秀 모의고사

2021학년도 대학수학능력시험 대비 秀 모의고사 3회

정답 및 해설

수학 영역 (가형)

메가스터디학원

2021학년도 秀 모의고사 3회 [가형] 해설

1	②	2	①	3	③	4	④	5	②
6	⑤	7	①	8	⑤	9	③	10	④
11	①	12	②	13	④	14	③	15	⑤
16	④	17	②	18	①	19	④	20	⑤
21	⑤	22	240	23	5	24	24	25	100
26	417	27	40	28	3	29	231	30	4

1) ②

$\sqrt[3]{\log_2 3 \times \log_3 256} = \sqrt[3]{\log_2 2^8} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

2) ①

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x + 2)(\cos x - 1)}{x^2}$

$= 3\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{3}{2}$

3) ③

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A^C \cap B) = 2\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B) = 2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(B) \neq 0$이므로

$\mathrm{P}(A^C) = 2\mathrm{P}(A)$, $1-\mathrm{P}(A) = 2\mathrm{P}(A)$

$3\mathrm{P}(A) = 1$, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$

$2\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{6}$에서 $2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}\times\frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A^C) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$

4) ④

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{n^2+1}{2n^2}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{1}{2}$이다.

수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$이 수렴하고 $n\to\infty$이므로 $a_n\to\infty$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}$

5) ②

$\mathrm{P}(1 \le X < 2)$

$= \mathrm{P}(1 \le X \le 4) - \mathrm{P}(2 \le X \le 4)$

$= \int_1^4 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = F(1) - F(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

6) ⑤

$\ln x = t$라 하면

$x\to e$일 때 $t\to 1$, $x\to e^9$일 때 $t\to 9$이고

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$이므로

$\int_e^{e^9}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^9 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{1}) = 4$

7) ①

$x = \ln t$, $y = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 9t$에서

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$이고, $\frac{dy}{dt} = t^2 - 3t - 9$이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t^2-3t-9}{\frac{1}{t}} = t^3 - 3t^2 - 9t$

$f(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$로 놓으면

$f'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t^2 - 2t - 3) = 3(t+1)(t-3)$

$f'(t) = 0$에서 $t > 0$이므로 $t = 3$

$t = 3$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 바뀌므로

함수 $f(t)$는 $t = 3$에서 극값 $f(3) = 27 - 27 - 27 = -27$을 가진다.

즉, $\frac{dy}{dx}$는 $t = 3$에서 극값 -27을 가진다.

따라서 $a = 3$이고, $b = -27$이므로 $a + b = 3 + (-27) = -24$

8) ⑤

모든 자연수 n에 대하여 ${a_{n+1}}^2 = a_n \times a_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n - 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{ar^{n-1}}{4^n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n}{1 - 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n\right\} = 3$

에서 $r = 4$이고, $a = 12$이다.

따라서 $a_n = 12\times 4^{n-1} = 3\times 4^n$이므로 $a_2 = 48$이다.

9) ③

13개의 영역을 서로 다른 13가지의 색으로 칠하는 경우의 수는 13!이고, 13!의 각 경우는 회전하여 4개씩 같은 모양이 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{13!}{4}$이다.

10) ④

모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = na_n$이므로

$a_1 + a_2 = 2a_2$에서 $a_1 = a_2$이다.

$a_n = \dfrac{3}{4-a_n}$의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_2 = \dfrac{3}{4-a_1}$이고,

$a_2 = a_1$이므로 $a_1 = \dfrac{3}{4-a_1}$, 즉

$(a_1)^2 - 4a_1 + 3 = 0$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
서로 다른 모든 a_1의 값의 합은 4이다.

<참고>

$a_1 = 1$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 1$이고

$a_1 = 3$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 3$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_n$이 성립한다.

11) ①

곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\log_3 x$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$f(x) = \log_2(x+3)+4$이다.

$\log_3(x+3) = -4$에서

$x = -3+3^{-4} = -3+\dfrac{1}{81}$이므로

$a = -3+\dfrac{1}{81}$이고,

$f(0) = \log_3(0+3)+4 = 1+4 = 5$에서

$b=5$이다.

따라서 $a+b = 2+\dfrac{1}{81} = \dfrac{163}{81}$

12) ②

$\angle \mathrm{ABC} = \theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{6^2+8^2-4^2}{2\times 6\times 8} = \dfrac{7}{8}$이다.

$\sin(\angle \mathrm{ABE}) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta = \dfrac{7}{8}$이므로

삼각형 ABE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BE}} \times \sin(\angle \mathrm{ABE})$

$= \dfrac{1}{2}\times 6\times 8\times \dfrac{7}{8} = 21$

13) ④

$b-a = 2\times 1.96\times \dfrac{25}{\sqrt{36}} = 2\times 1.96\times \dfrac{25}{6}$이고

$c-b = 2\times 1.96\times \dfrac{25}{\sqrt{144}} = 2\times 1.96\times \dfrac{25}{12}$이므로

$c-a = 2\times 1.96\times 25\times\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}\right) = 2\times 1.96\times 25\times \dfrac{1}{4}$이다.

$c-a = 2\times 1.96\times \dfrac{25}{\sqrt{n}}$이므로 $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{4}$에서 $n=16$이다.

따라서

$n(c-a) = 16\times 2\times 1.96\times 25\times \dfrac{1}{4} = 2\times 1.96\times 25\times 4 = 392$

14) ③

$\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{g(x)-\dfrac{\pi}{3}} = q$에서

$g(1) = \dfrac{\pi}{3}$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$이다.

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{p}{\csc\dfrac{\pi}{3}+\cot\dfrac{\pi}{3}}\right) = \ln\left(\dfrac{p}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \ln\left(\dfrac{p}{\sqrt{3}}\right) = 1$에서

$p = \sqrt{3}e$

$f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}e}{\csc x+\cot x}\right)$에서

$f'(x) = -\dfrac{-\csc x\cot x-\csc^2 x}{\csc x+\cot x} = -\dfrac{-\csc x(\csc x+\cot x)}{\csc x+\cot x} = \csc x$

$q = \lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{g(x)-\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}} = \dfrac{1}{g'(1)} = f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \csc\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

따라서 $p\times q = \sqrt{3}e\times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 2e$

15) ⑤

$\log_a b = \alpha$, $\log_b c = \beta$, $\log_c a = \gamma$로 놓으면

(가)에서 $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{47}{10}$이고,

(나)에서 $\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma = \dfrac{59}{10}$이고,

$\log_a b\times \log_b c\times \log_c a = 1$이므로

$\alpha\beta\gamma = 1$이다.

따라서 α, β, γ는 삼차방정식

$x^3 - \dfrac{47}{10}x^2 + \dfrac{59}{10}x - 1 = 0$의 세 실근이다.

$10x^3 - 47x^2 + 59x - 10 = 0$

$(5x-1)(x-2)(2x-5) = 0$

$x = \dfrac{1}{5}$ 또는 $x=2$ 또는 $x = \dfrac{5}{2}$

$\log_c a < 1$에서 $\gamma < 1$이므로

$\log_c a = \dfrac{1}{5}$이다.

따라서 $\log_a c = 5$

16) ④

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로

(*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} - \frac{k}{k+1}$이다.

$n=k+1$일 때,

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} - \frac{k}{k+1} + a_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} - \frac{k}{k+1} + \frac{k^2}{(k+1)(k+2)} \times a_k$$

이다.

$$\frac{k^2}{(k+1)(k+2)} \times a_k$$

$$= \frac{k^2}{(k+1)(k+2)} \times \frac{(k-1)^2}{k(k+1)} \times \cdots \frac{1^2}{2\times 3} \times a_1$$

이므로

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} - \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2(k+2)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} - \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} - \frac{k+1}{k+2}$$

이다.

그러므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서

$f(k) = \frac{k^2}{(k+1)(k+2)}$, $g(k) = \frac{1}{(k+1)^2(k+2)}$,

$h(k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 이므로

$$f(2)+g(2)+h(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{36} + \frac{1}{12} = \frac{4}{9}$$

17) ②

전사건의 원소의 개수는

${}_{12}\mathrm{C}_4 = \frac{12\times 11\times 10\times 9}{4!} = 11\times 5\times 9$이고,

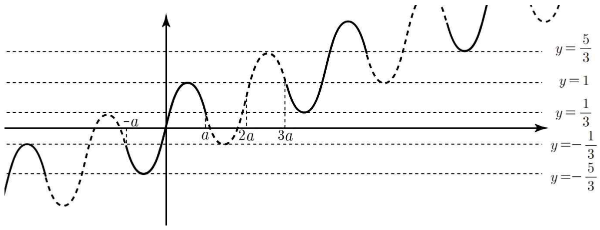
여사건의 원소의 개수는 ${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 3 = 6\times 6\times 3$이므로

구하는 확률은 여사건의 확률에 의하여

$$1-\frac{6\times 6\times 3}{11\times 5\times 9} = 1-\frac{12}{55} = \frac{43}{55}$$

18) ①

실수 t의 값에 상관없이 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수가 5이므로 극댓값과 극솟값이 같은 형태로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그려져야 한다.



$\sin a = \frac{1}{3}$이 되어야 방정식 $f(x)=t$가 t의 값에 관계없이 항상 5개의 실근을 갖는다. (점선과 실선이 각각 한 주기를 나타낸다.)

수열 $\{f(na)\}$는 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공차가 $\frac{1}{3}$인 등차수열이므로

$$f(a)+f(2a)+f(3a) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 2$$

<참고>

자연수 n에 대하여 실수 t의 값에 관계없이 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수가 $2n+1$일 때, $\sin a = \frac{1}{n}$ 이다.

19) ④

3, 9, 15가 적혀 있는 카드가 나오면 점 P는 점 A에서 점 D로 이동하고, 3, 9, 15를 제외한 수가 적혀 있는 카드가 나오면 점 P는 점 A에 그대로 있으므로 점 P가 점 A에서 점 D로 이동할 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 점 P가 점 A에 그대로 있을 확률은 $\frac{5}{6}$이다.

이와 같은 시행을 n번 반복할 때, 점 P가 점 A에 있을 확률은 p_n이므로 점 P가 D에 있을 확률은 $1-p_n$이다.

그러므로 이와 같은 시행을 $(n+1)$번 반복할 때, 점 P가 점 A에 있을 확률 p_{n+1}은 $p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) = \frac{4}{6}a_n + \frac{1}{6}$이다.

따라서 $a=\frac{4}{6}$이고, $b=\frac{1}{6}$이므로 $a+b=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이다.

20) ⑤

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $\cos(2\pi-x)=\cos x$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2\pi-x)$이다. (참)

ㄴ. $2\pi-x=t$로 놓으면

$$\int_0^{\pi} e^{\cos x}dx=\int_0^{\pi} e^{\cos(2\pi-x)}dx=\int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos t}dt\text{이고,}$$

$2\pi+x=t$로 놓으면

$$\int_0^{\pi} e^{\cos x}dx=\int_0^{\pi} e^{\cos(2\pi+x)}dx=\int_{2\pi}^{3\pi} e^{\cos t}dt\text{이므로}$$

모든 자연수 n에 대하여 $\int_0^{n\pi} f(x)dx=n\int_0^{\pi} f(x)dx$이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $g(n\pi)=ng(\pi)$이다. (참)

ㄷ. $\int_{\pi}^{5\pi} xf(x)dx=[xg(x)]_{\pi}^{5\pi}-\int_{\pi}^{5\pi} g(x)dx$

$=5\pi g(5\pi)-\pi g(\pi)-\int_{\pi}^{5\pi} g(x)dx$

ㄴ에 의하여 $g(5\pi)=5g(\pi)$이므로

$\int_{\pi}^{5\pi} xf(x)dx=25\pi g(\pi)-\pi g(\pi)-\int_{\pi}^{5\pi} g(x)dx$

$=24\pi g(\pi)-\int_{\pi}^{5\pi} g(x)dx$

$f(2n\pi-x)=e^{\cos(2n\pi-x)}=e^{\cos x}=f(x)$이므로

곡선 $y=f(x)$는 모든 자연수 n에 대하여

직선 $x=n\pi$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=f(2n\pi-x)$이다.

이 식의 양변을 부정적분하면

$g(x)=-g(2n\pi-x)+C$

$g(2n\pi-x)+g(x)=C$

이 식의 양변에 $x=n\pi$를 대입하면

$C=2g(n\pi)$이므로

$g(2n\pi-x)+g(x)=2g(n\pi)$이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$는 모든 자연수 n에 대하여

점 $(n\pi,\ g(n\pi))$에 대하여 대칭이다.

$\int_{\pi}^{5\pi} g(x)dx=4\pi g(3\pi)=12\pi g(\pi)$이므로

$\int_{\pi}^{5\pi} xf(x)dx=\int_{\pi}^{5\pi} g(x)dx=12\pi g(\pi)$ (참)

따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<참고>

① 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2a-x)=f(x)$를 만족시키면 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

② 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(2a-x)+g(x)=2b$를 만족시키면 곡선 $y=g(x)$는 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

<다른 풀이>

ㄷ. $\int_{\pi}^{5\pi} xf(x)dx=\int_{\pi}^{5\pi}(x-3\pi)f(x)dx+\int_{\pi}^{5\pi} 3\pi f(x)dx$에서

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=3\pi$에 대하여 대칭이고, 직선 $y=x-3\pi$는 점 $(3\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

곡선 $y=(x-3\pi)f(x)$는 점 $(3\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\int_{\pi}^{5\pi}(x-3\pi)f(x)dx=0$ 이므로

$\int_{\pi}^{5\pi} xf(x)dx=\int_{\pi}^{5\pi} 3\pi f(x)dx=3\pi\{g(5\pi)-g(\pi)\}=12\pi g(\pi)$

21) ⑤

$F(x)=\int_0^x t\{f'(x-t)-s\}dt$에서

$F'(x)=\int_0^x f'(t)dt-sx$이므로

$F''(x)=f'(x)-s$이다.

$F'(x)$는 $x=a$에서 최솟값을 가지고,

실수 a의 값은 $g(s)$이므로

$F''(a)=F''(g(s))=f'(g(s))-s=0$, 즉

$f'(g(s))=s$이다.

$f'(g(s))=s$의 양변을 s에 대하여 미분하면

합성함수의 미분법에 의하여

$f''(g(s))\times g'(s)=1$이므로

$$g'(s)=\frac{1}{f''(g(s))}$$

$f(x)=e^x+x^2-x-1$에서

$f'(x)=e^x+2x-1$이고,

$f''(x)=e^x+2$이므로

$$g'(s)=\frac{1}{f''(g(s))}=\frac{1}{e^{g(s)}+2}\text{이다.}$$

따라서 $f'(g(s))=s$에서 $g(f'(s))=s$이므로

$$\int_{f'(1)}^{f'(10)}\frac{3\{g(s)\}^2}{e^{g(s)}+2}ds$$

$=\int_{f'(1)}^{f'(10)} 3\{g(s)\}^2 g'(s)ds$

$=\left[\{g(s)\}^3\right]_{f'(1)}^{f'(10)}$

$=\{g(f'(10))\}^3-\{g(f'(1))\}^3$

$=1000-1=999$

22) 240

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r x^{6-2r}$$

x^2항은 $6-2r=2$에서 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_2 2^4(-1)^2=\frac{6\times5}{2\times1}\times16\times1=240$$

23) 5

$f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}+\ln(5x-4)^x=\frac{e^{x-1}}{x}+x\ln(5x-4)$에서

$f'(x)=\frac{e^{x-1}\times x-e^{x-1}}{x^2}+\ln(5x-4)+x\times\frac{5}{5x-4}$이므로

$f'(1)=\frac{1\times1-1}{1}+\ln1+1\times\frac{5}{1}=0+0+5=5$

24) 24

$\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_2(x-6)} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2(x+6)}$ 에서

$3^{-2\log_2(x-6)} > 3^{-\log_2(x+6)}$

$2\log_2(x-6) < \log_2(x+6)$

$(x-6)^2 < (x+6)$

$x^2-13x+30<0$

$(x-3)(x-10)<0$

$3<x<10$ $\cdots\cdots$ ㉠

로그의 진수 조건에 의하여 $x-6>0$이고 $x+6>0$이므로

$x>6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $6<x<10$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 7, 8, 9이므로 모든 정수 x의 값의 합은 $7+8+9=24$이다.

25) 100

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)+g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\{f(x)+g(x)\}dx=1$$

따라서 $p=1$이므로 $100p=100$이다.

26) 417

A가 점수를 얻는 횟수는 $\frac{X}{2}$이고 각 시행마다 점수를 얻을 확률은 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$이다.

B가 점수를 얻는 횟수는 $\frac{Y}{3}$이고 각 시행마다 점수를 얻을 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이다.

확률변수 $\frac{X}{2}$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르고,

확률변수 $\frac{Y}{3}$은 $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}\left(\frac{X}{2}\right)=12$, $\mathrm{V}\left(\frac{X}{2}\right)=3$이고 $\mathrm{E}\left(\frac{Y}{3}\right)=4$, $\mathrm{V}\left(\frac{Y}{3}\right)=3$이다.

$\mathrm{E}(X)=24$, $\mathrm{V}(X)=12$, $\mathrm{E}(Y)=12$, $\mathrm{V}(Y)=27$이고

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$, $\mathrm{E}(Y^2)=\mathrm{V}(Y)+\{\mathrm{E}(Y)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(Y^2)=24^2+12-12^2-27=417$

27) 40

$m-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\frac{1}{2}$을 만족시키는

자연수 m의 값은 a_n이므로 $a_n=m$이다.

$m^2-m+\frac{1}{4}<n<m^2+m+\frac{1}{4}$에서

$m^2-m+1 \le n \le m^2+m$이므로

$a_n=m$인 n의 개수는

$m^2+m-(m^2-m+1)+1=2m$이다.

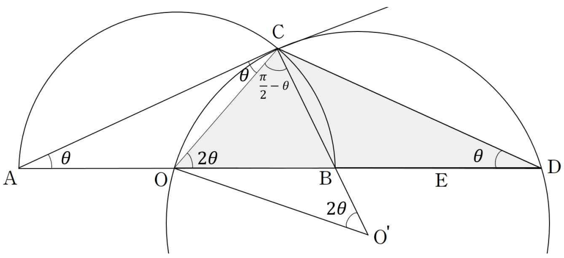
따라서

$$\sum_{k=1}^{420}\frac{1}{a_k}$$

$$=\Big(\underbrace{1+1}_{2\text{개}}\Big)+\Big(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{4\text{개}}\Big)+\cdots+\Big(\underbrace{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}}_{40\text{개}}\Big)$$

$$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{20\text{개}}=2\times20=40$$

28) 3



$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로 $\angle\mathrm{ACO}=\theta$, $\angle\mathrm{COD}=2\theta$이다.

한편 세 점 O, C, D를 지나는 원의 중심을 O$'$이라 하면 직선 AC가 점 C에서 이 원과 접하므로

$\angle\mathrm{ACO}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{OCO}'=\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

삼각형 OCO$'$은 $\overline{\mathrm{OO}'}=\overline{\mathrm{O}'\mathrm{C}}$인 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{OO}'\mathrm{C}=2\theta$

원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle\mathrm{ODC}=\theta$이다.

삼각형 OCD에서

$\overline{\mathrm{OC}}=1$, $\angle\mathrm{COD}=2\theta$, $\angle\mathrm{ODC}=\theta$, $\angle\mathrm{OCD}=\pi-3\theta$이고,

삼각형 ODC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\sin(\angle\mathrm{OCD})}=\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\sin(\angle\mathrm{ODC})}$이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{\sin3\theta}{\sin\theta}$이다.

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OC}}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\sin2\theta=\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{2\sin\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{\theta\times2\sin\theta}=3\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\frac{\sin3\theta}{3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\theta}}\right)$$

$$3\times1\times\frac{1}{1}=3$$

이다.

29) 231

$f(1)=x_1$, $f(2)=x_2$, $f(3)=x_3$, $f(4)=x_4$로 놓으면

$x_1+x_2+x_3+x_4=16$이고, $1 \le x_i \le 7$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$이다.

$x_1+x_2+x_3+x_4=16$을 만족시키는 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_3=\dfrac{15\times14\times13}{3!}=455$이다.

(i) $x_1+x_2+x_3+x_4=16$, $x_1 \ge 8$을 만족시키는 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times7\times6}{3!}=56$이다.

(ii) $x_1+x_2+x_3+x_4=16$, $x_2 \ge 8$을 만족시키는 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times7\times6}{3!}=56$이다.

(iii) $x_1+x_2+x_3+x_4=16$, $x_3 \ge 8$을 만족시키는 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times7\times6}{3!}=56$이다.

(iv) $x_1+x_2+x_3+x_4=16$, $x_4 \ge 8$을 만족시키는 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times7\times6}{3!}=56$이다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 않는 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

$4\times56=224$이다.

따라서 조건을 만족시키는 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는 $455-224=231$이므로

조건을 만족시키는 모든 함수 f의 개수는 231이다.

30) 4

$g'(x)=-f(\cos x)\times\sin x$

$g'(x)=0$에서 $\sin x=0$ 또는 $f(\cos x)=0$이다

① $\sin x=0$

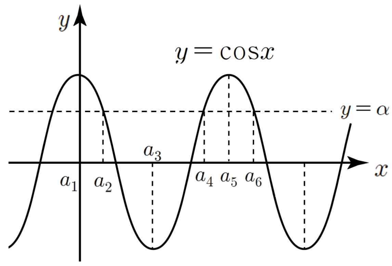
이 방정식을 만족시키는 x의 값은 $x=n\pi$ (n은 자연수)이다.

② $f(\cos x)=0$

이 방정식을 만족시키는 x의 값은

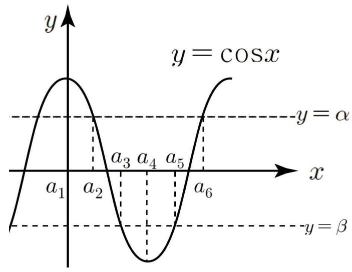
$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\cos x=\alpha$, $\cos x=\beta$를 만족시키는 x의 값이다.

(i) $\alpha=\beta$이거나 α, β 중 하나의 값 α만이 열린구간 $(-1,\ 1)$에 속할 때



위의 그림에서 $\alpha_6-\alpha_2=2\pi$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) α, β $(\beta<\alpha)$가 모두 열린구간 $(-1,\ 1)$에 속할 때



그림과 같이 $f(a_2)=f(a_6)$이므로 $a_6-a_2=\dfrac{3}{2}\pi$가 되기 위해서는

$a_6=\dfrac{7}{4}\pi$, $a_2=\dfrac{1}{4}\pi$, $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $-1<\beta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

즉 $f(x)=6\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(x-\beta)$ $\left(-1<\beta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$이고

조건 (나)에 의하여

$f'(0)=-6\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\beta\right)\le0$에서

$\beta\ge-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\beta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 즉 $f(x)=6x^2-3$일 때,

$g(0)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx$가 최소가 되므로

$m=\displaystyle\int_{-1}^{1}(6x^2-3)dx=4-6=-2$이다.

따라서 $m^2=4$

<출제: 서초 메가스터디학원 의약학전문관 수학과 송영광, 이상훈>