여사건_ 021p

Chapter 3. 분할, 조합, 같은 것이 있는 순열_ 048p

Chapter 4. 원순열_ 122p

Chapter 5. 확률과 경우의 수의 차이점, 독립시행, 조건부확률_ 131p

Chapter 6. 이산확률분포, 표본평균_ 171p

Chapter 7. 이항분포, 정규분포, 정규분포곡선의 대칭성_ 190p

Chapter 8. 모평균 추정_ 214p

Chapter 9. 각종 꿀팁들 모음_ 219p

Chapter 10. 추가 확률과 통계 문제_ 284p

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 3년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 확률과 통계 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 단시간에 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러 이상의 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter들을 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습 효과를 기대할 수 있습니다.

2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출들을 칼럼 속 예시로 들었습니다. 21학년도 수능 경향과 해당 기출까지 반영되어 있습니다.

확률과 통계 기출 중 주로 오답률이 높았던 평가원 문제들을 예시로 들었습니다. 칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

최근 교육청 사관 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 칼럼과 함께 있는 예시들은 확률과 통계 교재의 경우 대략 70문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 위해 충분히 넣었습니다. 확률과 통계 교재의 경우 대략 130문제입니다. 칼럼 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구들 기준으로 분리되었습니다.

4. 칼럼 속 예시 해설과 유제 해설은 문제를 푸는 데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예시 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제는 칼럼과 예시들을 잘 학습했다면 무리 없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 칼럼 하나만 완료하고 유제 10문제만 푸세요! 이를 실천하면 확률과 통계 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 3등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.

약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극히 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고 18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고 19학년도 수능 96점을 받아내었습니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 수능 때까지 계속 끌고 가야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

분할, 조합, 같은 것이 있는 순열을 이용하면 완전히 무식하게 푸는 것보다 시간도 더 적게 걸리고 더 정확하다. 기준을 세워 큰 CASE 분류 후 각 CASE마다 경우의 수를 구할 때 필요한 기본적인 전부인 도구들이다.

◇ 분할

CASE 분류에서 제일 base를 이룬다. 자연수의 분할, 조 나누기가 있다. ‘조 나누기’는 고등학교 1학년 때 배운 조합 단원에서 많이 나오는 유형 중 하나이다. ‘자연수의 분할’ 용어와 기호 자체는 15 개정 교육과정에 없으나 이를 ‘거쳐’ 푸는 문제들은 출제되므로 연습 겸 책에서 다루도록 하겠다. 다만, 순수하게 분할만을 이용해 푸는 문제는 15 개정 교육과정 수능에서 배제된다.

◇ 1. 자연수의 분할

자연수 n 을 자신보다 크지 않은 자연수 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ 의 합으로 $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ ($n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k$)와 같이 표현하는 것을 자연수의 분할이라고 한다.

예를 들어 5를 2개의 자연수로 분할한다면 (4, 1), (3, 2)로 2가지가 나온다. 7을 3개의 자연수로 분할한다면? 내림차순으로 (5, 1, 1), (4, 2, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2)로 4가지가 나온다. 오름차순으로 해도 되고 내림차순으로 해도 된다. 개인적으로 내림차순을 더 좋아한다.

◇ 2. 조 나누기

n 명의 사람을 k ($1 \leq k \leq n$)개의 조로 나누는 경우의 수를 구해보자. 어떻게 구할까?

예를 들어 n 명을 3개의 조로 나누는 경우의 수는 다음과 같다.

(1) p, q, r 이 모두 다른 수일 때, ${}_n C_p \times {}_{n-p} C_q \times {}_r C_r$ 이다.

(2) p, q, r 중 어느 두 수만 서로 같을 때, ${}_n C_p \times {}_{n-p} C_q \times {}_r C_r \times \frac{1}{2!}$ 이다.

(3) p, q, r 의 세 수가 모두 같을 때, ${}_n C_p \times {}_{n-p} C_q \times {}_r C_r \times \frac{1}{3!}$ 이다.

더 구체적인 예시로 6명을 3개의 조로 분할하는 경우의 수를 구해보자. 각 집합에 들어갈 원소의 개수부터 정하도록 하자. 자연수 분할을 통해 구해보면 $(4, 1, 1)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$ 이다.

이제 같은 것이 있는 순열을 이용하여 서로 다른 공 원소 6개를 들어갈 원소의 개수를 고려하여 각 집합에 나누어 주자.

$$(4, 1, 1) \rightarrow {}_6 C_4 \times {}_2 C_1 \times {}_1 C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

$$(3, 2, 1) \rightarrow {}_6 C_3 \times {}_3 C_2 \times {}_1 C_1 = 60$$

$$(2, 2, 2) \rightarrow {}_6 C_2 \times {}_4 C_2 \times {}_2 C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$$

따라서 원소의 개수가 6인 집합을 3개의 집합으로 분할하는 경우의 수는 총 90가지이다.

결론적으로 조 나누기는 자연수의 분할만 제대로 한 후에 같은 것이 있는 순열만 적용하면 쉽게 풀린다.

자 이제 다양한 기본적인 상황들을 살펴보고 답을 구해보자. 이 상황들을 '거쳐' 푸는 문제들은 출제되지만 이를 단독으로 물어보는 문제는 15 개정 교육과정 수능에서 배제된다.

1. 서로 같은 8개의 공을 서로 같은 3개의 박스에 나누어 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 박스는 없다.)
2. 서로 같은 8개의 공을 서로 같은 3개의 박스에 나누어 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 박스가 존재할 수도 있다.)
3. 서로 같은 8개의 공을 서로 다른 3개의 박스에 나누어 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 박스가 존재할 수도 있다.)
4. 서로 같은 8개의 공을 서로 다른 3개의 박스에 나누어 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 박스는 없다.)
5. 서로 다른 6개의 공을 서로 같은 3개의 박스에 나누어 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 박스는 없다.)
6. 서로 다른 6개의 공을 서로 같은 3개의 박스에 나누어 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 박스가 존재할 수도 있다.)
7. 서로 다른 6개의 공을 서로 다른 3개의 박스에 나누어 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 박스는 없다.)
8. 서로 다른 6개의 공을 서로 다른 3개의 박스에 나누어 담는 방법의 수를 구하여라.
(단, 빈 박스가 존재할 수도 있다.)

1. 8을 3개의 자연수로 분할하는 상황과 같다. 8을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수는 (6, 1, 1), (5, 2, 1), (4, 3, 1), (4, 2, 2), (3, 3, 2)로 5가지이다.
2. 8을 3개 이하의 자연수로 분할하는 상황과 같다. 8을 1개의 자연수로 분할하는 경우의 수는 (8, 0, 0)로 1가지이다. 8을 2개의 자연수로 분할하는 경우의 수는 (7, 1, 0), (6, 2, 0), (5, 3, 0), (4, 4, 0)로 4가지이다. 8을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수는 (6, 1, 1), (5, 2, 1), (4, 3, 1), (4, 2, 2), (3, 3, 2)로 5가지이다. 따라서 8을 3개 이하의 자연수로 분할하는 경우의 수는 $1 + 4 + 5 = 10$ 이다.
3. 이런 경우 중복조합을 이용해도 된다. 서로 다른 3개의 박스에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 경우와 같은 상황이므로 ${}_3H_8$ 이다. 하지만 ${}_3H_8$ 과 ${}_8H_3$ 중 무엇을 이용해야 하는지 헷갈려하는 경우가 많아 조합을 이용한 방법도 소개하도록 하겠다.

서로 다른 3개의 박스를 a, b, c 라고 하자.

$$a + b + c = 8 \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$$

결국 중복조합 쓰는 거 아닌가? 라는 의문이 들 수 있지만 중복조합이 아닌 조합을 쓰기 위해

$a' = a + 1, b' = b + 1, c' = c + 1$ 을 이용해서 다음과 같은 식을 만들면 된다.

$$a' + b' + c' = 11 \quad (a' \geq 1, b' \geq 1, c' \geq 1)$$

여기서 11을 1을 11개 늘어놓은 11111111111 형태로 표현하겠다. a', b', c' 이 모두 1 이상이어야 하므로 1을 11개 늘어놓은 11111111111에서 사이의 빈 공간 10군데 중 2군데를 골라 + 기호를 넣어 주면 된다. 따라서 ${}_{10}C_2$ 이고 ${}_3H_8$ 과 계산 결과가 같다. 두 가지 방법으로 풀고 계산해보자. 실수가 확 줄 거다. 총 45가지이다.

※ 빈 공간 10군데 중 2군데를 골라+기호를 임의로 넣게 되면 그중 한 예시로 1111+111+1111과 같이 나온다. 이런 경우, $a' = 4, b' = 3, c' = 4$ 가 되는 것이다. 따라서 1 사이의 빈 공간에 + 기호를 넣게 되면 자동적으로 문자에 해당하는 숫자들도 정해진다.

$a' \geq 1, b' \geq 1, c' \geq 1$ 로 한 이유는 11111111111에서 '왼쪽 끝 1' 왼쪽의 빈 공간과 '오른쪽 끝 1' 오른쪽의 빈 공간을 사용하지 않고, 1 사이의 빈 공간에 2개 이상의 +기호가 들어가지 않게 하기 위함이다.

4. 중요하다. 분할 및 같은 것이 있는 순열을 모두 사용한다. 8을 3개의 자연수로 분할하면 (6, 1, 1), (5, 2, 1), (4, 3, 1), (4, 2, 2), (3, 3, 2)로 5가지이다.

여기가 끝은 아니고 박스가 다르지만 공이 서로 같기 때문에 (6, 1, 1), (4, 2, 2), (3, 3, 2)와 같이 공 개수가 동일한 경우가 있는 경우 같은 것이 있는 순열을 이용해야 한다. 따라서 각 경우마다 $\frac{3!}{2!} = 3$ 가지이다.

하지만 (5, 2, 1), (4, 3, 1)에서는 공 개수가 다르기 때문에 그냥 순열을 이용하면 된다. 각 경우마다 $3! = 6$ 가지이다. 총 $3 \times 3 + 2 \times 6 = 21$ 가지이다.

5. 각 박스에 담길 공의 개수부터 정하도록 하자. 자연수 분할을 통해 구해보면 (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2)이다. 이제 같은 것이 있는 순열을 이용하여 서로 다른 공 6개를 담길 공의 개수를 고려하여 각 박스에 담아주자.

$$(4, 1, 1) \rightarrow {}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

$$(3, 2, 1) \rightarrow {}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 60$$

$$(2, 2, 2) \rightarrow {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$$

따라서 총 90가지이다. 그런데 이렇게 풀면 가끔 헛갈리는 점이 있다. 왜 같은 것이 있는 순열을 이용해야 하지? **공은 각자 다르니까 같은 박스라도 공을 넣은 후에는 다른 박스 아닌가?** 이에 대한 답변은 이렇다.

예를 들어, 각 박스에 공의 개수 분배가 (4, 1, 1)이고 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 적힌 공들이 있다면 (1234, 5, 6)와 (1234, 6, 5)로 분배하는 경우는 같은 경우이다. 따라서 같은 것이 있는 순열을 쓴다. 헛갈리면 특정 CASE 하나를 잡아 생각하는 것이 좋다.

6. 박스 최대 개수가 3개이고 빈 박스가 생길 수도 있으므로 서로 다른 6개 공이 1개의 박스에 모두 들어갈 때, 2개의 박스에 모두 들어갈 때, 3개의 박스에 모두 들어갈 때로 각각 나누어 생각하면 된다.

$$(6) \rightarrow {}_6C_6 = 1$$

$$(5, 1) \rightarrow {}_6C_5 \times {}_1C_1 = 6$$

$$(4, 2) \rightarrow {}_6C_4 \times {}_2C_2 = 15$$

$$(3, 3) \rightarrow {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 10$$

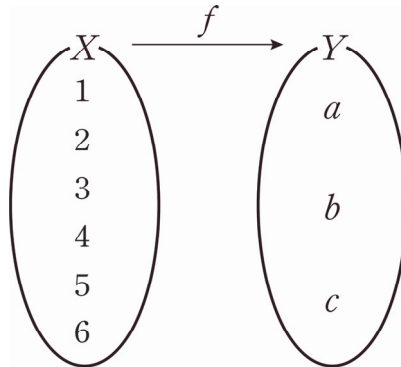
$$(4, 1, 1) \rightarrow {}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

$$(3, 2, 1) \rightarrow {}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 60$$

$$(2, 2, 2) \rightarrow {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$$

서로 다른 6개 공이 1개의 박스에 모두 들어가는 경우의 수는 1가지이고
서로 다른 6개 공이 2개의 박스에 모두 들어가는 경우의 수는 $6 + 15 + 10 = 31$ 가지이고
서로 다른 6개 공이 3개의 박스에 모두 들어가는 경우의 수는 $15 + 60 + 15 = 90$ 가지이다.
따라서 총 $1 + 31 + 90 = 122$ 가지이다.

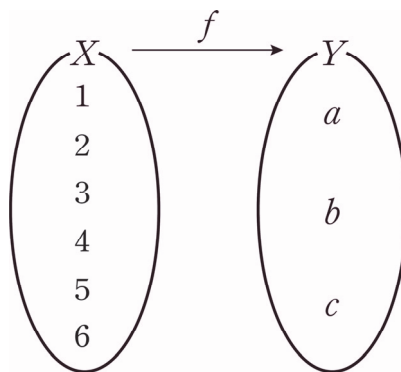
7. 공, 박스 둘 다 다른 경우는 함수로 생각하면 어떨까? 정의역을 공 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 가정하고, 공역을 박스 a, b, c 인 함수로 가정하면 된다. 그림을 처음 함수 배울 때처럼 직접 그려보자! 관련 문제에선 꼭 그리는 것을 추천한다.



빈 박스가 없어야 하므로 공역과 치역은 같다. 일단 서로 다른 6개의 공을 서로 같은 박스 3개에 빈 박스 없이 공을 넣는 경우의 수는 이전에 구했듯이 90가지이다. 하지만 3개의 박스는 각각 다르므로 3!을 곱한다. 따라서 답은 $90 \times 3! = 540$ 가지이다.

여기서 의문을 가질 수 있다. 공의 개수 분배가 (4, 1, 1)이나 (2, 2, 2)면 3!을 곱해주면 안 되지 않나? 이에 대한 답변은 이렇다. 예를 들어 공의 분배가 (4, 1, 1)이고 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 적힌 공들이 있다고 하자. (1234, 5, 6)으로 분배한다고 하자. 5가 있는 그룹과 6이 있는 그룹은 각각 공이 한 개이지만 내용물이 달라 엄연히 구별된다. 따라서 서로 다른 3개의 박스에게 1234, 5, 6을 각각 나눠 준다고 생각하면 된다.

8. 박스, 공 둘 다 다른 경우는 함수로 생각하면 어떨까? 정의역을 공 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 가정하고, 공역이 박스 a, b, c 인 함수를 생각하면 된다. 그림을 수학 2에서 처음 함수 배울 때처럼 직접 그려보자!



7번과는 다르게 빈 박스가 있어도 되므로 공역과 치역이 같을 필요는 없다. 함수 꼴로 그렸다면 쉽게 보일 것이다. 빈 박스가 있어도 되므로 각 공마다 박스 choice를 3가지씩 가진다. 따라서 $3^6 = 729$ 가지이다.

◆ 조합

조합 ${}_n C_r$ 의 뜻은 '서로 다른 n 개에서 r 개를 택한다.'이다. 계산법은 ${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ 이다.

순열 ${}_n P_r$ 의 뜻은 '서로 다른 n 개에서 r 개를 택하여 일렬로 나열한다.'이다. ${}_n C_r \times r!$ 로 대체할 수 있다.

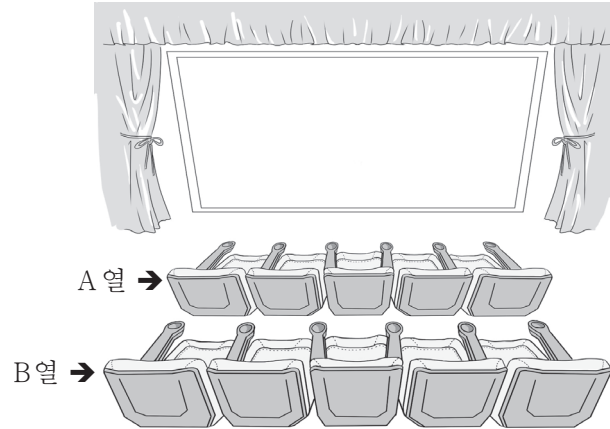
중복조합 ${}_n H_r$ 의 뜻은 '서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택한다.'이다. 중복조합의 경우는 계산법도 ${}_n H_r = {}_{n+r-1} C_r$ 이고 이전에 조합을 이용해 푸는 방법도 알려줬다.

결국 조합 ${}_n C_r$ 이 제일 중요하고 많이 쓰인다. ${}_n C_r$ 이외의 기호를 남발해서 경우의 수, 확률 문제를 풀려면 헛갈리고 조금만 꼬이면 답이 없다.

◆ 같은 것이 있는 순열

조 나누기와 엮어서 잘 사용된다. 공식만 잠깐 보고 가면 이렇다. n 개 중 같은 것이 각각 $a, b, c \dots$ 개 있을 때, n 개를 나열하는 경우의 수는 $\frac{n!}{a!b!c! \dots}$ (단, $a + b + c \dots = n$) 이다.

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아이로 구성된 5명의 가족이 영화를 보려고 한다. 영화관의 좌석은 그림과 같이 A, B 두 개의 열로 이루어져 있고, 각 열에는 5개의 좌석이 있다. A열에는 할아버지와 할머니가 이웃하여 앉고, B열에는 아버지, 어머니, 아이가 앉되 아이는 아버지 또는 어머니와 이웃하고, 아이의 바로 앞에 있는 좌석은 비어 있도록 한다. 이때, 5명이 모두 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 2명이 같은 열의 바로 옆에 앉을 때만 이웃한 것으로 본다. 또한 한 좌석에는 한 명만 앉고, 다른 관람객은 없다.) [4점]





1. 아이에게 걸려있는 조건들이 많다. **아이가 앉는 좌석을 기준으로 CASE를 분류하자.**
 조건 중 아버지나 어머니 중 한 명이 아이와 이웃하게 앉아야 한다는 조건이 있다.
‘아버지나 어머니 중 한 명이 아이와 이웃하게 앉는 사건’의 여사건은 ‘아버지와 어머니 모두 아이와 이웃하지 않게 앉는 사건’이다. 이를 이용하는 게 훨씬 편해 보인다.

2. 아래와 같이 좌석에 번호를 부여하자.

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| A열 | 1번 | 2번 | 3번 | 4번 | 5번 |
| B열 | 1번 | 2번 | 3번 | 4번 | 5번 |

(1) 아이가 B열 1번 또는 5번에 앉을 때

아이가 B열 1번 자리에 앉는다고 가정하면 **할아버지와 할머니가 앉을 좌석**의 경우의 수는 A열에서 (2번, 3번), (3번, 4번), (4번, 5번)으로 3가지이다. 선택한 좌석에서 **할아버지, 할머니를 배치**하는 경우의 수는 2가지이다. 따라서 **할아버지와 할머니가 조건에 맞게 좌석에 앉는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$ 가지이다.**

아버지와 어머니가 B열의 남은 좌석에 앉는 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$ 가지이다. 이 중 **아버지와 어머니 모두 아이와 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 B열에서 3번, 4번, 5번 중 2좌석을 선택하여 앉으면 되기에 $3 \times 2 = 6$ 가지이다.** 따라서 **아버지와 어머니 중 적어도 한 명이 아이와 이웃하게 좌석에 앉는 경우의 수는 $12 - 6 = 6$ 가지이다.**

아이가 B열 5번에 앉는 경우는 위 경우와 정확히 대칭이다. 따라서 아이가 B열 1번 또는 5번에 앉을 때, 5명이 모두 조건에 맞게 좌석에 앉는 경우의 수는 각각 $6 \times 6 = 36$ 가지이다.

(2) 아이가 B열 2번 또는 4번에 앉을 때

아이가 B열 2번에 앉는다고 가정하면 **할아버지와 할머니가 앉을 좌석**의 경우의 수는 A열에서 (3번, 4번), (4번, 5번)으로 2가지이다. 선택한 좌석에서 **할아버지, 할머니를 배치**하는 경우의 수는 2가지이다. 따라서 **할아버지와 할머니가 조건에 맞게 좌석에 앉는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$ 가지이다.**

아버지와 어머니가 B열의 남은 좌석에 앉는 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$ 가지이다. 이 중 **아버지와 어머니 모두 아이와 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 B열에서 4번, 5번 중 2좌석을 선택하여 앉으면 되기에 $2 \times 1 = 2$ 가지이다.** 따라서 **아버지와 어머니 중 적어도 한 명이 아이와 이웃하게 좌석에 앉는 경우의 수는 $12 - 2 = 10$ 가지이다.**

아이가 B열 4번에 앉는 경우는 위 경우와 정확히 대칭이다. 따라서 아이가 B열 2번 또는 4번에 앉을 때, 5명이 모두 조건에 맞게 좌석에 앉는 경우의 수는 각각 $4 \times 10 = 40$ 가지이다.

(3) 아이가 B열 3번에 앉을 때

할아버지와 할머니가 앉을 좌석의 경우의 수는 A열에서 (1번, 2번), (4번, 5번)으로 2가지이다. 선택한 좌석에서 할아버지, 할머니를 배치하는 경우의 수는 2가지이다. 따라서 할아버지와 할머니가 조건에 맞게 좌석에 앉는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$ 가지이다.

아버지와 어머니가 B열의 남은 좌석에 앉는 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$ 가지이다. 이 중 아버지와 어머니 모두 아이와 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 B열에서 1번, 5번 중 2좌석을 선택하여 앉으면 되기에 $2 \times 1 = 2$ 가지이다. 따라서 아버지와 어머니 중 적어도 한 명이 아이와 한 명이라도 이웃하게 좌석에 앉는 경우의 수는 $12 - 2 = 10$ 가지이다.

따라서 아이가 B열 3번에 앉을 때, 5명이 모두 조건에 맞게 좌석에 앉는 경우의 수는 $4 \times 10 = 40$ 가지이다.

3. 5명이 모두 조건에 맞게 좌석에 앉는 경우의 수는 $36 \times 2 + 40 \times 3 = 192$ 가지이다.

답은 192!!

comment

큰 기준을 잘 설정하여 CASE 분류하자. 여사건을 이용하는 것이 더 편리할지 따져보는 것은 경우의 수, 확률 문제에서 0순위로 중요하다.

20학년도 9월 평가원 28번

연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.) [4점]

- (가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고, 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.
- (나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고, 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.
- (다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고, 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.



1. 3명의 여학생이 받는 연필의 수를 (A_1, B_1, C_1) 로 나타내고 볼펜의 수를 (A_2, B_2, C_2) 로 나타내자.
2명의 남학생이 받는 연필의 수를 (a_1, b_1) 로 나타내고 볼펜의 수를 (a_2, b_2) 로 나타내자.

조건 (가), 조건 (나), 조건 (다)를 모두 만족하기 위해서는 (A_1, B_1, C_1) 으로 $(1, 1, 1)$ 또는 $(2, 2, 2)$ 가 가능하고 (a_2, b_2) 으로 $(1, 1)$ 또는 $(2, 2)$ 가 가능하다.

2. $(A_1, B_1, C_1), (a_2, b_2)$ 에 따라 연필 7자루와 볼펜 4자루를 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구해보도록 하자.

- (1) $(A_1, B_1, C_1) = (1, 1, 1), (a_2, b_2) = (1, 1)$ 일 때

$A_2 + B_2 + C_2 = 2 (A_2 \geq 0, B_2 \geq 0, C_2 \geq 0), a_1 + b_1 = 4 (a_1 \geq 0, b_1 \geq 0)$ 를 동시에 만족하면 된다.

$A_2 + B_2 + C_2 = 2 (A_2 \geq 0, B_2 \geq 0, C_2 \geq 0)$ 를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_3H_2$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_4C_2$)으로 하든 6가지이다.

$a_1 + b_1 = 4 (a_1 \geq 0, b_1 \geq 0)$ 를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_2H_4$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_5C_1$)으로 하든 5가지이다.

따라서 $(A_1, B_1, C_1) = (1, 1, 1), (a_2, b_2) = (1, 1)$ 일 때 연필 7자루와 볼펜 4자루를 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$ 가지이다.

- (2) $(A_1, B_1, C_1) = (1, 1, 1), (a_2, b_2) = (2, 2)$ 일 때

$A_2 + B_2 + C_2 = 0 (A_2 \geq 0, B_2 \geq 0, C_2 \geq 0), a_1 + b_1 = 4 (a_1 \geq 0, b_1 \geq 0)$ 를 동시에 만족하면 된다.

$A_2 + B_2 + C_2 = 0 (A_2 \geq 0, B_2 \geq 0, C_2 \geq 0)$ 를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_3H_0$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_2C_2$)으로 하든 1가지이다.

$a_1 + b_1 = 4 (a_1 \geq 0, b_1 \geq 0)$ 를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_2H_4$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_5C_1$)으로 하든 5가지이다.

따라서 $(A_1, B_1, C_1) = (1, 1, 1), (a_2, b_2) = (2, 2)$ 일 때 연필 7자루와 볼펜 4자루를 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $1 \times 5 = 5$ 가지이다.

- (3) $(A_1, B_1, C_1) = (2, 2, 2), (a_2, b_2) = (1, 1)$ 일 때

$A_2 + B_2 + C_2 = 2 (A_2 \geq 0, B_2 \geq 0, C_2 \geq 0), a_1 + b_1 = 1 (a_1 \geq 0, b_1 \geq 0)$ 를 동시에 만족하면 된다.

$A_2 + B_2 + C_2 = 2$ ($A_2 \geq 0, B_2 \geq 0, C_2 \geq 0$)를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_3H_2$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_4C_2$)으로 하든 6가지이다.

$a_1 + b_1 = 1$ ($a_1 \geq 0, b_1 \geq 0$)를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_2H_1$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_2C_1$)으로 하든 2가지이다.

따라서 $(A_1, B_1, C_1) = (2, 2, 2), (a_2, b_2) = (1, 1)$ 일 때 연필 7자루와 볼펜 4자루를 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$ 가지이다.

(4) $(A_1, B_1, C_1) = (2, 2, 2), (a_2, b_2) = (2, 2)$ 일 때

$A_2 + B_2 + C_2 = 0$ ($A_2 \geq 0, B_2 \geq 0, C_2 \geq 0$), $a_1 + b_1 = 1$ ($a_1 \geq 0, b_1 \geq 0$)를 동시에 만족하면 된다.

$A_2 + B_2 + C_2 = 0$ ($A_2 \geq 0, B_2 \geq 0, C_2 \geq 0$)를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_3H_0$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_2C_2$)으로 하든 1가지이다.

$a_1 + b_1 = 1$ ($a_1 \geq 0, b_1 \geq 0$)를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_2H_1$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_2C_1$)으로 하든 2가지이다.

따라서 $(A_1, B_1, C_1) = (2, 2, 2), (a_2, b_2) = (2, 2)$ 일 때 연필 7자루와 볼펜 4자루를 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $1 \times 2 = 2$ 가지이다.

3. 따라서 조건을 만족하며 연필 7자루와 볼펜 4자루를 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 총 $30 + 5 + 12 + 2 = 49$ 가지이다.

답은 49!!

20학년도 수능 28번

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 각각의 홀수는 선택하지 않거나 한 번만 선택한다.

(나) 각각의 짝수는 선택하지 않거나 두 번만 선택한다.



1. 문제에 주어진 숫자 중 홀수는 1, 3, 5가 있고 짝수는 2, 4, 6이 있다. 조건 (나)에 의하면 각각의 짝수는 **아예 선택되지 않거나 두 번만 선택이 가능하다**. 선택된 5개의 숫자 중 짝수의 개수를 기준으로 CASE 분류하는 것이 현명해 보인다.

(1) 짝수의 개수가 0개, 홀수의 개수가 5개일 때

각각의 홀수는 최대 한 번만 선택 가능하기에 최대 홀수의 개수는 3개이다. 따라서 짝수 0개, 홀수 5개일 때 조건을 만족하는 다섯 자리의 자연수는 0개이다.

(2) 짝수의 개수가 2개, 홀수의 개수가 3개일 때

두 번 선택될 짝수 1개를 고르는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 가지이다. 각 홀수는 한 번씩 모두 사용된다. 조건을 만족하며 숫자 5개를 뽑는 경우의 수는 3가지이다.

두 번 선택된 짝수가 2라고 하자. 1, 2, 2, 3, 5를 배열하여 다섯 자리의 자연수를 만들어 보자.

같은 것이 있는 순열을 이용하면 $\frac{5!}{2!} = 60$ 개가 나오게 된다.

따라서 짝수의 개수가 2개, 홀수의 개수가 3개일 때 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 $3 \times 60 = 180$ 개다.

(3) 짝수의 개수가 4개, 홀수의 개수가 1개일 때

두 번 선택될 짝수 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$ 가지이다. 한 번 선택될 홀수 1개를 고르는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 가지이다. 조건을 만족하며 숫자 5개를 뽑는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$ 가지이다.

두 번 선택된 짝수가 2, 4라고 하고 한 번 선택된 홀수를 1이라고 하자. 1, 2, 2, 4, 4를 배열하여 다섯 자리의 자연수를 만들어 보자. 같은 것이 있는 순열을 이용하면 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$ 개가 나오게 된다.

따라서 짝수의 개수가 4개, 홀수의 개수가 1개일 때 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 $9 \times 30 = 270$ 개다.

2. 따라서 조건을 만족하며 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 총 개수는 $180 + 270 = 450$ 개다.

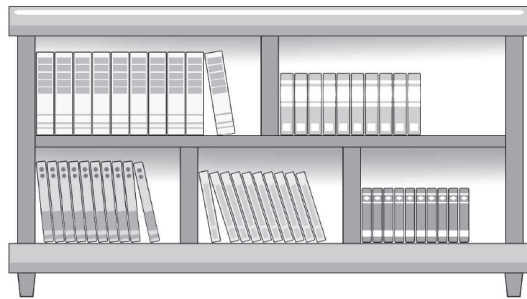
답은 450!!

comment

20학년도 9월 28번이랑 문제풀이 과정이 유사한 것을 확인할 수 있다. 이외의 문제들에서도 유사한 구조는 많이 찾아볼 수 있지만 수능 대비로 6월 평가원, 9월 평가원 문제들은 좋은 싫든 어떠한 문제들보다 심도 있게 봐야 함을 알려준다.

어느 학교 도서관에서 독서프로그램 운영을 위해 철학, 사회과학, 자연과학, 문학, 역사 분야에 해당하는 책을 각 분야별로 10권씩 총 50권을 준비하였다. 한 학급에서 이 50권의 책 중 24권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 분야에 해당하는 책은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

- (가) 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에 해당하는 책은 4권 이상씩 선택한다.
- (나) 문학 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.
- (다) 역사 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.





1. 철학을 a 권, 사회과학을 b 권, 자연과학을 c 권, 문학을 d 권, 역사를 e 권 뽑는다고 하자.

$$4 \leq a \leq 10, 4 \leq b \leq 10, 4 \leq c \leq 10 \text{이고,}$$

$$d = 0 \text{ or } 4 \leq d \leq 10, e = 0 \text{ or } 4 \leq e \leq 10 \text{이다.}$$

2. 케이스를 나눠서 분류해보자. $a = a' + 4, b = b' + 4, c = c' + 4, d = d' + 4, e = e' + 4$ 라 하자.

(1) 문학과 역사를 둘 다 선택하지 않을 때

$d = 0, e = 0$ 이므로 $a + b + c = 24$ 이다. 따라서 $a' + b' + c' = 12$ 이다.
단, $0 \leq a' \leq 6, 0 \leq b' \leq 6, 0 \leq c' \leq 6$ 이다.

$a' = 0 : b' + c' = 12$ 를 만족시키는 순서쌍 (b', c') 의 개수는 $(6, 6)$ 으로 1이다.
 $a' = 1 : b' + c' = 11$ 을 만족시키는 순서쌍 (b', c') 의 개수는 $(5, 6), (6, 5)$ 로 2이다.
 $a' = 2 : b' + c' = 10$ 을 만족시키는 순서쌍 (b', c') 의 개수는 $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$ 로 3이다.
 \vdots
 $a' = 6 : b' + c' = 6$ 을 만족시키는 순서쌍 (b', c') 의 개수는
 $(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)$ 으로 7이다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $\sum_{k=1}^7 k = \frac{7 \times 8}{2} = 28$ 이다.

(2) 문학을 선택하고 역사를 선택하지 않을 때

$e = 0$ 이므로 $a + b + c + d = 24$ 이다. 따라서 $a' + b' + c' + d' = 8$ 이다.
단, $0 \leq a' \leq 6, 0 \leq b' \leq 6, 0 \leq c' \leq 6, 0 \leq d' \leq 6$ 이다.

중복조합을 활용하자. ${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$ 이다.

이때, 각각의 책은 7권 이상 선택하지 못한다.

$(7, 1, 0, 0)$ 을 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이고,

$(8, 0, 0, 0)$ 을 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$ 이므로

구하고자 하는 경우의 수는 $165 - 12 - 4 = 149$ 이다.

(3) 문학을 선택하지 않고 역사를 선택할 때

(2)의 경우와 동일하다. 구하고자 하는 경우의 수는 $165 - 12 - 4 = 149$ 이다.

(4) 문학을 선택하고 역사를 선택할 때

$a + b + c + d + e = 24$ 이므로 $a' + b' + c' + d' + e' = 4$ 이다.

$0 \leq a' \leq 6, 0 \leq b' \leq 6, 0 \leq c' \leq 6, 0 \leq d' \leq 6, 0 \leq e' \leq 6$ 이므로
구하고자 하는 경우의 수는 ${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$ 이다.

따라서 모든 경우의 수는 $28 + 149 + 149 + 70 = 396$ 이다.

답은 396!!

21학년도 6월 평가원 13번

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 할 때, $|a-3|+|b-3|=2$ 이거나 $a=b$ 일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{5}{12}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{7}{12}$



1. $|a-3|+|b-3|=2$ 인 사건을 A , $a=b$ 인 사건을 B 라 하면

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이다.

$|a-3|+|b-3|=2$ 인 사건을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $ a-3 $ | $ b-3 $ | a, b |
|---------|---------|--------------------------|
| 2 | 0 | $a=1$ or $5, b=3$ |
| 1 | 1 | $a=2$ or $4, b=2$ or 4 |
| 0 | 2 | $a=3, b=1$ or 5 |

따라서 $P(A) = \frac{(2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 2)}{6^2} = \frac{8}{6^2}$ 이다.

$a=b$ 인 사건은 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ 6가지이므로

$P(B) = \frac{6}{6^2}$ 이다.

$|a-3|+|b-3|=2$ 이면서 $a=b$ 인 사건은 $(2, 2), (4, 4)$ 2가지이므로

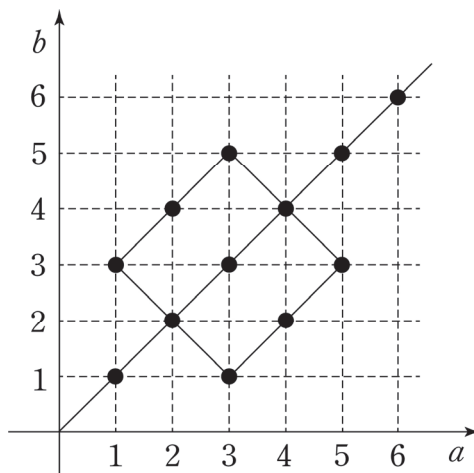
$P(A \cap B) = \frac{2}{6^2}$ 이다.

따라서 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8+6-2}{6^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ 이다.

답은 ㉔!!

※ 다른 풀이

좌표평면에 $|a-3|+|b-3|=2$ 의 그래프와 $b=a$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 $\frac{9+3}{36} = \frac{1}{3}$ 이다.

21학년도 6월 평가원 17번

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

- (가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
(나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

① $\frac{1}{28}$

② $\frac{1}{14}$

③ $\frac{3}{28}$

④ $\frac{1}{7}$

⑤ $\frac{5}{28}$



1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 나열하는 경우의 수는 $7!$ 이다.

2. 1부터 7까지의 자연수 중 4보다 큰 수는 5, 6, 7이고,
1부터 7까지의 자연수 중 5보다 작은 수는 1, 2, 3, 4이다.

따라서 조건 (가), 조건 (나)를 고려하면 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드를 기준으로 하는 것이 유리함을 알 수 있다.

(1) 4 옆에 5가 있을 때

4와 5의 자리를 정하는 경우의 수는 2이다.

4의 다른 옆에는 6이나 7이 오는 경우의 수는 ${}_2C_1$ 이다.

5의 다른 옆에는 1이나 2나 3이 오는 경우의 수는 ${}_3C_1$ 이다.

이렇게 선택된 4개의 숫자를 그룹 A라 하면

선택되지 않은 숫자 3개와 A를 나열하는 경우의 수는 $4!$ 이다.

따라서 4 옆에 5가 오는 경우의 수는 $2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 4! = 12 \times 4!$ 이다.

(2) 4 옆에 5가 없을 때

4 옆에 6, 7을 배치하는 경우의 수는 $2!$ 이다.

이 그룹을 B라 하자.

5옆에 1, 2, 3 중 두 개를 배치하는 경우의 수는 ${}_3P_2$ 이다.

이 그룹을 C라 하자.

선택되지 않은 숫자 하나와 그룹 B, C를 나열하는 경우의 수는 $3!$ 이다.

따라서 4옆에 5가 오지 않은 경우의 수는 $2! \times {}_3P_2 \times 3! = 3 \times 4!$ 이다.

(1), (2)에 의하여 조건 (가), 조건 (나)를 모두 만족하는 경우의 수는 $15 \times 4! = 3 \times 5!$ 이므로

확률은 $\frac{3 \times 5!}{7!} = \frac{1}{14}$ 이다.

답은 ㉔!!

21학년도 6월 평가원 29번

검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]



1. 검은색 볼펜을 a 자루, 파란색 볼펜을 b 자루, 빨간색 볼펜을 c 자루 나눠준다고 하면 $a + b + c = 5$ 이고, ${}_2H_a \times {}_2H_b \times {}_2H_c = (a+1)(b+1)(c+1)$ 이다.

검은색 볼펜을 나눠줄 때와 나눠주지 않을 때로 나눠서 생각하자.

(1) 검은색 볼펜을 나눠줄 때

$a = 1, b + c = 4$ 이므로 가능한 순서쌍 (b, c) 는 $(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)$ 이다.

$${}_2H_a \times {}_2H_b \times {}_2H_c = (a+1)(b+1)(c+1) = 2 \times (bc + b + c + 1) = 2 \times (bc + 5) = 2bc + 10$$

이므로 순서쌍을 대입하여 전부 더하면 $10 \times 5 + 6 + 8 + 6 = 70$ 이다.

(2) 검은색 볼펜을 나눠주지 않을 때

$a = 0, b + c = 5$ 이므로 가능한 순서쌍 (b, c) 는 $(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)$ 이다.

$${}_2H_a \times {}_2H_b \times {}_2H_c = (a+1)(b+1)(c+1) = bc + b + c + 1 = bc + 6 \text{ 이므로}$$

순서쌍을 대입하여 전부 더하면 $6 \times 4 + 4 + 6 + 6 + 4 = 44$ 이다.

2. 따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $70 + 44 = 114$ 이다.

답은 114!!

21학년도 6월 평가원 나형 29번

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 p 이다. $120p$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \times f(2) \geq 9$

(나) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 3이다.



1. $f(1) \times f(2) \geq 9$ 이려면 $f(1) \geq 3, f(2) \geq 3$ 이어야 한다.

2. 치역의 원소가 3개일 때를 고려해보자.

(1) $f(1) = f(2)$ 일 때

$f(1) = f(2) = 3$ or $f(1) = f(2) = 4$ 이므로 정의역의 원소인 3과 4는 공역의 남은 원소 중에서 2개에 대응해야 한다.

따라서 조건 (가), 조건 (나)를 만족하는 함수의 개수는 $2 \times {}_3P_2 = 12$ 이다.

(2) $f(1) \neq f(2)$ 일 때

$f(1) = 3, f(2) = 4$ or $f(1) = 4, f(2) = 3$ 이다.

공역의 원소 1, 2 중 하나가 치역의 원소가 되는 경우의 수는 ${}_2C_1$ 이다.

이렇게 결정된 치역이 $\{2, 3, 4\}$ 라고 하자.

정의역의 $\{3, 4\}$ 에서 $\{2, 3, 4\}$ 로의 함수의 개수는 3^2 ,

정의역의 $\{3, 4\}$ 에서 $\{3, 4\}$ 로의 함수의 수는 2^2 이므로

따라서 조건 (가), 조건 (나)를 만족하는 함수의 개수는 $2 \times {}_2C_1 \times (3^2 - 2^2) = 4 \times 5 = 20$ 이다.

(1), (2)에 의하여 $p = \frac{12 + 20}{4^4} = \frac{32}{4^4} = \frac{1}{8}$ 이다. $120p = 15$.

답은 15!!

◆ 함수 꼴

$f : X \rightarrow Y$ 와 같은 함수 꼴을 본다면 이전에서도 설명했듯이 귀찮아도 먼저 그려준다. 다음으로는 조건에 맞는 치역의 가짓수를 구한다. 이후 정의역의 원소와 치역의 원소를 잘 연결하며 경우의 수를 구하면 되는데 이때 반드시 유의할 점이 있다.

치역은 공역 Y 와 다르다. 공역 Y 에 있는 원소는 치역에 있는 원소의 후보가 될 뿐이다. 하지만 치역의 각 원소에는 적어도 하나의 정의역 X 의 원소가 '반드시' 대응이 되어야 한다.

치역의 어떤 원소가 정의역 X 에 있는 어떤 원소하고도 대응이 되지 않는다면 이 원소는 치역에 속한다고 볼 수가 없다. **알면서도 실수하기 쉬운 지점이니 꼭 짚고 가자.** 아니면 20학년도 6월 평가원 오답률 Best 5를 자랑하는 25번 같은 문제에서 의문사 당할 수 있다.

11학년도 9월 평가원 29번

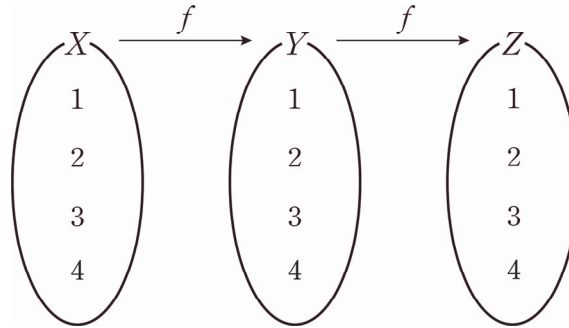
집합 $\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족하는 함수 f 의 개수는?
[4점]

- (가) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 2이다.
(나) 합성함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수는 1이다.

- ① 36 ② 42 ③ 48 ④ 54 ⑤ 60



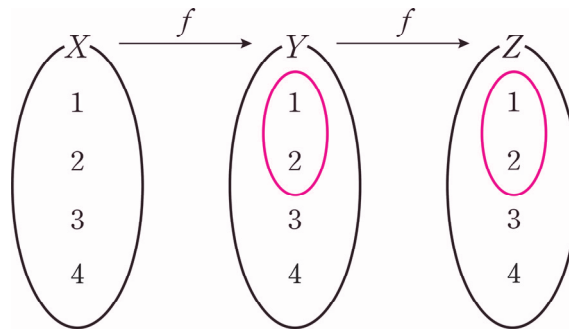
1. 먼저 합성함수 $f \circ f$ 를 그려주자.



2. 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 2개이므로 치역으로는 ${}_4C_2 = 6$ 가지가 가능하다.

이 중 $\{1, 2\}$ 를 함수 f 의 치역으로 두자.

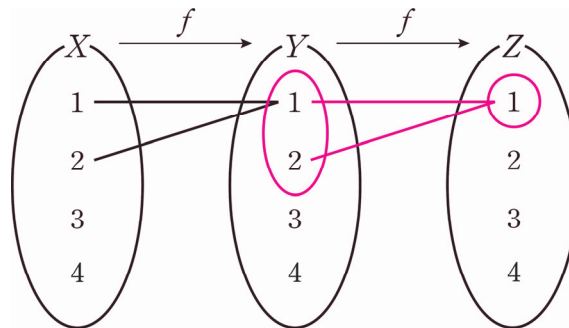
합성함수 $f \circ f$ 의 공역 역시 $\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $\{1, 2\}$ 로 한정할 수 있다.



3. 합성함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수는 1이므로 $f : X \rightarrow Y$ 의 치역인 $\{1, 2\}$ 가

$f : Y \rightarrow Z$ 에선 정의역이므로 공역인 $\{1, 2\}$ 의 한 원소에 대응해야 한다.

즉, $f(1)=f(2)=1$ 이거나 $f(1)=f(2)=2$. 따라서 $f : Y \rightarrow Z$ 의 치역을 정하는 경우의 수는 2가지이다. 합성함수 $f \circ f$ 의 치역을 $\{1\}$ 로 두자.



4. 함수를 결정짓기 위해 남은 원소인 3, 4를 공역인 $\{1, 2\}$ 에 대응해보자.

치역 $\{1, 2\}$ 의 각 원소에는 적어도 하나의 정의역 X 의 원소가 '반드시' 대응이 되어야 하므로 $2^2 - 1 = 3$ 가지이다. $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$ 인 경우 1가지를 제외한다.

따라서 전체 경우의 수는 ${}_4C_2 \times 2 \times 3 = 36$ 가지이므로 답은 ①!!

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 치역을 A , 합성함수 $f \circ f$ 의 치역을 B 라 할 때, 두 집합 A, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

- $n(A) \geq 3$
- 집합 A 의 모든 원소의 합이 3의 배수이다.
- $n(A) > n(B)$

다음은 함수 f 의 개수를 구하는 과정이다.

(i) $n(A) = 3$ 이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A 는 $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}$ 이다.

$A = \{1, 2, 3\}$ 인 경우 $n(B) < 3$ 이므로

집합 B 는

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 이다.

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1\}$ 인 경우 함수 f 의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이고

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$ 인 경우 함수 f 의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이므로

$n(A) = 3, n(B) < 3$ 이고 집합 A 의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f 의 개수는 $4 \times (3 \times \boxed{\text{(가)}}) + 3 \times \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

(ii) $n(A) = 4$ 이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A 는 $\{1, 2, 4, 5\}$ 뿐이므로 이 경우 $n(B) < 4$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

(iii) $n(A) = 5$ 인 경우 함수 f 는 일대일대응이고 $n(B) = 5$ 이므로 $n(A) > n(B)$ 를 만족시키는 함수 f 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는 $4 \times (3 \times \boxed{\text{(가)}}) + 3 \times \boxed{\text{(나)}} + \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p + q + r$ 의 값은? [4점]

① 164

② 168

③ 172

④ 176

⑤ 180



1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1\}$ 인 경우

집합 A 의 원소인 1, 2, 3이 집합 B 의 원소 1에 대응하는 경우의 수는 1이고,

$f: X \rightarrow X$ 에서 정의역 X 의 원소인 4, 5가 집합 A 의 원소인 2, 3에 하나씩 대응하는 경우의 수는 2이므로 함수 f 의 개수는 $1 \times 2 = 2$ 이다.

따라서 $p = 2$ 이다.

2. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ 인 경우

집합 A 의 원소인 1, 2, 3이 집합 B 의 원소인 1, 2에 대응하는 경우의 수 2^3 에서

집합 A 의 원소인 1, 2, 3이 모두 집합 B 의 원소인 1에 대응하는 경우의 수 1과

집합 A 의 원소인 1, 2, 3이 모두 집합 B 의 원소인 2에 대응하는 경우의 수 1을 뺀 것과 같으므로

집합 A 의 원소인 1, 2, 3이 집합 B 의 원소인 1, 2에 모두 대응하는 경우의 수는

$2^3 - 2 = 6$ 이다.

$f: X \rightarrow X$ 에서 정의역 X 의 원소인 4, 5 중 적어도 하나는 집합 A 의 원소인 3에 대응하고,

다른 하나는 집합 A 의 원소인 1, 2, 3 중 하나에 대응하는 경우의 수는

정의역 X 의 원소인 4, 5가 집합 A 의 원소인 1, 2, 3에 대응하는 경우의 수에서

정의역 X 의 원소인 4, 5가 집합 A 의 원소인 1, 2에 모두 대응하는 경우의 수를

뺀 것과 같으므로 $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ 이다.

따라서 함수 f 의 개수는 $6 \times 5 = 30$ 이므로 $q = 30$.

3. $A = \{1, 2, 4, 5\}$ 인 경우

$f: X \rightarrow X$ 에서 정의역 X 의 3이 치역 A 의 1, 2, 4, 5 중 하나에 대응하고

정의역 X 의 1, 2, 4, 5가 치역 A 의 나머지 셋을 모두 선택해야 한다.

따라서 집합 B 는 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ 중 하나이다.

$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ 인 경우

집합 A 의 원소인 1, 2, 4, 5 중 2개는 집합 B 의 원소 하나에 대응하고,

집합 A 의 나머지 2개의 원소는 집합 B 의 나머지 2개의 원소에 한 개씩 대응되어야 한다.

따라서 경우의 수는 $3 \times {}_4C_2 \times 2 \times 1 = 36$ 이다.

$B = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ 인 경우 모두 동일하므로

함수 f 의 개수는 $36 \times 4 = 144$ 이다. $r = 144$.

따라서 $p + q + r = 2 + 30 + 144 = 176$ 이다.

답은 ④!!

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수는?

[3점]

(가) $f(1) + f(2) + f(3) \geq 3f(4)$

(나) $k = 1, 2, 3$ 일 때 $f(k) \neq f(4)$ 이다.

① 41

② 45

③ 49

④ 53

⑤ 57



1. $f(4)$ 의 값을 기준으로 CASE를 분류하자.

(1) $f(4)=1$ 일 때, $f(1) \neq 1, f(2) \neq 1, f(3) \neq 1$ 이다.

$f(1)+f(2)+f(3) \geq 3$ 에서 $f(1), f(2), f(3)$ 은 각각 1이 아닌 어떤 수를 선택만 하면 되므로
구하고자 하는 함수의 개수는 $3^3 = 27$ 이다.

(2) $f(4)=2$ 일 때, $f(1) \neq 2, f(2) \neq 2, f(3) \neq 2$ 이다.

$f(1)+f(2)+f(3) \geq 6$ 을 만족하는 함수의 개수는 세기 힘들다. 부분 여사건을 이용하자.

$f(1) \neq 2, f(2) \neq 2, f(3) \neq 2, f(4)=2$ 를 만족하는 함수의 개수 3^3 에서

$f(1) \neq 2, f(2) \neq 2, f(3) \neq 2, f(4)=2, f(1)+f(2)+f(3) < 6$ 을 모두 만족하는
함수의 개수를 빼자.

$f(1)+f(2)+f(3) < 6$ 을 만족시키는 함숫값의 순서쌍은 $(1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1), (2, 2, 1)$ 이다.
하지만 $f(1) \neq 2, f(2) \neq 2, f(3) \neq 2$ 이기에 순서쌍 $(1, 1, 1), (3, 1, 1)$ 만 가능하다.

$(1, 1, 1)$ 의 함수의 개수는 1, $(1, 1, 3)$ 의 함수의 개수는 $\frac{3!}{2!} = 3$ 이므로

$f(1) \neq 2, f(2) \neq 2, f(3) \neq 2, f(4)=2, f(1)+f(2)+f(3) < 6$ 을 모두 만족하는
함수의 개수는 $1 + 3 = 4$ 이다.

따라서 구하고자 하는 함수의 개수는 $3^3 - 4 = 23$ 이다.

(3) $f(4)=3$ 일 때, $f(1) \neq 3, f(2) \neq 3, f(3) \neq 3$ 이다.

$f(1)+f(2)+f(3) \geq 9$ 을 만족시키는 함숫값의 순서쌍은

$(4, 4, 4), (4, 4, 3), (4, 4, 2), (4, 4, 1), (4, 3, 3), (4, 3, 2), (3, 3, 3)$ 이다.

하지만 $f(1) \neq 3, f(2) \neq 3, f(3) \neq 3$ 이기에 순서쌍 $(4, 4, 4), (4, 4, 2), (4, 4, 1)$ 만 가능하다.

$(4, 4, 2), (4, 4, 1)$ 의 함수의 개수는 각각 $\frac{3!}{2!} = 3$, $(4, 4, 4)$ 의 함수의 개수는 1이므로

구하고자 하는 함수의 개수는 $2 \times 3 + 1 = 7$ 이다.

(4) $f(4)=4$ 일 때, $f(1) \neq 4, f(2) \neq 4, f(3) \neq 4$ 이다.

$f(1)+f(2)+f(3) \geq 12$ 를 만족시키는 함수는 존재하지 않는다.

(1), (2), (3), (4)에 의하여 구하고자 하는 함수의 개수는 $27 + 23 + 7 = 57$ 이다.

답은 ㉞!!

◇ 순서가 정해져 있을 때 : $<$, \leq 등장

1에서 6까지의 자연수 중에 $a < b < c$ 를 만족하는 자연수 a, b, c 를 뽑는다면 ${}_6C_3 = 20$ 가지이다.

예를 들어 1에서 6까지의 자연수 중에 1, 2, 3을 선택했다면 크기 조건에 따라 $a = 1, b = 2, c = 3$ 로 자동적으로 정해지기에 a, b, c 를 따로 배열할 필요가 없다.

1에서 6까지의 자연수 중에 $a \leq b \leq c$ 를 만족하는 자연수 a, b, c 를 뽑는다면 서로 다른 6개의 자연수를 중복을 허용하여 3개의 자연수 a, b, c 를 뽑는 것이므로 ${}_6H_3 = 56$ 가지이다.

예를 들어 1에서 6까지의 자연수 중에 1, 1, 3을 선택했다면 크기 조건에 따라 $a = 1, b = 1, c = 3$ 로 자동적으로 정해지기에 a, b, c 를 따로 배열할 필요가 없다.

21학년도 수능 나형 13번

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수는? [3점]

$$f(2) \leq f(3) \leq f(4)$$

① 64

② 68

③ 72

④ 76

⑤ 80



1. $f(1)$ 은 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4 중 어느 것이 되어도 상관없다.

$f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4이다.

$f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키도록 $f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$ 이다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $4 \times 20 = 80$ 이다.

답은 ⑤!!

20학년도 6월 평가원 나형 29번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3 의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수를 구하시오.

[4점]

(가) $n = 1, 2$ 일 때, $x_{n+1} - x_n \geq 2$ 이다.

(나) $x_3 \leq 10$



1. 조건 (가), 조건 (나)를 보기 쉽게 간단한 식으로 정리하자.

$$4 \leq x_1 + 4 \leq x_2 + 2 \leq x_3 \leq 10$$

2. x_1 을 기준으로 상황을 전개해보자.

| x_1 | x_2 | x_2 에 따라 가능한 x_3 개수의 합 |
|-----------|------------------|-----------------------------|
| $x_1 = 0$ | $x_2 = 2 \sim 8$ | $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ |
| $x_1 = 1$ | $x_2 = 3 \sim 8$ | $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ |
| $x_1 = 2$ | $x_2 = 4 \sim 8$ | $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ |
| $x_1 = 3$ | $x_2 = 5 \sim 8$ | $4 + 3 + 2 + 1$ |
| $x_1 = 4$ | $x_2 = 6 \sim 8$ | $3 + 2 + 1$ |
| $x_1 = 5$ | $x_2 = 7 \sim 8$ | $2 + 1$ |
| $x_1 = 6$ | $x_2 = 8$ | 1 |

3. 여기에서 저걸 다 계산하는 건 너무 힘들고 $\sum_{m=1}^7 \frac{m(m+1)}{2}$ 로 식을 세우고 계산하자.

답은 84!! 나중에도 언급하겠지만 **제발 Σ 식 세우는 연습 좀 하자!**

이 풀이도 중복조합을 떠올리지 못한다면 충분히 도전해볼 만한 풀이이다. 규칙성이 금방 보이기 때문이다. 이제 중복조합 풀이도 보러 가자!

1. 조건 (가), 조건 (나)를 보기 쉽게 간단한 식으로 정리하자.

$$4 \leq x_1 + 4 \leq x_2 + 2 \leq x_3 \leq 10$$

2. $x_1 + 4 = x_1', x_2 + 2 = x_2'$ 로 치환하면 아래와 같은 식으로 정리된다.

$$4 \leq x_1' \leq x_2' \leq x_3 \leq 10$$

x_1' 을 4 이상 10 이하의 정수 중 하나로 정하면 x_1 은 무조건 음이 아닌 정수이다.

x_2' 을 4 이상 10 이하의 정수 중 하나로 정하면 x_2 는 무조건 음이 아닌 정수이다.

따라서 x_1', x_2', x_3 이 결정되면 x_1, x_2, x_3 도 예외 없이 음이 아닌 정수!

3. 4에서 10까지의 서로 다른 7개의 자연수를 중복을 허용하여 3개의 음이 아닌 정수 x_1', x_2', x_3 를 뽑는 것이므로 ${}_7H_3 = 84$ 가지이다.

답은 84!!

19학년도 6월 평가원 나형 19번

한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c 라 하자. 세 수 a, b, c 가 $a < b - 2 \leq c$ 를 만족시킬 확률은? [4점]

① $\frac{2}{27}$

② $\frac{1}{12}$

③ $\frac{5}{54}$

④ $\frac{11}{108}$

⑤ $\frac{1}{9}$



1. 비주일이 바로 직전에 풀었던 20학년도 6월 평가원 나형 29번을 닮았다. $a < b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수도 단순히 중복조합을 써서 구하면 안 될까?

$a < b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수, $a = b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수를 각각 중복조합으로 구한 후 $a < b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수에서 $a = b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수를 빼는 방법으로 말이다.

안 된다. 왜냐하면 $1 \leq a \leq b - 2 \leq c \leq 6$ 를 만족하는 경우의 수를 단순히 중복조합으로 구한다면 다음과 같은 문제점이 생기기 때문이다.

$b - 2 = b'$ 으로 치환하면 $1 \leq a \leq b' \leq c \leq 6$ 가 성립한다.

b' 을 1 이상 6 이하 자연수로 정한다면 b 는 자연수이긴 하지만 6보다 커질 수 있다.

이는 b 가 1 이상 6 이하인 자연수여야 한다는 점과 모순이다.

$a = b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수를 단순히 중복조합으로 구할 때도 위와 같은 문제가 생긴다.

2. 그러면 어떻게 해야 할까? b 를 기준으로 CASE 분류를 하면 된다.

$a < b - 2 \leq c$ 에서 a 의 최솟값은 1이므로 $b - 2$ 의 최솟값은 2다.

b 는 4, 5, 6 중 하나가 될 수 있다.

(1) $b = 4$

$a < 2 \leq c$ 를 만족해야 한다.

a 는 2보다 작은 자연수 1이고 c 는 2 이상의 자연수 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이다.

$b = 4$ 일 때 $a < b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수는 $1 \times 5 = 5$ 이다.

(2) $b = 5$

$a < 3 \leq c$ 를 만족해야 한다.

a 는 3보다 작은 자연수 1, 2 중 하나이고 c 는 3 이상의 자연수 3, 4, 5, 6 중 하나이다.

$b = 5$ 일 때 $a < b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수는 $2 \times 4 = 8$ 이다.

(3) $b = 6$

$a < 4 \leq c$ 를 만족해야 한다.

a 는 4보다 작은 자연수 1, 2, 3 중 하나이고 c 는 4 이상의 자연수 4, 5, 6 중 하나이다.

$b = 6$ 일 때 $a < b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$ 이다.

따라서 $a < b - 2 \leq c$ 를 만족하는 경우의 수는 $5 + 8 + 9 = 22$ 이다.

3. 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 차례로 나오는 눈의 수 a, b, c 로 가능한 전체 경우의 수는

$6^3 = 216$ 이다.

따라서 $a < b - 2 \leq c$ 를 만족시킬 확률은 $\frac{22}{216} = \frac{11}{108}$ 이다. 답은 ④!!

comment

단순히 20학년도 6월 평가원 나형 29번과 비슷하게 생겼다고 중복조합을 무작정 썼다면 틀리기 쉬운 문제였다. 자세히 들여다보면 20학년도 6월 평가원 나형 29번과 차이가 나는 조건이 있다. **큰 기준을 잡아 CASE 분류를 하였다면 두 문제 모두 어렵지 않게 풀리는 걸 볼 수 있다. 우리는 공부하고 있는 단계이니 더욱 쉬운 풀이에 집착하지 말고 어떤 상황에서도 문제를 풀어낼 수 있는 근본적인 도구와 태도를 기르도록 하자.** 이러면 시험장에서는 더욱 쉽고 정확한 풀이를 구사할 수 있을 것이다.

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? [4점]

(가) $a + b + c - d = 9$

(나) $d \leq 4$ 이고 $c \geq d$ 이다.

① 265

② 270

③ 275

④ 280

⑤ 285



1. 조건 (가)에서 $c-d$ 부분이 특이한 부분임을 눈치챘을 것이다. $c-d$ 를 e 로 치환하자. 조건 (가)는 $a+b+e=9$ 가 되고 조건 (나)에 의하여 $e \geq 0$ 이다.

e 가 0 이상의 정수 중 하나로 결정되면 $0 \leq d \leq 4$ 이고 $c=d+e$ 이기에 c 는 무조건 0 이상의 정수이다.

2. $a+b+e=9$ ($a \geq 0, b \geq 0, e \geq 0$)를 만족하는 경우의 수는 중복조합(${}_3H_9$)을 쓰든 이전에 소개한 방법(${}_{11}C_2$)으로 하든 55가지이다.

d 로 가능한 경우의 수는 0부터 4까지의 정수이기에 5가지이다. 따라서 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $55 \times 5 = 275$ 가지이다. **답은 ㉓!!**

$c-d$ 를 e 로 치환하는 발상을 떠올리지 못한 경우에는 어떻게 풀까? 어렵게 생각할 필요 없다. d 를 기준으로 CASE 분류하면 규칙성을 발견하여 금방 풀어낼 수 있기 때문이다.

1. d 를 기준으로 CASE 분류를 하자. 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 중복조합이나 이전에 소개한 방법으로 구하면 된다.

| d | 조건 (가) | 순서쌍 (a, b, c) 개수 |
|-------|---|--------------------|
| $d=0$ | $a+b+c=9$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$) | ${}_3H_9 = 55$ |
| $d=1$ | $a+b+c=10$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 1$) | ${}_3H_9 = 55$ |
| $d=2$ | $a+b+c=11$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 2$) | ${}_3H_9 = 55$ |
| $d=3$ | $a+b+c=12$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 3$) | ${}_3H_9 = 55$ |
| $d=4$ | $a+b+c=13$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 4$) | ${}_3H_9 = 55$ |

2. 따라서 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $55 \times 5 = 275$ 가지이다.

답은 ㉓!!

comment

$c-d$ 를 e 로 치환하면 더욱 쉽게 풀리는 문제였다. 하지만 이를 떠올리지 못하였더라도 d 를 기준으로 CASE 분류를 해보면, 규칙성이 쉽게 보여 풀 수 있는 문제이다. 우리는 공부하고 있는 단계이니 더욱 쉬운 풀이에 집착하지 말고 어떤 상황에서도 문제를 풀어낼 수 있는 근본적인 도구와 태도를 기르도록 하자. 이러면 시험장에서는 더욱 쉽고 정확한 풀이를 구사할 수 있을 것이다.



CHAPTER
03 문제

01 19학년도 9월 평가원 15번

동전 A의 앞면과 뒷면에는 각각 1과 2가 적혀 있고 동전 B의 앞면과 뒷면에는 각각 3과 4가 적혀 있다. 동전 A를 세 번, 동전 B를 네 번 던져 나온 7개 수의 합이 19 또는 20일 확률은? [4점]

- ① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{17}{32}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

02 18학년도 6월 평가원 13번

이틀 동안 진행되는 어느 축제에 모두 다섯 개의 팀이 참가하여 공연한다. 매일 두 팀 이상이 공연하도록 다섯 팀의 공연 날짜와 공연 순서를 정하는 경우의 수는? (단, 공연은 한 팀씩 하고, 축제 기간 중 각 팀은 1회만 공연한다.) [3점]

- ① 180 ② 210 ③ 240 ④ 270 ⑤ 300

03 18학년도 6월 평가원 27번

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수를 구하시오. [4점]

04 18학년도 수능 18번

서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) [4점]

① 220

② 216

③ 212

④ 208

⑤ 204

05 17학년도 6월 평가원 27번

사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배, 귤은 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.) [4점]

06 19학년도 수능 12번

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 초콜릿 8개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? [3점]

(가) 각 학생은 적어도 1개의 초콜릿을 받는다.
(나) 학생 A는 학생 B보다 더 많은 초콜릿을 받는다.

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

07 17학년도 9월 평가원 15번

각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는? [4점]

- ① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

01 19학년도 9월 평가원 15번

답 : ①

1. '한 개의 동전을 여러 번 던질 때,'는 '매번 같은 조건에서 어떤 시행을 여러 번 반복할 때,'이므로 독립시행이라는 점을 눈치채야 한다.
2. 동전 A를 3번 던져 나올 수 있는 수의 합에는 3, 4, 5, 6이 있다. 동전 B를 4번 던져 나올 수 있는 수의 합에는 12, 13, 14, 15, 16이 있다. 각각이 나올 확률은 다음과 같다.

| A | 확률 | B | 확률 |
|---|---|----|--|
| 3 | ${}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ | 12 | ${}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ |
| 4 | ${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ | 13 | ${}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$ |
| 5 | ${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$ | 14 | ${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$ |
| 6 | ${}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$ | 15 | ${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}$ |
| | | 16 | ${}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$ |

3. 7개 수의 합이 19가 나오기 위한 (A, B)에는 (3,16), (4,15), (5,14), (6,13)이 있다.
7개 수의 합이 20이 나오기 위한 (A, B)에는 (4,16), (5,15), (6,14)가 있다.

| 19 | | 20 | |
|--------|---|--------|---|
| (3,16) | $\frac{1}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{128}$ | (4,16) | $\frac{3}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{128}$ |
| (4,15) | $\frac{3}{8} \times \frac{4}{16} = \frac{3}{32}$ | (5,15) | $\frac{3}{8} \times \frac{4}{16} = \frac{3}{32}$ |
| (5,14) | $\frac{3}{8} \times \frac{6}{16} = \frac{9}{64}$ | (6,14) | $\frac{1}{8} \times \frac{6}{16} = \frac{3}{64}$ |
| (6,13) | $\frac{1}{8} \times \frac{4}{16} = \frac{1}{32}$ | | |

따라서 동전 A를 세 번, 동전 B를 네 번 던져 나온 7개 수의 합이 19 또는 20일 확률은 $\frac{7}{16}$ 이다.

02 18학년도 6월 평가원 13번

답 : ③

1. 5개 팀의 순서를 정한 뒤 첫째 날, 둘째 날에 각각 몇 팀이 공연할지 정하면 된다.
2. 5개 팀의 순서를 정하는 경우의 수는 $5!$ 이다.

매일 2팀 이상씩 공연해야 하므로 첫째 날에 3팀, 둘째 날에 2팀이 공연하거나 첫째 날에 2팀, 둘째 날에 3팀이 공연할 수도 있다. 첫째 날, 둘째 날에 각각 몇 팀이 공연할지 정하는 경우의 수는 2이다.

따라서 매일 두 팀 이상이 공연하도록 다섯 팀의 공연 날짜와 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $5! \times 2 = 240$ 이다.

03 18학년도 6월 평가원 27번

답 : 45

1. 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_5C_2 = 10$ 개다.
2. 선택한 두 집합이 서로 다를 경우는 원소의 개수가 2인 부분집합 10개 중 서로 다른 2개의 부분집합을 뽑는 경우와 같다. 이에 해당하는 경우의 수는 ${}_{10}C_2 = 45$ 이다.

04 18학년도 수능 18번

답 : ②

1. 각 상자에 담길 공의 개수부터 정하도록 하자. 상자 최대 개수가 4개이고 빈 상자가 생길 수도 있다. 자연수 분할을 통해 구해보면 $(4, 0, 0, 0)$, $(3, 1, 0, 0)$, $(2, 2, 0, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ 이다.

이 중에서 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있어야 하기 때문에 각 상자에 담길 공의 개수는 $(3, 1, 0, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ 가 가능하다.

2. 서로 다른 상자 4개에 각각 들어갈 공의 수를 정한 후에 서로 다른 공 4개를 넣도록 하자.

(1) 각 상자에 담길 공의 개수 배치가 $(3, 1, 0, 0)$ 일 때

$(3, 1, 0, 0)$ 을 서로 다른 상자 4개에 분배하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이다.

상자 A에 3개의 공, 상자 B에 1개의 공, 상자 C에 0개의 공, 상자 D에 0개의 공이 들어간다고 하자. 이때 서로 다른 공 4개를 각 상자에 넣는 경우의 수는 ${}_4C_3 \times {}_1C_1 = 4$ 이다.

따라서 각 상자에 담길 공의 개수 배치가 $(3, 1, 0, 0)$ 일 때, 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣는 경우의 수는 $12 \times 4 = 48$ 이다.

(2) 각 상자에 담길 공의 개수 배치가 (2, 1, 1, 0)일 때

(2, 1, 1, 0)을 서로 다른 상자 4개에 분배하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이다.

상자 A에 2개의 공, 상자 B에 1개의 공, 상자 C에 1개의 공, 상자 D에 0개의 공이 들어간다고 하자. 이때 서로 다른 공 4개를 각 상자에 넣는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 12$ 이다.

따라서 각 상자에 담길 공의 개수 배치가 (2, 1, 1, 0)일 때, 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣는 경우의 수는 $12 \times 12 = 144$ 이다.

(3) 각 상자에 담길 공의 개수 배치가 (1, 1, 1, 1)일 때

(1, 1, 1, 1)을 서로 다른 상자 4개에 분배하는 경우의 수는 $\frac{4!}{4!} = 1$ 이다.

상자 A에 1개의 공, 상자 B에 1개의 공, 상자 C에 1개의 공, 상자 D에 1개의 공이 들어간다고 하자. 이때 서로 다른 공 4개를 각 상자에 넣는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 24$ 이다.

따라서 각 상자에 담길 공의 개수 배치가 (1, 1, 1, 1)일 때, 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣는 경우의 수는 $1 \times 24 = 24$ 이다.

3. 따라서 조건에 맞게 서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣는 경우의 수는 $48 + 144 + 24 = 216$ 이다.

05 17학년도 6월 평가원 27번

답 : 36

1. 사과를 1개 선택할 때와 사과를 0개 선택할 때로 나눌 수 있다.

감의 개수를 a 개, 배의 개수를 b 개, 귤의 개수를 c 개라 하자. ($a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$)

(1) 사과를 1개 선택할 때

$a + b + c = 7$ ($a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$)을 만족하는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$ 이다.

(2) 사과를 0개 선택할 때

$a + b + c = 8$ ($a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$)을 만족하는 경우의 수는 ${}_7C_2 = 21$ 이다.

2. 따라서 조건을 만족하며 사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하는 경우의 수는 $15 + 21 = 36$ 이다.

06 19학년도 수능 12번

답 : ②

1. 조건 (가), 조건 (나)를 모두 만족하려면 $A + B + C + D = 8$ ($A \geq 1, B \geq 1, C \geq 1, D \geq 1$) 이고 $A > B$ 여야 한다.

자연수 E 에 대하여 $A > B$ 를 $A = B + E$ ($E \geq 1$)로 표현할 수 있다.

이를 $A + B + C + D = 8$ 에 대입하면 $2B + C + D + E = 8$ 이다.

B 를 기준으로 CASE 분류를 하자. $B \geq 1, C \geq 1, D \geq 1, E \geq 1$ 이므로 B 는 1, 2가 가능하다. B 가 3 이상이라면 C, D, E 중 하나 이상이 0이 될 수밖에 없기 때문이다.

(1) $B = 1$

$C + D + E = 6$ 을 만족하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$ 이다.

(2) $B = 2$

$C + D + E = 4$ 를 만족하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

2. 따라서 조건을 만족하며 네 명의 학생에게 같은 종류의 초콜릿 8개를 나누어 주는 경우의 수는 $10 + 3 = 13$ 이다.

07 17학년도 9월 평가원 15번

답 : ④

1. 천의 자리의 수를 a , 백의 자리의 수를 b , 십의 자리의 수를 c , 일의 자리의 수를 d 라 하자. 조건을 만족하려면 $a + b + c + d = 7$ ($a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$)이 성립해야 한다. 이를 만족하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$ 이다.