수학Ⅱ - 미분법

2020.11.22

설상범

수학Ⅱ - 미분법

함수의 연속

함수의 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 세 가지 조건이 필요하다. ↳ 함수값이 있어야 한다.

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

② 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재해야 한다

↳ 좌극한 = 우극한

③ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ⇒ 극한값 = 함수값.

①~③ 중 단 하나라도 빠지면 불연속이다.

정의가 앞으로 고난도 문제를 해결해 나가는데 있어 굉장히 중요하다. 그러므로 기억해주도록 합시다.

구간

이제는 구간을 표시하는데 있어 새로운 체계를 사용한다.

• 기존에 사용하던 기호

$a \le x \le b$　　$a < x < b$　　$a \le x < b$　　$a < x \le b$

• 새로 사용할 기호

$[a, b]$　　(a, b)　　$[a, b)$　　$(a, b]$

이를 일반화하면　$\le$ = [(닫혔다)　$<$ = ((열렸다)

등호가 있으면 각이 많음　　등호 없으면 그냥 괄호

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이라면 두 개의 함수로 사칙연산한 모든 식은 $x=a$에서 연속이다.

ex) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$

분모는 0이면 안돼.

※ 구간에서의 최대·최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이라면 $f(x)$는 반드시 구간 $[a, b]$에서 최대, 최솟값을 가진다.

자세히 따지기 보다는 그렇구나! 하고 넘어갑시다.

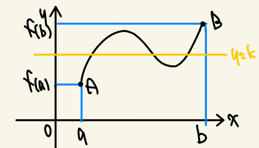
사잇값 정리

주로 보기 문제 혹은 문제를 이해해 나갈때 쓰인다.

정의: 함수 $f(x)$가 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

왜?! 왜 나는 글만 읽히고 이해가 안되는거죠?

그래프로 보죠.



k는 $f(a) < k < f(b)$인 수이고 점 A에서 출발하여 점 B에 도착하려면 $y=k$를 무조건 지나야한다.

미분계수와 도함수

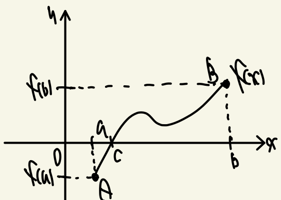
그렇다면 사잇값 정리는 어떻게 활용하나?

∘ 함수 $f(x)$가 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\cdot f(b)<0$ 이면

$f(c)=0$ 인 c가 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

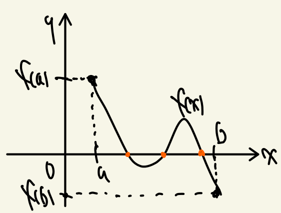
↓ 왜?

우선 $f(a)\cdot f(b)<0$ 이라는 것은 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르다는 것을 의미한다. $f(a)<0$, $f(b)>0$ 라고 생각하고 그래프를 그리면 아래와 같다.



점 A에서 점 B로 가려면 무조건 x축을 지나야하고 그때 x축이 만나는 점의 x좌표가 c라고 하면 $f(c)=0$ 이다.

그렇다면 $f(a)>0$, $f(b)<0$ 인 경우로 볼까?



이 역시도 동일하다....

평균변화율과 미분계수

→ 둘 다 기울기인데 차이가 무엇일까?

1. 평균변화율 우리가 알던 기울기

여러 서적에 정의가 있으므로 쉽게 말하면 구간 양 끝점 간의 기울기이다.

$$\text{평균변화율} = \frac{\Delta y\,(y\text{의 변화량})}{\Delta x\,(x\text{의 변화량})} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이게 기울기 식이니.

조금 다른 관점에서 보면 Δx(x의 변화량)에 대한 Δy(y의 변화량)의 비율로 바꿔볼 수 있다.

2. 미분계수 = 순간 기울기 = 평균변화율의 극한값

평균변화율의 식 $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 에서 Δx를 0으로 극한을 보낸 것이 미분계수이다.

평균변화율의 극한값이라고 할 수 있고 x의 차이가 거의 없는 두 점 사이의 기울기이므로 순간 기울기라고 보면 된다.

↳ 그래서 '순간변화율'이라고도 한다.

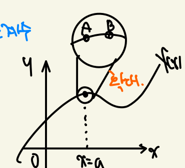
제가 지은 이름

그리고 이 값을 $f'(a)$라고 한다.

$f(x)$ 위 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

그림으로 보면?



그림에서의 $\overline{AB}$의 기울기와 같다.

※ 미분계수 FORMAT 맞추기

개념은 이해하였더라도 문제에서 나오는 식은 다른 느낌을 준다.

예를 들자면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-1}{h}=3$ 일때 $f(2)\times f'(2)$를 구하시오.

(출처 : 2020수특 수Ⅱ p.13)

이런 식을 해석하는 나름의 방법을 소개하겠다.

① h의 계수를 맞추자.

이 방법은 분자에 투입되는 x값들의 차이와 분모가 같아야 한 세트라는 것

$f'(a)$

ex) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$ 차이가 $2h$ 너도 $2h$이어야 한세트 $= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2 = f'(1)\cdot 2$

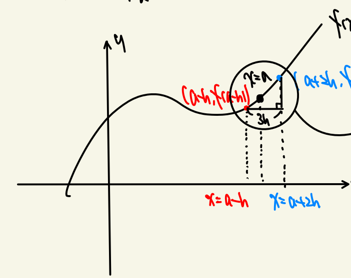
식을 맞추기 위해

x값에 미지수가 둘 다 있어도 방법은 동일하다.

ex) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+4h)-f(1-2h)}{2h}$ 차이가 $6h$ 맞추자 $= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+4h)-f(1-2h)}{6h}\cdot 3 = 3\cdot f'(1)$

식을 맞추기 위해

• 원리가 무엇인가요?



분모와 x값들의 차이가 같아야 기울기의 식이다.

② 로피탈 정리 (이라는 사용금지, 혼자는 킬러에서만 가져 / N·코·삼 미분하면 GG / 킬러는 다른 것을 원할 것.)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

극한값은 분자, 분모 미분해도 같다,

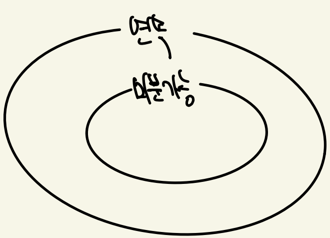
그냥 대입하였을 때 $\frac{0}{0}$ 꼴이면 각각 미분해서 처리하자.

미분가능과 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 좌미분계수 = 우미분계수 이면 $x=a$에서 '미분가능'하다고 한다.

$x=a$에서 $f(x)$가 미분가능하다면 $f'(a)$가 존재한다.

미분가능하려면 연속이 전제되어야 하므로 포함관계는 다음과 같다.



도함수와 미분법

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능할 때 새로운 함수

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 를 $f(x)$의 도함수라고 하고

$f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$ 등 여러 방식으로 나타낸다.

도대체 도함수와 미분계수는 뭐가 다른건가?

↳ 도함수는 미분계수를 도출할 수 있는 함수로서의 개념이고

미분계수는 한 점에서의 기울기, 즉 수로서의 개념이다.

※ 이계도함수

이계도함수는 도함수의 도함수이고 $f''(x)$로 나타낸다

함수 그래프의 오목, 볼록을 따지는데 쓰이고 변곡점을 찾을 때도 쓴다.

$f''(x)=0$ 이 되게 하는 좌표

$f(x)$의 기울기의 최대 or 최소

도함수의 활용

접선의 방정식 — 접점 중요'.

① 함수와 접점을 주는 경우.

함수 $f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선을 물어볼 것이다.

직선을 정의하기 위해서는 기울기와 한 점이 필요하다.

$(a, f(a))$라는 한 점을 주었고 점 $(a, f(a))$에서의 기울기는 미분계수이므로 $f'(a)$

접선의 방정식을 쓰면

$$\boxed{\begin{aligned} y-f(a)&=f'(a)(x-a)\\ y&=f'(a)(x-a)+f(a)\end{aligned}}$$

이와 같이 정리할 수 있다.

ex) Q. $f(x)=x^2-2x$ 위의 $(3,3)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

A. 우선 $(3,3)$은 $f(x)$ 위의 점이다. ⇒ $f(3)=3^2-2\cdot3=3$

$f(x)$의 $(3,3)$에서의 미분계수를 구해보자. $f'(3)$

$f'(x)=2x-2$ $\quad f'(3)=2\cdot3-2=6-2=4$.

기울기는 4이고 $(3,3)$을 지나는 직선이므로

$y=4(x-3)+3=4x-12+3=4x-9$.

$\boxed{\text{답: } y=4x-9}$

② 접선의 기울기를 주는 경우.

이런 경우는 함수와 접선의 기울기만 준다.

직선을 정의하기 위해서는 한 점 + 기울기 이므로

한 점만 구해주면 된다. 왜냐? 준 기울기로.

예시로 보자.

ex) Q. $f(x) = -x^2+4x$ 위의 한 점에서의 기울기가

2인 직선을 구하시오.

A. 우선 도함수 $f'(x) = -2x+4 = 2$ 인 x를 찾자.

$-2x+4=2 \rightarrow x=1$

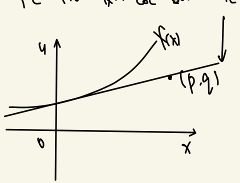
x좌표가 1이면 y좌표는 $f(1)=3$ 이다. $\Rightarrow$ 점 $(1,3)$을 지난다.

기울기가 2이고 $(1,3)$을 지나는 직선이므로

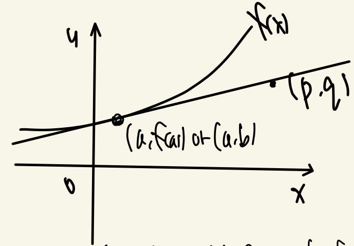
$y = 2(x-1)+3 = 2x+1$

$\boxed{\text{답: } y=2x+1}$

③ 곡선 위에 있지 않은 점에서 곡선에 그은 접선.



(p,q)를 지나고 $f(x)$에 접하는 직선을 구하는 방법이다.



이럴 때는 그림을 그려놓고 접점을 $(a, f(a))$ 또는 (a,b)와 같이 두자. (설명은 $(a,f(a))$로 할게요).

접선은 직선이기에 $(a,f(a))$에서의 미분계수인 $f'(a)$와 (p,q), $(a,f(a))$ 사이의 기울기가 같아야 된다.

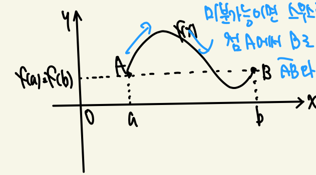
$$\underbrace{f'(a)}_{x=a\text{에서의 미분계수}} = \frac{q-f(a)}{\underbrace{p-a}_{(p,q)\text{와 }(a,f(a))\text{간의 기울기.}}}$$

이 식을 풀어서 접점의 좌표를 알아내고 기울기를 구하여 해결한다.

평균값 정리

(1) 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$ 이면 $f'(c)=0$ 인 c가 (a,b)에 적어도 하나 존재.



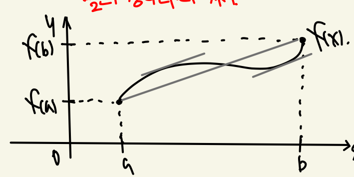
미분가능이면 스무스하게 흘러야함 점 A에서 B로 갈 때 무조건 $\overline{AB}$와 x축에 평행한 ... 만난다.

(2) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 인 c가 (a,b)에 적어도 하나 존재.

롤의 정리와의 차이



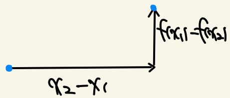
조금 쉽게 정리하면 양끝 점 간의 기울기와 미분계수가 같은 점이 최소 1개는 존재한다.

함수의 증가, 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

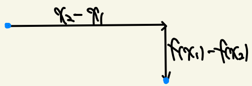
① $x_1 < x_2$ 일때, $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 $f(x)$는 증가.

x가 증가할때 $f(x)$도 증가하면



② $x_1 < x_2$ 일때, $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 $f(x)$는 감소

x가 증가할때 $f(x)$가 감소하면



함수의 극대·극소

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간의 모든 x에 대해

$f(x) \le f(a)$ 이면

$f(x)$는 $x=a$에서 극대 라고 한다.

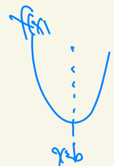
쉽게 예시로 보면

$f(a)$가 근처에서 가장 크므로 극대.

> 정리: 근처에서 가장 크면 극대.
> ↳ 명확한 기준은 없다.

함수 $f(x)$에서 $x=b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$f(x) \ge f(b)$ 이면 $f(x)$는 $x=b$에서 극소 라고 한다.



$f(b)$는 근처에서 가장 작으므로 극소이다.

> 정리: 근처에서 가장 작으면 극소.
> ↳ 명확한 기준은 없다.

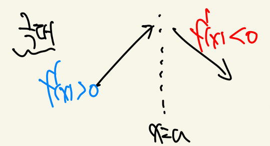
극값과 미분계수

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.

⇒ $f(x)$가 $x=a$에서 극대 극소면 $f'(a)=0$ 이다.

극대와 극소의 판별

극대



⇒ 앞 뒤의 도함수 값을 보고 구별한다.

극소

∘ 극대, 극소 와 최대·최소는 다른가?

A. 최대·최소는 '가장'의 의미가 크고 극대·극소는 '근처에서' 라는 의미가 크다.

∘ 치환이 가능한가?

A. 최대·최소는 그저 '값'이므로 치환해서 구해도 되지만 극대·극소는 그래프의 성질이므로 치환해서 구하면 X

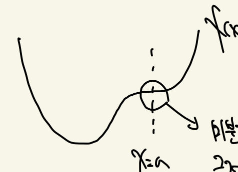
※ 극점이면 미분계수가 0인가? (YES)

극대, 극소인 점

미분계수가 0이면 극점인가? (NO) 왜? → 변곡점...

극대, 극소인 점

ex)



미분계수의 부호는 바뀌지 않으므로 극점 X 그러나 미분계수 = 0

도함수를 활용하여 그래프 그리기

함수의 식을 주면 극점을 찾아서 그래프를 그릴 수 있다.

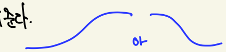
① 주어진 함수를 미분하여 도함수를 만든다

② 도함수 = 0 이 되는 x값을 구한다

극점 or 변곡점

③ x 값들이 극점인지 변곡점인지 체크하고 좌표에 점을 찍어준다.

④ 점들을 스무스하게 이어준다.



설명만 보면 이해가 안되니 예시를 보겠습니다.

ex) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 의 그래프를 그려보세요

① $f'(x) = 3x^2 - 3$

② $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ 이 되는 x값은 $-1, 1$ 이다.

③ $x=-1$ 근처에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 극값(극대)

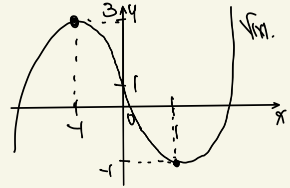
$x=-1$

$(-1, 3)$ 이다

$x=1$ 근처에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 극값(극소)

$x=1$

$(1, -1)$ 이다.



ex) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3$ 의 그래프를 그려보세요.

① $f'(x) = x^3 - 4x^2$

② $f'(x) = x^3 - 4x^2 = 0$　$x=0$ or 4

③ $x=0$ 에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점.

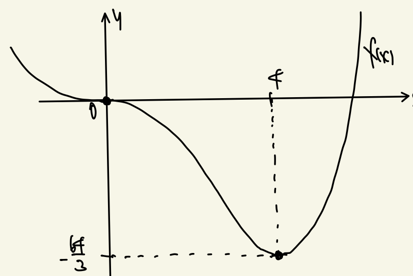
$x=0$

$(0, 0)$ 이다

$x=4$ 에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 극점(극소)

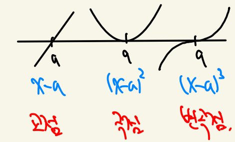
$x=4$

$(4, -\frac{64}{3})$



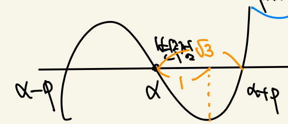
3. 4차함수 그래프와 비율관계

그래프만 보고 인수 개수 정하기

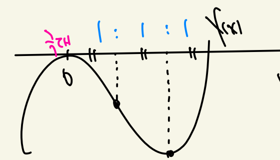


• 3차함수 → 기본적으로 변곡점에 대해 점대칭

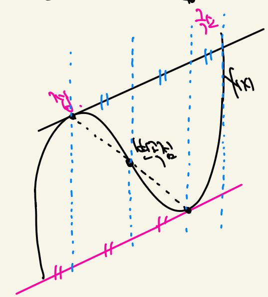
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



$f(x)=0$ 의 세 근의 합 : $\alpha - p + \alpha + \alpha + p = 3\alpha = -\frac{b}{a}$

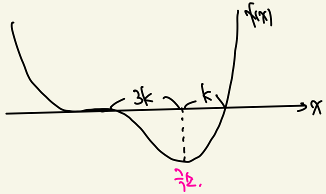


x축이 아니라 다른 직선이어도 OKAY.



• 4차함수

여러가지의 개형이 존재한다. 그 개형들 중 특이한 친구들을 보자.



그 외에 4차함수에서 주의해야 하는 것은 변곡점의 유무이다.

속도와 가속도

1. 수직선 위에서 움직일때

점 P가 시각 t일때 위치 $x = f(t)$라고 할때.

시각 t에서의 순간적인 속도 v는

속도 = $\dfrac{\text{위치 변화}}{\text{시간 변화}}$

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

t에 대해 x를 미분한다.

1번 미분 후 시간 t 대입.

그렇다면 가속도? a

가속도 = $\dfrac{\text{속도 변화}}{\text{시간 변화}}$

$$a = \frac{dv}{dt} = f''(t)$$

속도

2번 미분 후 시간 t 대입.

정리

$$\underset{f(t)}{\text{위치}} \xrightarrow{\text{미분}} \underset{f'(t)}{\text{속도}} \xrightarrow{\text{미분}} \underset{f''(t)}{\text{가속도}}$$

② 좌표평면에서의 속도, 가속도

수직선에서는 x만 있지만 좌표'평면'에는 y도 있기에 각각 처리해주면 된다.

$$\underset{(f(t),\, g(t))}{\text{좌표}} \xrightarrow{\text{각각 미분}} \underset{(f'(t),\, g'(t))}{\text{속도}} \xrightarrow{\text{각각 미분}} \underset{(f''(t),\, g''(t))}{\text{가속도}}$$

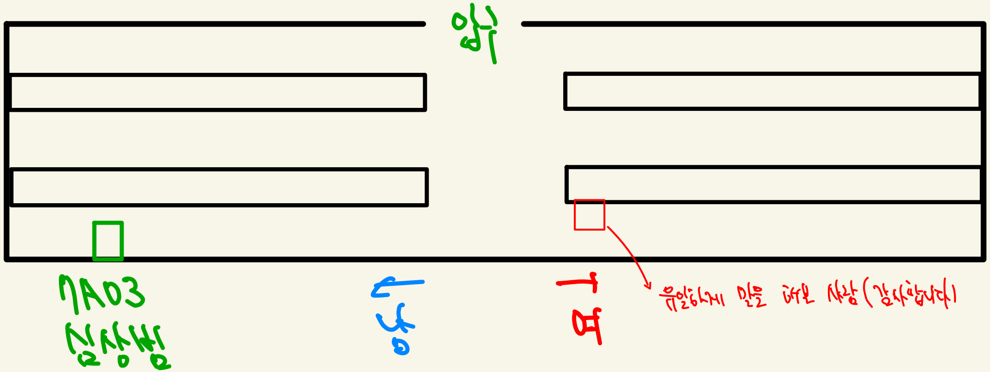
필자는 2019년에 대치 러셀 7층(최하위반)에서 재수를 했다.

등원은 아침 8시까지 해야했고 그 이유로 아침 7시 50분의 학원 1층은 매일 붐볐다. 나는 아버지가 회사 가시는 길에 내려주시면 아침 6시 50분에 도착하여 하루를 진라면과 함께 했다.

전자레인지에 돌려먹으면 꿀판왕

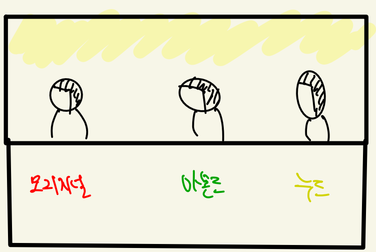
2020학년도 수능은 11/14로 기억하는데 11/11 빼빼로 데이에 있던 일이다.

몇몇 사람들은 연애를 하거나 썸을 타는 동안 재수생 아싸인 본인은 학원을 1년간 다니면서 자습실에서 오르비를 하다 걸리거나 다른 학생들이 제빙기 순서 양보할 때를 제외하고는 입을 열지 않았다.



교실의 배치는 아래와 같았다.

보통 아침 6시 50분 근처에 가면 아무도 오지 않아 내가 불을 켜고 출석에서조차 1등이 되었다. 그러나 그 날은 달랐다. 불은 환하게 켜져있었고 수많은 머리통이 창을 통해 보였다.



그 모습을 보며 공부를 덜한 자신에게 화가 났다. 남들은 더 빨리와서 하는데....

나는 공부에 재능도 없는데 노력도 안했구나.

자습실을 들어서서 본 광경은 상당수의 남학생들만 와서 공부를 하는 척하며 눈치를 보는 장면이었다.

그 모습을 보고는 내가 그나마 열심히 산다는 것을 느꼈고 편의점에 가서 빼빼로를 내 돈주고 사먹었다.