수학 I - 수열

2020.11.25

질상벌

수학 I - 수열

개념과 문제 간의 극간을 줄이자.

※ 수열이 뭐지?

수열은 단순하게 보면 수의 나열이라고 할 수 있다.

그러나 우리가 수학 I 에서 배우는 수열은 규칙성이 있는 수열을 이야기한다.

수열은 나열되는 수에 규칙성이 있고 그 규칙성을 표현하는 것이 일반항이다.

1. 등차수열

첫 항부터 일정한 수를 더해 만들어나가는 수열을 등차수열이라고 한다.

$\underbrace{\text{첫 항부터 일정한 수}}_{\text{등차수열의 모든 것}}$, 일정한 수: 공차

- 등차수열의 일반항 (준비물: 첫 항, 공차)

$$a_n = \underbrace{a}_{\text{첫 항}} + (n-1)\underbrace{d}_{\text{공차}}$$

$(n-1)$: a_1에는 공차가 안 들어가므로

위의 방법이 보통 많이 쓰이는 것 같은데 살짝 다른 방법도 소개하겠다.

$a_n = dn + (a-d)$로 정리하는 것이다.

$a-d$로 뜨게 보려는 $n=1$ 대입하여 맞춘다.

이게 앞의 식과 다른 점은 없지만 등차수열에서 가장 중요한 공차를 편하게 볼 수 있다는 것이다.

ex) 첫 항 = 5, 공차 = 2 인 수열의 일반항을 구하시오

① $a_n = 2n + ?$

② $n=1$을 대입하여 보자

$$a_1 = 2 + ? = 5 \quad , \quad ? = 3$$

$$\boxed{a_n = 2n+3}$$

- 등차중항

a, b, c가 순서대로 등차수열을 이루면 $2b = a+c$이고 b를 등차중항이라고 한다.

중항: 중간에 있는 항

$2b = a+c$: $a \to b$와 $b \to c$에 필요한 수(공차)가 일정하기 때문에

- 등차수열의 합

$$S = \underbrace{\frac{\text{첫 항} + \text{마지막 항}}{2}}_{\text{주어진 수열들의 평균}} \times \underbrace{(\text{항의 개수})}_{\text{개수}}$$

등차수열이기에 평균이라고 할 수 있다.

(수열의 평균 × 개수)로 기억하자.

※ 공차가 0이 아닌 등차수열의 합 S_n은 n에 대한 이차식이다. (상수항 X)

↳ 문제에서 준 S_n이 상수항이 없는 이차식이라면 등차수열을 떠올리자.

2. 등비수열

첫 항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열이다.

$\underbrace{\text{첫 항부터 차례로 일정한 수}}_{\text{등비수열의 모든 것}}$, 일정한 수: 공비

- 등비수열의 일반항

$$a_n = \underbrace{a}_{\text{첫 항}} \cdot \underbrace{r}_{\text{공비}}^{n-1}$$

$n-1$: a_1은 공비가 없으므로

등비수열의 일반항은 이런 식으로 쓰는 것이 가장 좋다.

- 등비중항

a, b, c가 순서대로 등비수열을 이루면 $b^2 = ac$이고 b를 등비중항이라고 한다.

중항: 중간에 있는 항

$b^2 = ac$: $a \to b$와 $b \to c$에 필요한 수(공비)가 일정하기에

- 등비수열의 합

r(공비) $\neq 1$ 일 때
$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
편하게 선택

$\underbrace{r\text{(공비)} = 1}_{\text{같은 수가 반복}}$ 일 때 $S_n = n \cdot a$

3. 합의 기호 Σ

수열의 합을 쉽게 나타내기 위해 Σ(시그마)를 도입한다.

$\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k}$ 와 같이 사용한다.

뒤에 나오는 적분 기호 쓰는 것과 비슷

∘ Σ의 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n} c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k$

③ $\sum_{k=1}^{n} \underbrace{c}_{\text{k에 대한 식 X}} = c+c+\cdots+c = c\cdot n$

∘ 자연수의 거듭제곱의 합 → 이건 무조건 알고 시험장 갑시다 제발...

① $\sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{\text{등차수열의 합?}} = \underbrace{\frac{1+n}{2}}_{\text{평균}}\cdot\underbrace{n}_{\text{개수}}$

$= \frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

+1 ×2+1

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

∘ 간단해지는 수열의 합

① 일반항에서 반복되는 것이 있는 경우 $(a_n - a_{n+m})$

수열에서는 이와 같이 중간이 사라지는 경우가 꽤 있다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_1-\cancel{a_2})+(\cancel{a_2}-\cancel{a_3})+\cdots+(\cancel{a_n}-a_{n+1})$

$= a_1 - a_{n+1}$

② 부분분수의 형태 → 결국 ①번으로 귀결

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ 을 활용하여 ①번처럼

고1 때 배움

중간을 사라지게 만든다.

수열에서 두 식의 곱의 차이가 상수항만 있다면 의심해보자.

※ 자주 쓰는 FACT

∘ S_n에 대한 식을 주었을 때

$\underbrace{S_n}_{a_1\sim a_n} - \underbrace{S_{n-1}}_{a_1\sim a_{n-1}} = a_n$ 으로 일반항을 구할 수 있다.

> 수열은 규칙성이 중요한 단원이므로 반복에 집중하자.
> +
> 수열이라는 단원은 어느 정도의 노가다가 필요하다.
> 헷갈리다 싶으면 빠르게 직접 해보자.

〈 한 번 더 풀어봅시다 〉

14. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

첫 항을 줬네

3n-1, 3n, 3n+1이면 이어진 세 수네?

$$\begin{cases} a_{3n-1} = 2a_n + 1 \\ a_{3n} = -a_n + 2 \\ a_{3n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11} + a_{12} + a_{13}$의 값은? [4점]

물어보는 거도 3개 연속이네.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2021. 06. 14

구해야하는 $a_{11}+a_{12}+a_{13}$이 이어진 세 수이고 문제 조건도 이어진 세 수열을 주었으므로 다 더해보자.

$$a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1} = (2a_n+1)+(-a_n+2)+(a_n+1)$$
$$= 2a_n+4$$

우리가 구해야 하는 $a_{11}+a_{12}+a_{13}$을 구하기 위해서는 $n=4$를 대입해야 한다.

$$a_{12-1}+a_{12}+a_{12+1} = a_{11}+a_{12}+a_{13} = 2a_4+4$$

$a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값을 구하기 위해서는 a_4가 필요하네

a_4는 a_1을 알기에 $a_{3n+1}=a_n+1$에 $n=1$을 대입하면 되겠다.

$$a_4 = a_1+1 = 1+1 = 2$$

$$a_{11}+a_{12}+a_{13} = 2a_4+4 = 2\cdot 2+4 = 4+4 = 8$$

답: 8

18. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값은? [4점]

등차수열이 중요 정보

$a_1 \sim a_k$ $a_1 \sim a_{k+2}$

흠.. 너무 준 조건이 부족하지 않나?

↳ 그걸리가 없음

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2021.06 (나)

중요한 식은 $S_k=-16$ 과 $S_{k+2}=-12$ 로 보인다. → 왜? 진짜 없어... → 그렇다면 S_k와 S_{k+2}를 비교해보자 (빼서)

$$\begin{array}{rl} & S_{k+2}=a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}=-12 \\ - & S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k \qquad\qquad\qquad =-16 \\ \hline & a_{k+1}+a_{k+2}=4 \end{array}$$

↳ 우리가 아는 정보는 공차가 2라는 것뿐...

→ 그러면 a_{k+1}과 a_{k+2}의 차이는 2이네.

차이가 2이면서 더하면 4? → 1과 3!

($k+(k+2)=4$ → $k=1$)

$a_{k+1}=1$ 이고 $a_{k+2}=3$ 인 것은 찾았으나 답인 a_{2k}를 찾으려면 k가 필요하다.

그나마 준 조건 중 $S_{k+2}=-12$을 활용해보자.

-12 a_k a_{k+1} a_{k+2}

$-7 \quad -5 \quad -3 \quad -1 \quad 1 \quad 3$

16

수를 나열해보니 -7부터 -1까지의 합이 $-16=S_k$ 이므로 $-7=a_1$ 이고 $k=4$이다.

수열 a_n의 첫항은 -7이고 공차는 2이므로

$$a_n=2n-9$$

$$a_{2k}=a_8=2\cdot 8-9=16-9=7$$

$\boxed{\text{답}:7}$

〈 한 번 더 풀어봅시다 〉

27. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

첫항, 공비!

모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1}$$

S_n 계열의 식

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

2021 . 09 (가)

우리가 S_n의 식이 주어지면 $S_n - S_{n-1} = a_n$을 통해 일반항을 구했듯이 $S_{n+3} - S_n$을 활용해야 한다.

$\underbrace{S_{n+3}}_{a_1+\cdots+a_{n+3}} - \underbrace{S_n}_{a_1+\cdots+a_n} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ 이고 a_4가 궁금하니까 $n=1$을 대입해보자.

$$S_4 - S_1 = a_2 + a_3 + a_4 = 13 \times 3^{1-1} = 13$$

a_n 이 등비수열이기에 공비가 중요하고 그렇기에 $n=2$로 대입하여 공비를 알아보자.

$$S_5 - S_2 = a_3 + a_4 + a_5 = 13 \times 3^{2-1} = 39$$

$$\begin{cases} S_4 - S_1 = a_2 + a_3 + a_4 = 13 \times 3^{1-1} = ar + ar^2 + ar^3 = ar(1+r+r^2) = 13 \\ S_5 - S_2 = a_3 + a_4 + a_5 = 13 \times 3^{2-1} = ar^2 + ar^3 + ar^4 = ar \cdot r \cdot (1+r+r^2) = 39 \end{cases}$$

$r=3$

공비!

공비가 3이고 이어진 세 항의 합이 13이려면

1	3	9	
a_2	a_3	a_4	가 되어야 한다.

그러므로 $a_4 = 9$

$\boxed{\text{답} : 9}$

〈 한 번 더 풀어봅시다 〉