2021학년도 수능 나형 짝수형 . by CSM17
정답 및 해설

수능 나형 짝수형

1	④	**2**	④	**3**	③	**4**	②	**5**	④
6	①	**7**	⑤	**8**	④	**9**	①	**10**	⑤
11	②	**12**	②	**13**	⑤	**14**	③	**15**	③
16	②	**17**	①	**18**	③	**19**	④	**20**	②
21	③	**22**	24	**23**	12	**24**	2	**25**	15
26	6	**27**	36	**28**	21	**29**	587	**30**	39

1. 정답 : ④

$1\times 2^2=4$

2. 정답 : ④

등비수열 $\{a_n\}$의 공비 $r=2$ 이므로

$a_5=\frac{1}{8}\times 2^4=2$

3. 정답 : ③

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x+4)=6$

4. 정답 : ②

$-1\le \cos x\le 1$ 이므로 $-7\le 4\cos x+3\le 7$이고

$f(x)$의 최댓값은 7이다.

5. 정답 : ④

사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

6. 정답 : ①

$f'(x)=4x^3+3$이므로

$f'(2)=32+3$

$=35$

7. 정답 : ⑤

주어진 식을 변형하면

$3^{-2x}<3^{21-4x}$

$3>1$이므로 지수를 비교하면

$-2x<21-4x$

정리하면 $2x<21$

$x<\frac{21}{2}$

그러므로 자연수의 개수는 10개이다.

8. 정답 : ④

주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 4가 되는 경우는 $1,1,4$ 또는 $1,2,2$ 가 있다.

(i) $1,1,4$ 인 경우

$\frac{3!}{2!}=3$

(ii) $1,2,2$ 인 경우도 동일하다.

따라서 전체 경우의 수는 $6^3=216$이고,

구하는 확률은 $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$이다.

9. 정답 : ①

주어진 곡선의 도함수 $y'=3x^2-6x+2$

점 A에서의 접선의 기울기는 2이므로 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 접점 A와 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+2$이다. x절편은 $y=0$을 대입하면 $x=4$

10. 정답 : ⑤

$\sum$의 성질에 의하여

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)=2\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}b_k+\sum_{k=1}^{5}4$

$=2\times 8-9+4\times 5$

$=27$

11. 정답 : ②

표본평균 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}\left(20,\ \frac{5^2}{16}\right)$ 이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$ 이고, $\sigma(\overline{X})=\frac{5}{4}$ 이다.

따라서, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=\frac{85}{4}$

12. 정답 : ②

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_2+a_2-a_3+\cdots+a_n-a_{n+1}$

$=a_1-a_{n+1}=-n^2+n$ 이다.

$a_1=1$이므로

$n=10$을 대입하면 $a_{11}=10^2-10+1$ 이다.

$a_{11}=91$

13. 정답 : ⑤

$f(1)$의 값으로 가능한 수는 4개다.

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4의 4개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$ 이다.

그러므로 구하는 함수의 개수는 $4\times 20=80$

14. 정답 : ③

문제의 조건에 의해 $\int_3^k(2t-6)dt=\left[t^2-6t\right]_3^k=25$

$k^2-6k+9=25$

$(k+2)(k-8)=0$

$k=8$ ($\because$ $k>0$)

15. 정답 : ③

A와 B를 한 묶음으로 보고 A와 B를 배열하는 경우의 수는 $2!$가지이다.

B옆에 C를 제외한 한명의 학생을 앉히는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이다.

남은 세 명의 학생을 앉히는 경우의 수가 $3!$이므로

$2!\times 3\times 3!=36$이다.

16. 정답 : ②

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(-x)=-\sin x$ 이므로

주어진 식을 정리하면 $4\sin^2 x+4\sin x-3=0$이다.

$4\sin^2 x+4\sin x-3=(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$

에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ 이다. ($\because -1\le \sin x\le 1$)

$0\le x<4\pi$에서 주어진 방정식을 만족시키는 해는

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$, $\frac{17}{6}\pi$이므로 모든 해의 합은 6π이다.

17. 정답 : ①

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

에서 $f(0)+g(0)=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-\{f(0)-g(0)\}}{x-0}$

$=f'(0)+g'(0)$

$=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$에서

$f(0)=-3$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\frac{1}{g(x)}$ 이므로

$f'(0)=6$, $g'(0)=-3$, $g(0)=3$

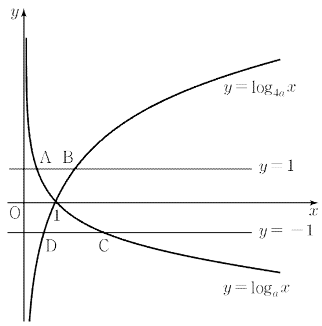
따라서

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\times 3+(-3)\times(-3)=27$

18. 정답 : ③

주어진 상황을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



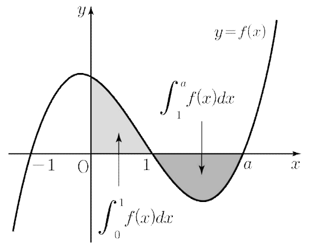
$\log_a x=1$, $x=a$ 이므로 $\mathrm{A}(a, 1)$
$\log_{4a} x=1$, $x=4a$이므로 $\mathrm{B}(4a, 1)$
$\log_a x=-1$, $x=\dfrac{1}{a}$ 이므로 $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{a}, -1\right)$
$\log_{4a} x=-1$, $x=\dfrac{1}{4a}$ 이므로 $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{4a}, -1\right)$
ㄱ. 선분 AB 의 1 : 4 외분점은
$\left(\dfrac{-4\times a+1\times 4a}{1-4}, \dfrac{-4\times 1+1\times 1}{1-4}\right)=(0, 1)$
ㄴ. 사각형 ABCD 가 직사각형이기 위해서는 B 의 x 좌표와 C 의 x 좌표가 같아야 하므로 $4a=\dfrac{1}{a}$ 에서
$a=\dfrac{1}{2}$ 이다.
ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}=4a-a=3a$, $\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4a}=\dfrac{3}{4a}$
$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$ 이므로 $3a<\dfrac{3}{4a}$ 에서 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 이다.
그런데 주어진 조건에서 $\dfrac{1}{4}<a<1$ 이므로
$\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$ 이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19. 정답 : ④

X가 정규분포 $\mathrm{N}(8, 3^2)$을 따르고, Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다.
$\mathrm{P}(4\le X\le 8)+\mathrm{P}(Y\ge 8)=\dfrac{1}{2}$를 표준화시키면
$\mathrm{P}\left(\dfrac{4-8}{3}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$
이므로 $-\left(\dfrac{4-8}{3}\right)=\dfrac{8-m}{\sigma}$ 이다. ……㉠
$\mathrm{P}\left(Y\le 8+\dfrac{2\sigma}{3}\right)$을 표준화하면
$\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{8-m+\dfrac{2\sigma}{3}}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{8-m}{\sigma}+\dfrac{2\sigma}{3\sigma}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le 2)$ ($\because$ ㉠)
따라서 표준정규분포표에 의해
$\mathrm{P}(Z\le 2)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5+0.4772=0.9772$

20. 정답 : ②

$g(x)=x^2\displaystyle\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2dt$ 의 양변을 미분하면
$g'(x)=2x\displaystyle\int_0^x f(t)dt-x^2f(x)+x^2f(x)$
$=2x\displaystyle\int_0^x f(t)dt$
$g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 $g'(x)$의 부호변화가 한번만 나타나야 하므로 $\displaystyle\int_0^a f(t)dt\ge 0$ 이어야 한다.
$\displaystyle\int_0^a f(t)dt\ge 0$ 을 만족시키는 a 의 최댓값은
다음 그림과 같이 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=-\int_1^a f(x)dx$일 때 이다.



따라서 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=0$을 만족시키는 a 값을 찾으면 된다.
$\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a$
$=\dfrac{1}{4}a^4-\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{1}{2}a^2+a^2$
$=a^2(a^2-6)=0$
$a>1$이므로 $a=\sqrt{6}$

21. 정답 : ③

(나)의 식의 양변에 $n=3$을 대입하면
$a_7=a_2\times a_3-2$
$a_7=2$이므로 $a_2\times a_3=4$이다.
(나)의 식의 양변에 $n=12$를 대입하면
$a_{25}=a_2\times a_{12}-2$ ……㉠
(가)의 식의 양변에 $n=6$을 대입하면
$a_{12}=a_2\times a_6+1$ ……㉡
(가)의 식의 양변에 $n=3$을 대입하면
$a_6=a_2\times a_3+1=5$
조건 (가)의 양변에 $n=1$을 대입했을 때
$a_2=a_2\times a_1+1$, $a_2(1-a_1)=1$
$0<1-a_1<1$이므로 $a_2>1$
또한 (가)와 (나)의 양변에 $n=1$을 대입한 후 빼면
$(a_2a_1+1)(a_2a_1-2)=4$
$(a_1a_2-3)(a_1a_2+2)=0$
이므로 $a_1a_2=3$이다. ($\because$ $a_1a_2>0$)
$a_2=a_2\times a_1+1=4$이므로
㉡을 ㉠에 대입하면
$a_{25}=a_2\times(a_2\times a_6+1)-2$
$=5{a_2}^2+a_2-2$
$=5\times 16+4-2=82$

22. 정답 : 24

다항식 $(3x+1)^8$의 일반항은 ${}_8\mathrm{C}_r(3x)^r$ $(0\le r\le 8)$
x 의 계수는 ${}_8\mathrm{C}_1\times 3=24$이다.

23. 정답 : 12

$f'(x)=3x^2+4x+5$를 부정적분하면
$f(x)=x^3+2x^2+5x+C$ (단, C는 적분상수)
$f(0)=C=4$이므로
$f(x)=x^3+2x^2+5x+4$
$f(1)=12$

24. 정답 : 2

$\log_3 72-\log_3 8=\log_3\dfrac{72}{8}=\log_3 9=2$

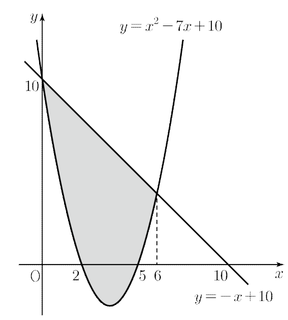
25. 정답 : 15

$f(x)=4x^3-12x+7$ 라고 하자.
$f(x)=4x^3-12x+7$ 과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2 이기 위해서는 k가 $f(x)=4x^3-12x+7$ 의 극값이어야 한다.
$f'(x)=12x^2-12=12(x-1)(x+1)$
$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=-1$이다.
최고차항의 계수가 양수이므로
$f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1)=15$
$f(x)$ 의 극솟값은 $f(1)=-1$이다.
$k>0$이므로 $k=15$

26. 정답 : 6

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+b)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$
$x\to 1$ 일 때 (분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이다.
$\displaystyle\lim_{x\to 1+}(x+b)(\sqrt{x+3}+2)=4(1+b)=0$ $b=-1$
$\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 1+}(\sqrt{x+3}+2)=4$
$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)=-3+a$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.
$-3+a=4$, $a=7$
$\therefore$ $a+b=6$

27. 정답 : 36

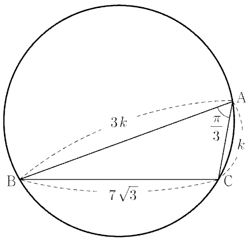


방정식 $x^2-7x+10=-x+10$ 에서
$x^2-6x=x(x-6)=0$
따라서 곡선 $y=x^2-7x+10$ 과 직선 $y=-x+10$ 의 교점은 $x=0$, $x=6$ 에서 만난다.
따라서 구하는 넓이는
$\displaystyle\int_0^6\{(-x+10)-(x^2-7x+10)\}dx$
$\displaystyle=\int_0^6(-x^2+6x)dx$
$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$
$=-72+108=36$

28. 정답 : 21

$\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고, 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름이 7 이므로 사인 법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\times 7$, $\overline{BC} = 7\sqrt{3}$



$\overline{AC} = k$, $\overline{AB} = 3k$ 이므로 삼각형 ABC 에서 코사인 법칙에 의하여

$(7\sqrt{3})^2 = k^2 + 9k^2 - 2\cdot k\cdot 3k\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 7k^2$

$\therefore\ k^2 = 21$

29. 정답 : 587

[해설]

(i) 주머니에서 3 이 적힌 공을 뽑을 경우

주사위를 3 번 던져서 나오는 눈의 수를 $a,\ b,\ c$ 라 할 때 $a+b+c=10$ 을 만족하는 경우의 수는 세 수의 합이 10 인 자연수를 택하는 경우에서 a, b, c 중 하나가 7 이상을 택하는 경우를 제외하면 된다.

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$ 로 놓으면

$a'+b'+c'=7$ 을 만족시키는 경우의 수는

${}_3H_7 = 36$

$a',\ b',\ c'$ 중 하나가 6 이 되는 경우의 수는 $3\times {}_2H_1 = 6$, $a',\ b',\ c'$ 중 하나가 7 이 되는 경우의 수는 3, 3 이 적힌 공을 뽑을 확률은 $\frac{2}{5}$ 이므로 한 번 시행하여 얻은 점수가 10 점일 확률은

$\frac{2}{5}\times\frac{36-6-3}{216} = \frac{1}{20}$

(ii) 주머니에서 4 가 적힌 공을 뽑을 경우

주사위를 4 번 던져서 나오는 눈의 수를 $a,\ b,\ c$, d 라 할 때 $a+b+c+d=10$ 을 만족하는 경우의 수는 네 수의 합이 10 인 자연수를 택하는 경우에서 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 하나가 7 이상을 택하는 경우를 제외하면 된다.

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$ 로 놓으면 $a'+b'+c'+d'=6$ 을 만족시키는 경우의 수는 ${}_4H_6 = 84$

$a',\ b',\ c',\ d'$ 중 하나가 6 이 되는 경우의 수는 4, 4 가 적힌 공을 뽑을 확률은 $\frac{3}{5}$ 이므로

한 번 시행하여 얻은 점수가 10 점일 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{84-4}{6^4} = \frac{1}{27}$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{20}+\frac{1}{27} = \frac{47}{540}$

$p=540,\ q=47\ \therefore\ p+q=587$

30. 정답 : 39

함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하고

$h(0) = |f(0)-g(0)| = 0$ 이므로 $h'(0)=0$ 이다. 즉 $f'(0)=g'(0)$ 이므로 $f(x)-g(x)=x^2(x-a)$ 의 형태이며 또한 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x<1$ 에서 $f(x)-g(x)=x^2(x-a)\le 0$ 이어야 한다.

$h(x)=\begin{cases} -f(x)+g(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$

$x=1$ 에서 미분가능하므로

$-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$

$-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$\therefore\ f(1)=0,\ f'(1)=0$

함수 $f(x)=(x-\alpha)(x-1)^2$ 라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 $x=0$ 에서 접한다.

$f'(x)=(x-1)^2+2(x-\alpha)(x-1)$ 이므로

$f'(0)=1+2\alpha,\ g(x)=(1+2\alpha)x-\alpha$

이때 $h(2)=f(2)+g(2)$ 이므로

$(2-\alpha)+(1+2\alpha)\times 2+\alpha = 4+2\alpha = 5$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2,\ g(x)=2x-\frac{1}{2}$

$\therefore\ h(4)=f(4)+g(4)=\frac{7}{2}\cdot 3^2+8-\frac{1}{2}=\frac{78}{2}=39$