2021 EBS 수능완성 선별 20 . 11 Ver.

제작 : 김기대 T

<안내사항>

1. EBS는 최근 체감연계율이 매우 높아졌기 때문에, 전문항 1회독 후 선별문항 2회독 이상 하길 추천합니다.

2. 본 파일은 EBS를 한 번도 보지 않은 학생들을 기준으로 선별되었습니다.
따라서 EBS를 전문항 1회독을 한 학생들은 별표 (중요도)가 3개 이상인 문제들만 보아도 좋습니다.

<중요도 관련 안내>

※ 문항의 절대적 난이도와 중요도는 상관관계가 없습니다.
3점짜리 쉬운 문제여도 신박한 표현이나 완성도 높은 문항은 上등급,
4점짜리 매우 어려운 문제여도 수능스럽지 않은 문항은 下등급을 부여했습니다.

※ 선별 기준 및 별표 등급 안내
선별 기준: 타 교재에서 흔히 볼 수 있고 쉬운 문제는 선별에서 제외, 흔한 문제지만 중요한 문제는 선별.

★등급, ★★등급)
수능 연계 가능성이 적거나 흔한 문제.

★★★등급)
적절한 변형을 가하면 수능 연계 가능성이 약간 보이는 문항, 시중 퀄리티를 보이는 문항

★★★★등급)
적절한 변형을 가하면 수능 연계 가능성이 꽤 높아보이는 문항

★★★★★등급)
자체적으로 완성형인 문제. (=탈 EBS 퀄리티 문항)
오히려 이 완결성 때문에 직접연계가 아닌 간접연계가 돼야하는 아이러니함을 가진 문제.

<주의사항>

1. 본 파일은 수작업한 파일이므로, 간단한 오타와 순서 뒤틀림 등이 있을 수 있습니다.
정오사항을 말씀해주시면 신속히 공지하겠습니다. (Comment에서의 문법적인 오타도 있지만, 작업량이 너무 많아 적당한 건 넘어갔습니다. 맏춤뻡이 아시운 브븐이 이써도 바주도록 하쟈.)

2. 문항을 제외한 *Comment에 대한 인용* 은 저자 외에 불허합니다.

<자료 활용법>

7. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d=8$
(나) a는 홀수이다.
(다) $c \geq d$

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

중요도	★★★★★	쪽번	028 001	문항코드	20009-0051

기대T Comment

전형적으로 '출제자'와 '해설자'가 달라서 생긴, 문제의 가치를 교재 스스로가 깎아버린 아쉬운 문제이다.
해설지대로 풀면 절대 1등급의 눈을 가졌다고 자부할 수 없다. 이번 10월 교육청에서도 나온, 대칭성을 적극적으로 활용할 수 있어야한다.

(가), (나)는 전제조건이라고 하자. $c>d$인 경우의 수와 $c<d$인 경우의 수는 같기 때문에, 전체 경우의 수에서 $c=d$인 경우의 수를 빼고 반띵을 하면 구할 수 있다. 따라서 전체 경우의 수를 m 이라 하고 $c=d$인 경우의 수를 n 이라고 하면, 정답은 $\frac{m-n}{2}+n=\frac{m+n}{2}$ 이다.

이것만큼은 반드시 이해하고 들어가자. 최근 3개년간 확통에서의 대칭성이 많이 쓰였다. (대부분 풀이들이 논리 없이 '이렇게 하면 정답 나오니까 알아둬라~'라고 푼 풀이들이라 수학전공자로써 안타깝ㅠㅠ)

이번 가형 10월 교육청 29번에서도 비슷한 논리가 쓰였는데, 다음 페이지 칼럼에서 대칭성 꽉 잡고 가기로 하자.

<확률과 통계 칼럼 - 대칭성>

본 칼럼은 내년에 출판될 기대T의 실전개념서에 들어가는 내용으로 함부로 훔쳐 쓰면 큰일나요 ^-^

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a<b<c \leq 20$
(나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

위 문제는 이번 10월 교육청 가형 29번에 있는 문제이다.
나형에는 다른 문제가 대체되어 나왔으므로 문과 친구들은 읽기 전에 풀어보도록 하고, 이 문제를 풀어본 이과 친구들 역시 다시 한 번 풀어보도록 하자. 내 생각엔 10명 중 8명은 비효율적인 방법으로 풀었을 것이라 생각하고, 효율적인 방법을 찾은 나머지 2명 마저도 이 중 1명은 논리가 빈약할 것이라 생각한다.

자, 그럼 풀이 스타트!

(가)에 의하여 a, b, c는 20이하의 자연수이다.
또한 (가), (나)에 의하여 $a<b<c<a+b$ 이다. (삼각형의 결정조건 물론 $a<b+c$, $b<c+a$도 만족시켜야하지만, (가)의 조건식 때문에 쉽게 만족시킴을 알 수 있다.)

여기서 주목할 식은 $c<a+b$이다. 이 식을 포함하여, 비슷한 식 3개를 써 보겠다.
① $a<b<c$ 이면서 $c<a+b$
② $a<b<c$ 이면서 $c>a+b$
③ $a<b<c$ 이면서 $c=a+b$

우오오오오오오! ①, ②가 부등식 방향만 다르니까 대칭적이에오오오오오!

... 그렇다. 그렇게 하면 정답은 나온다.
근데, 이렇게 풀면 논리부족이다. 왜냐면 ①~③ 의 조건 말고도 $a<b<c$의 조건이 있기 때문이다.

직관적으로 생각해보면, c보다 작은 a, b를 더한 $a+b$란 값은 c보다 클 확률보다는 작을 확률이 좀 더 높아보이는게 일반적인 직관이다. (아니면 그 반대거나.)

적어도 $a+b<c$인 경우와 $a+b>c$인 경우가 정확히 같을 것이라고 손목을 걸만한 직관을 가진 사람은 없을거라 생각한다.

1. 1쪽에 보통 2문제씩 문제들이 있고, 하단에 해당 문제에 대한 Comment가 있습니다.
위 문항을 직접 푼 후 읽는 것이 좋습니다.

2. 우측단에 있는 내용처럼 문항에 관련된 칼럼이나 자작문제가 실릴 때가 있습니다.
해당 칼럼/자작문제 역시 EBS 본문항을 푼 후 보시는걸 추천드립니다.

3. 배점표시 ([2점] [3점] [4점])는 무시해주시면 됩니다.

<수능 후 이과 수리논술 Final 개강안내 - 대치오르비>

자세한 수업시간은 아래 QR코드로 확인 가능합니다.

1주차 (Basic, 한양, 건국, 동국, 과기대)	2주차 (연세, 광운+세종,중앙,이대,아주,에리카)	3주차 (인하대)

개강학교 (ㄱㄴㄷ순)	회차* (기간)	수업일	수업소개 / 마감주의알림 (작년 마감속도 기준)
논술 Basic	1회 (1일)	3(수능 당일) 저녁	- 논술을 본격적으로 준비한 기간이 4개월 이하인 학생들은 수강 강력 추천! - *작년 기준 빠른 마감, 수능 전 등록 추천*
건국대	2회 (1일)	4(금) 점심+저녁	- 아주대와 약간 다른 수학적 자료해석형. 덕분에 충분히 도전해볼만한 난이도. - 당일 집중 특강으로 건국대 스타일 파악? 핵가능!
동국대	1회 (1일)	5(토) 점심	- 독보적 출제 스타일을 가진 학교. 이에 당황하지 않도록 동국대 유형에 필수인 '수학적 모델링 전략'을 제시
광운대 & 세종대	4회 (4일)	8(화) 아침 + 9(수)~11(금) 점심	- 광운대의 제시문이 더 친절하다는 점을 제외하고, 많은 점이 닮은 두 학교. 과목별 패턴분석으로 효율적 정복 가능! - *작년 기준 빠른 접수. 수능 전 예약/등록 추천*
연세대	4회 (2일)	6(일) 저녁 + 7(월) 아침+점심+저녁	- 쉬워지는 과학논술, 수리논술 고득점은 필수! - 예상모의고사로 최근 3년간 급변하고 있는 연대 수리논술 경향을 간접경험 - *올해 최대 응시자수! 빠른 마감 예상. 수능 전 등록 추천*
에리카	3회 (1일)	13(일) 아침+점심+저녁	- 본캠 시험출제에 영감을 주는 분캠이 있다?? 우수한 출제력, 그 때문에 지원자들에겐 버거운 난이도ㅠ *Final 수강 추천*
아주대	3회 (1일)	12(토) 아침+점심+저녁	- 까다로운 자료해석형 시험출제경향. 이를 아는 것과 모르는 것의 차이가 체감난이도로 직결되는 학교!
이화여대	3회 (1일)	9(수)~11(금) 아침	- 문제는 어려우나 합격자 점수를 보면 '해볼만한데?'란 생각이 드는 학교. - 타학교보다 감점에 신경 써야하는 특수성이 있는 학교. 꼼꼼한 첨삭 제공!
인하대	6회 (6일)	14(월)~19(토) ① 점심반 ② 저녁반	- 인하대 논술이 한양대보다 어렵다고? 그래, 어려운 시험이지.. 떨어지기 어려운 시험! 인하대의 특성을 아는 순간, 체감 난이도는 급하강 - 기대T의 시그니쳐 수리논술 Final로, 모든 Final 중 수업 후 만족도가 제일 높은 수업** *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
서울 과기대	3회 (2일)	5(토) 저녁 + 6(일) 아침+점심	- 지원자 실력 대비 어렵게 출제하는 과기대는, 중앙대와 달리 살짝 선 넘을 필요가 있다. 그 선, 내가 제시해줄게.
중앙대	4회 (4일)	8(월) ~ 11(목) 저녁	- 수능 전에 굳이 하지 마라. 중앙대는 Final로 충분히 준비되는 학교니까. - 과유불급! 합격의 선을 정확히, 과하지 않게 제시하는 수업 *Final 수강 추천*
한양대	4회 (1일)	4(금) 아침+점심+ 점저+저녁	- 작년보다 빨라진 한양대의 논술시계 ㅠㅠ 예상모의고사 4회분으로 실력 점검하고 역대 우수기출 총정리된 자습자료로 빠르게 한양대 스타일 흡수! - *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
한양대 (의예과)	1회 (일)	5(토) 점심	- 다른 학원 한양의대 Final 수업내용과 겹치지 않아 중복수강할 수 있음. - 고난도 모의고사 2회분으로 자신의 실력을 한번 더 체크해볼 수 있는 기회

* : 회차가 구분된 수업은 모두 '다른 수업'입니다. 내용이 같은 수업은 인하대 점심반/저녁반 이외에 없습니다.

** : 수업 후 설문조사 결과 97.64%가 수업/첨삭 '모두 만족' 답변 ('모두 불만족' 응답률 0%))

제 2 교시 수능완성 가형 - 미적분 홀수형

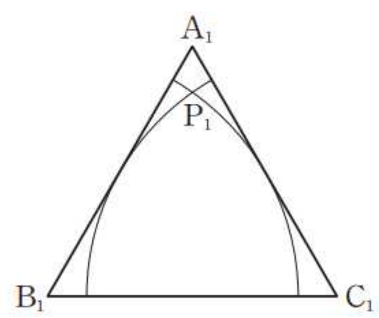
1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)\left(\frac{x+1}{3}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

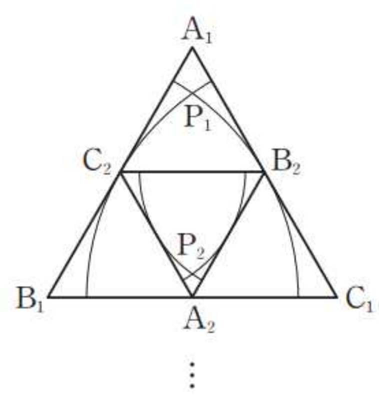
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

중요도	★★	쪽 번	064 028	문항코드	20050-0162

기대T Comment
준비됐어, 듄? 준비됐어. 대. 수능완성 미적 선별 시작! 공비 확인 ! 범위 확인 ! 응 정답 아니야! 등비급수의 수렴에는 첫 번째항도 영향을 끼친다는 사실을 간만에 리마인드 할 것

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$에서 점 B_1을 중심으로 하고 직선 A_1C_1에 접하는 원과 점 C_1을 중심으로 하고 직선 A_1B_1에 접하는 원과의 교점 중 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부에 있는 점을 P_1이라 하자. 세 선분 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2라 할 때, 정삼각형 $A_2B_2C_2$에서 점 B_2를 중심으로 하고 직선 A_2C_2에 접하는 원과 점 C_2를 중심으로 하고 직선 A_2B_2에 접하는 원과의 교점 중 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에 있는 점을 P_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 구한 선분 A_nP_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [3점]



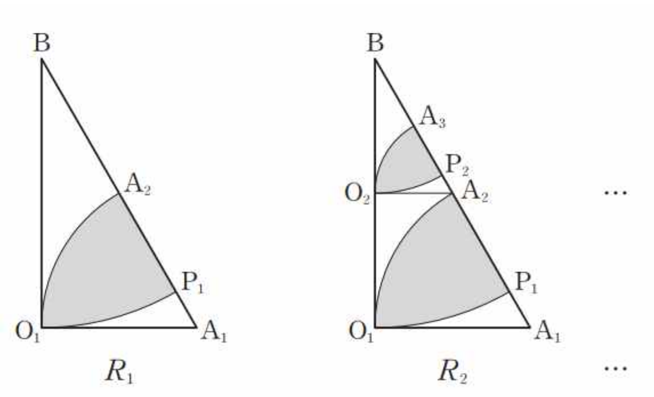


① $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

중요도	★★★	쪽 번	067 034	문항코드	20050-0168

기대T Comment
적당한 난이도의 도형급수. 한번 쯤 풀어주자.

3. 그림과 같이 $\overline{O_1A_1}=1, \overline{O_1B}=\sqrt{3}$인 직각삼각형 O_1A_1B에서 점 A_1을 중심으로 하고 선분 O_1A_1을 반지름으로 하는 원과 선분 A_1B와의 교점을 A_2라 하고, 점 B를 중심으로 하고 선분 O_1B를 반지름으로 하는 원과 선분 A_1B와의 교점을 P_1이라 하자. 호 O_1A_2와 호 O_1P_1, 선분 A_2P_1로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1의 점 A_2에서 선분 BO_1에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 직각삼각형 O_2A_2B에서 점 A_2를 중심으로 하고 선분 O_2A_2를 반지름으로 하는 원과 선분 A_2B와의 교점을 A_3이라 하고, 점 B를 중심으로 하고 선분 O_2B를 반지름으로 하는 원과 선분 A_2B와의 교점을 P_2라 하자. 그림 R_1에 호 O_2A_3과 호 O_2P_2, 선분 A_3P_2로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

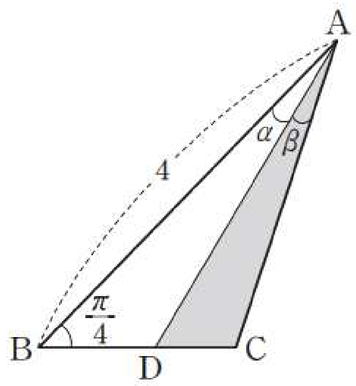


① $\frac{5\pi-2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\pi-3\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{5\pi-4\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{5\pi-5\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{9}$

중요도	★★★	쪽 번	067 035	문항코드	20050-0169

기대T Comment
2번과 같은 코멘트. 재작년 나형 수능문제와 닮았다.

4. 그림과 같이 $\overline{AB}=4, \angle ABC=\frac{\pi}{4}$인 삼각형 ABC에서 선분 BC 위의 한 점 D에 대하여 $\angle BAD=\alpha, \angle CAD=\beta$라 할 때, $\tan\alpha=\frac{1}{4}, \tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$이다. 삼각형 ADC의 넓이는? [2점]



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{14}{15}$ ④ $\frac{16}{15}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

중요도	★★	쪽 번	075 012	문항코드	20050-0181

기대T Comment
탄젠트 합차공식을 잘 활용해야하는 문제. 현 상태로는 멋이 없는 문제일 수 있지만 다른 말로 하면 발전가능성이 높은 문제라는 의미가 된다.

5. 함수 $f(x)=e^x \sin x$에 대하여 $\dfrac{f''(\pi)}{f'(\pi)}$의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

중요도	★★★	쪽 번	079 024	문항코드	20050-0193

기대T Comment
$\dfrac{f''}{f'}$은 $\ln\lvert f'(x)\rvert$를 미분하여 나온다. 따라서, $f'(x)$는 직접 구한 후 그 식에 $\ln$을 취해 미분해볼 생각도 충분히 할 수 있음을 생각해두자. 물론, 이 문제에서는 그냥 두 번 미분해도 크게 어렵지 않았다 ^_^

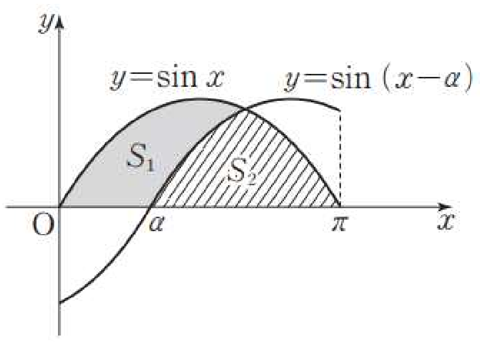
6. 2 이상의 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 곡선 $y=\sin^n x \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 변곡점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ③ 1 ④ $\sqrt{e}$ ⑤ $2\sqrt{e}$

중요도	★★	쪽 번	079 026	문항코드	20050-0195

기대T Comment
몇 년 째 EBS에서 나오고 있는 문제. 기출문제에서도 비슷한 문제가 있긴 했는데, 이 사실을 알고 있다면 당신이 틀딱일 확률은 31.41592%.

7. 그림과 같이 $0 \le x \le \pi$에서 두 곡선 $y=\sin x, y=\sin(x-\alpha)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. (단, $0 < \alpha < \pi$)



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $S_1 + S_2 = 2$

ㄴ. $a = \frac{\pi}{3}$일 때, $S_1 = S_2$이다.

ㄷ. $S_1 = 2S_2$일 때, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★★	쪽 번	097 030	문항코드	20050-0238

기대T Comment

문제 자체는 쉽지만, 도형 S_2가 α의 값에 관계없이 항상 $x = \frac{\alpha+\pi}{2}$에 대칭인 도형임을 알아두자.
이걸 이용하면, ㄷ. 보기의 $S_1 = 2S_2$ 대신 $2S_1 = S_2$로 출제됐을 때 $S_1 = \frac{1}{2}S_2$로 해석하여 대칭성을 넓이에서 쓸 수 있지 않을까란 생각을 할 수 있게 된다. 이거 느낌 좋으니 별이 다섯 개!

8. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$xf'(x) - f(x) = x^2 \times 2^x, f(1) = \frac{4}{\ln 2}$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{6}{\ln 2}$ ② $\frac{8}{\ln 2}$ ③ $\frac{10}{\ln 2}$ ④ $\frac{12}{\ln 2}$ ⑤ $\frac{14}{\ln 2}$

중요도	★★★★	쪽 번	088 001	문항코드	20050-0209

기대T Comment

양변을 x^2으로 나눈 후 좌변을 관찰하면, $\frac{f(x)}{x}$ 미분꼴이 보인다.
$f(x)+xf'(x)$ 모양을 찾아서 $(xf(x))'$으로 생각하는 것과 마찬가지 생각인데, 몫의 미분법은 그 모양이 아직은 익숙치 않다고 교육청/평가원이 판단한 듯 하다. 실제로 과거 기출문제에서는 양변을 x^2으로 나눈 식을 줌으로써 좀 더 눈치채기 쉬웠는데, 이번 문제는 그 생각을 직접 해줘야한다는 점에서 살짝 어려웠을 수 있다.

9. $0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x},\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

을 만족시킨다. $\sin a = \frac{3}{5}$인 상수 a에 대하여 $f(a)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{12}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{11}{12}$

중요도	★★★	쪽 번	088 002	문항코드	20050-0210

기대T Comment
간단한 적분문제. 분자를 찢어서 관찰하자.

10. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 4^x - 6 \times 2^x + 8,\ f(0) = -\frac{11}{2\ln 2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M - m$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{\ln 2} - 8$　② $\frac{4}{\ln 2 - 8}$　③ $\frac{6}{\ln 2 - 8}$　④ $\frac{4}{\ln 2 - 4}$　⑤ $\frac{6}{\ln 2 - 4}$

중요도	★★	쪽 번	088 003	문항코드	20050-0211

기대T Comment
EBS의 안타까운 실수. 이 문제에서 $f(0)$의 존재가 필요 없음을 관찰할 수 있어야 한다.

11. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^{2}\{f(x)+f(-x)\}dx=12,$$
$$\int_{0}^{2}\{f(x)+f(-x)\}dx=16$$

을 만족시킬 때, $\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx$의 값은? [3점]

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

중요도	★★★	쪽 번	091 011	문항코드	20050-0219

기대T Comment
함수 $f(x)$에 대칭성이 없어도, 피적분함수의 모양에 따라 '그 자체'가 대칭성을 띄는 함수로 바뀔 수 있다. 대칭성이 보장되면, 할 수 있는 얘기가 매우 많으므로 반드시 파악해야 한다.

12. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\int_{0}^{1} x\cos^2\{g(x)\}dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{2}\ln 2$

중요도	★★★★	쪽 번	093 017	문항코드	20050-0225

기대T Comment
삼각함수의 역함수 관련 적분은 논술에서 빈출된다. 물론 수능스럽다고는 얘기못하겠지만 결국 역함수 적분은 치환적분의 일종이므로, 역함수 문제가 나오면 항상 $g(f(x))=x=f(g(x))$을 써먹을 생각하자.

13. 다음은 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$의 값을 구하는 과정이다

자연수 n에 대하여 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$라 하자.

$n \geq 3$인 자연수 n에 대하여

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx$

$= \left[\sin^{n-1}x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\cos x(-\cos x)dx$

$=(\boxed{(가)})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

따라서 $I_n = \boxed{(나)} \times I_{n-2}(n \geq 3)$이다.

위의 사실을 이용하면 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \boxed{(다)}$이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(4) \times g(5) \times k$의 값은? [3점]

① $\frac{28}{25}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{32}{25}$ ④ $\frac{34}{25}$ ⑤ $\frac{36}{25}$

중요도	★★★	쪽 번	093 018	문항코드	20050-0226

14. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}dt$$

를 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 - \sqrt{3}$

ㄴ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★	쪽 번	094 021	문항코드	20050-0229

기대T Comment

윌리스 공식. 수능 후 수리논술을 준비할 친구들은 미리 인사를 해두자.

H i ~

기대T Comment

유명한 적분문제.

$t = \frac{\pi}{2} - x$ **치환을 한 후, 원래 적분식과 치환적분이 적용된 적분식을 더하면** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt$**의 값도 구할 수 있다.**

15. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=(x-1)e^x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\int_0^{e^2} \frac{x}{g(x)e^{g(x)}}dx$의 값은? [3점]

(단, 방정식 $(x-1)e^x=e^2$을 만족시키는 x의 값은 2뿐이다.)

① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ e ④ $\frac{e^2}{2}$ ⑤ e^2

중요도	★★★	쪽 번	097 029	문항코드	20050-0237

기대T Comment
12번과 같은 코멘트.

16. 두 함수 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$에 대하여 $F(x), G(x)$를 각각

$F(x)=(f \circ f)(x), G(x)=(g \circ g)(x)$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. 두 함수 $F(x), G(x)$는 모두 주기함수이다.

ㄴ. 함수 $F(x)$의 최댓값이 함수 $G(x)$의 최솟값보다 작다.

ㄷ. 함수 $\frac{F(x)}{G\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$의 최댓값을 M이라 하면 $1 < M < \sqrt{3}$ 이다

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★	쪽 번	082 034	문항코드	20050-0203

기대T Comment
다른 보기를 보다도 ㄷ. 보기에 집중할 것. 같은 부분이 보인다면, 치환할 용기가 필요하다.

17. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 일대일대응인 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하는 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.
> (나) $\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)-1}{x-3}=1,\ \lim_{x\to 5}\dfrac{f(x)-2}{x-5}=\dfrac{1}{3}$

함수 $h(x)$를 $h(x)=g(x)+(x+1)g'(x)+xg''(x)$라 할 때, $\int_1^2 h(x)dx$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

중요도	★★★	쪽 번	149 016	문항코드	20050-0390

기대T Comment
$h(x)$는 $xg(x)+xg'(x)$를 미분한 모양임을 바로 눈치챌 수 있어야겠다.

18. 두 양의 상수 a, b와 함수 $f(x)=a(x+b)\sin x\ (x\ge 0)$에 대하여 두 함수 $F(x), G(x)$를

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\ (x\ge 0),$$

$$G(x)=\int_0^x |f(t)|dt\ (x\ge 0)$$

이라 하면 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[3\pi, 4\pi]$에서 $G(x)=-F(x)+24$
> (나) 닫힌구간 $[6\pi, 7\pi]$에서 $G(x)=F(x)+60$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

중요도	★★★★★ ★★★★★	쪽 번	167 021	문항코드	20050-0455

기대T Comment

아니 ㄹㅇㅋㅋ 이 문제는 별이 열 개니까, 두 분 나와주세요!


(가), (나) 조건이 내 취향이다.
G+F 나 G-F를 구간한정 상수함수로 해석할 수 있어야겠다.

19. 정의역이 $\{x|0 \le x \le 4\pi\}$인 함수 $f(x)=x+\sin x-1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{f(x)}^{f(x)+2}(t-x)^4+(t-x)^2\,dt$$

라 할 때, 함수 $g(x)$의 최솟값을 m이라 하자. $0 \le x \le 4\pi$일 때, x에 대한 방정식 $g(x)=m$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 2
② 3
③ 4
④ 5
⑤ 6

중요도	★★★★★	쪽 번	151 021	문항코드	20050-0395

기대T Comment
ㅋㅋㅋ 듄 해설은 왜 이렇게 어렵게 풀었누...
그냥 $t-x=p$로 치환적분하면
$g(x)=\int_{\sin x-1}^{\sin x+1}(p^4+p^2)\,dp$**이다. 즉, 사차함수 $y=p^4+p^2$ 그려놓고 적분구간의 길이가 2가 되도록 적분도형을 관찰해준다음, 이 도형의 넓이가 최소가 될 때가 언제인지, 그 때가 되기 위해 $\sin x$ 값이 몇이어야 하는지 (=0) 알면 끝난다. 따라서 $x=n\pi(n=1,2,3)$.**
어려운 해설 쓰느라 수고했어 듄 ^_^
???: 고마워, 대...

20. 함수 $f(x)=(\ln x)^2$에 대하여 기울기가 $t\,(t>0)$인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 접점의 x좌표와 y좌표를 각각 $g(t)$와 $h(t)$라 하면 두 함수 $g(t)$와 $h(t)$는 모두 구간 $\left(0, \frac{2}{e}\right)$에서 미분가능하다. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 k일 때, $\{k^2\times g'(k)+k\times h'(k)\}^2$의 값을 구하시오. (단, $g(t)>e$)

[4점]

중요도	★★★★	쪽 번	153 030	문항코드	20050-0404

기대T Comment
함수 $f(x)=(\ln x)^2$에 대하여 기울기가 $t\,(t>0)$인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 접점의 x좌표와 y좌표를 각각~
이란 말이 나왔을 때, 여기서 x좌표와 y좌표는 자연스럽게 t에 대한 함수임을 인지해야 한다. 이 문제에서는 이를 각각 $g(t)$와 $h(t)$로 둬졌지만, 평소에 문제 풀 때에도 이렇게 두고 푸는 연습을 하도록 하자.

<수능 후 이과 수리논술 Final 개강안내 - 대치오르비>

자세한 수업시간은 아래 QR코드로 확인 가능합니다.

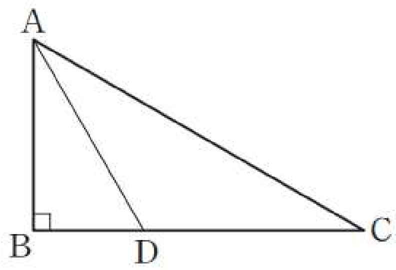
1주차 (Basic, 한양, 건국, 동국, 과기대)	2주차 (연세, 광운+세종,중앙,이대,아주,에리카)	3주차 (인하대)

개강학교 (ㄱㄴㄷ순)	회차* (기간)	수업일	수업소개 / 마감주의알림 (작년 마감속도 기준)
논술 Basic	1회 (1일)	3(수능 당일) 저녁	- 논술을 본격적으로 준비한 기간이 4개월 이하인 학생들은 수강 강력 추천! - *작년 기준 빠른 마감, 수능 전 등록 추천*
건국대	2회 (1일)	4(금) 점심+저녁	- 아주대와 약간 다른 수학적 자료해석형. 덕분에 충분히 도전해볼만한 난이도. - 당일 집중 특강으로 건국대 스타일 파악? 핵가능!
동국대	1회 (1일)	5(토) 점심	- 독보적 출제 스타일을 가진 학교. 이에 당황하지 않도록 동국대 유형에 필수인 '수학적 모델링 전략'을 제시
광운대 & 세종대	4회 (4일)	8(화) 아침 + 9(수)~11(금) 점심	- 광운대의 제시문이 더 친절하다는 점을 제외하고, 많은 점이 닮은 두 학교. 과목별 패턴분석으로 효율적 정복 가능! - *작년 기준 빠른 접수. 수능 전 예약/등록 추천*
연세대	4회 (2일)	6(일) 저녁 + 7(월) 아침+점심+저녁	- 쉬워지는 과학논술, 수리논술 고득점은 필수! - 예상모의고사로 최근 3년간 급변하고 있는 연대 수리논술 경향을 간접경험 - *올해 최대 응시자수! 빠른 마감 예상. 수능 전 등록 추천*
에리카	3회 (1일)	13(일) 아침+점심+저녁	- 본캠 시험출제에 영감을 주는 분캠이 있다?? 우수한 출제력, 그 때문에 지원자들에겐 버거운 난이도ㅠ *Final 수강 추천*
아주대	3회 (1일)	12(토) 아침+점심+저녁	- 까다로운 자료해석형 시험출제경향. 이를 아는 것과 모르는 것의 차이가 체감난이도로 직결되는 학교!
이화여대	3회 (1일)	9(수)~11(금) 아침	- 문제는 어려우나 합격자 점수를 보면 '해볼만한데?'란 생각이 드는 학교. - 타학교보다 감점에 신경 써야하는 특수성이 있는 학교. 꼼꼼한 첨삭 제공!
인하대	6회 (6일)	14(월)~19(토) ① 점심반 ② 저녁반	- 인하대 논술이 한양대보다 어렵다고? 그래, 어려운 시험이지.. 떨어지기 어려운 시험! 인하대의 특성을 아는 순간, 체감 난이도는 급하강 - 기대T의 시그니쳐 수리논술 Final로, 모든 Final 중 수업 후 만족도가 제일 높은 수업** *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
서울 과기대	3회 (2일)	5(토) 저녁 + 6(일) 아침+점심	- 지원자 실력 대비 어렵게 출제하는 과기대는, 중앙대와 달리 살짝 선 넘을 필요가 있다. 그 선, 내가 제시해줄게.
중앙대	4회 (4일)	8(월) ~ 11(목) 저녁	- 수능 전에 굳이 하지 마라. 중앙대는 Final로 충분히 준비되는 학교니까. - 과유불급! 합격의 선을 정확히, 과하지 않게 제시하는 수업 *Final 수강 추천*
한양대	4회 (1일)	4(금) 아침+점심+ 점저+저녁	- 작년보다 빨라진 한양대의 논술시계 ㅠㅠ 예상모의고사 4회분으로 실력 점검하고 역대 우수기출 총정리된 자습자료로 빠르게 한양대 스타일 흡수! - *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
한양대 (의예과)	1회 (일)	5(토) 점심	- 다른 학원 한양의대 Final 수업내용과 겹치지 않아 중복수강할 수 있음. - 고난도 모의고사 2회분으로 자신의 실력을 한번 더 체크해볼 수 있는 기회

* : 회차가 구분된 수업은 모두 '다른 수업'입니다. 내용이 같은 수업은 인하대 점심반/저녁반 이외에 없습니다.

** : 수업 후 설문조사 결과 97.64%가 수업/첨삭 '모두 만족' 답변 ('모두 불만족' 응답률 0%))

21.그림과 같이 $\overline{BC}=3$, $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. $\overline{BD}=1$인 선분 BC 위의 점 D에 대하여 ∠CAD의 크기가 최대가 될 때, 선분 AD의 길이는? [4점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

중요도	★★★★	쪽번	157 014	문항코드	20050-0418

기대T Comment
일반적인 방법은 해설과 같은 탄젠트 공식 활용이지만, 다음과 같이 해석할 수 도 있다. (수리논술에서 출제된 아이디어) 예각인 ∠CAD가 최대이려면, 삼각형 CAD의 외접원의 지름의 길이가 작아야한다. (사인법칙 생각해보기. 선분 CD의 길이가 일정한 것 체크) 물론, 이 원의 지름이 CD일 때가 지름의 길이 자체는 제일 짧을 것이다. 하지만 점 A는 BC와 수직이면서 점 B를 지나는 직선 L 위에 있어야 한다. 따라서, 이 원은, 지름이 CD일 때보다 약간은 커지되 직선 L과 만날 때 까지만 크면 된다. 이 때는 당연히, 직선 L에 삼각형 CAD의 외접원이 접할 때겠죠? 그럼 이 때! 이 원의 중심은 어딨어? 바로 A에서 직선 AB(=직선L)에 수직이 되도록 그은 직선과 선분 CD의 수직이등분선의 교점이 이 원의 중심이 된다. 와 ㄹㅇ 이 정도면 다 떠먹여줬다. Admit? Yes Admit~

22. 두 상수 a,b에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x,y)가

$$x=a(1-\cos^3 bt), y=a\sin^3 bt$$

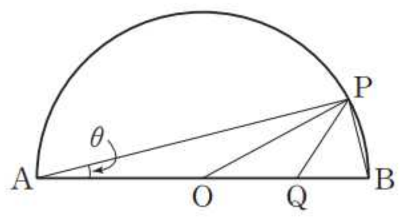
이다. 점 P의 좌표가 $(2\sqrt{2}-1,1)$일 때, 속력이 최대가 되고 그 값은 18이다. a^2+b^2의 값은? (단, $ab>0$) [4점]

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

중요도	★★	쪽번	157 016	문항코드	20050-0420

기대T Comment
3각함수의 삼승을 미분하라고? 하면 되지 뭐...★ 힘쇼 근데, 하다보면 두배각공식이나 산술기하평균부등식을 쓰는 경우가 생긴다. 당황하지말고, 알고 있으면 쓰고 모르고 있으면 넘어가자. 이건 평가원 문제 아니고 듄문제니까.

23. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB가 지름인 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle BAP = \theta$라 하자. $\overline{PQ} = \overline{OQ}$를 만족시키는 점 Q를 선분 OB 위에 잡고, 삼각형 OPA의 넓이를 S(θ), 삼각형 PQB의 넓이를 T(θ)라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta) \times T(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점] $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

중요도	★★★	쪽 번	158 019	문항코드	20050-0423

기대T Comment
삼각함수 극한에서의 근사가 근사해보일 수 있으나 본인이 쌉고인물이 아닌 이상 쓰지 말자. 식으로 해도 얼마 안걸려욧!! 나도 안쓰는 근사를 님들이 왜써욧 ㅠㅠ

24. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 a에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x) = \int_0^x (|f(t)| + a)dt$$

로 정의하고 함수 $F(x)$의 역함수를 $G(x)$라 할 때, 다음이 성립한다.

(가) 함수 $G'(x)$는 $x=0$과 $x=114$에서만 극댓값 1을 가진다. (나) 함수 $G'(x)$는 극솟값 m을 가진다.

$\frac{a}{m}$의 값은? [4점]

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

중요도	★★★★★ ★★★★★ ★★★★★	쪽 번	175 021	문항코드	20050-0485

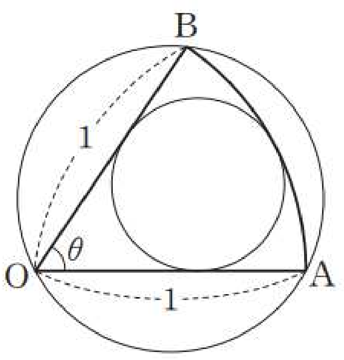
기대T Comment

누가 둔이라고 무시하였는가. 이 교재는 무려 평★가★원이 감수한 교재란 말이다!!! 올해 EBS를 통틀어 최고의 미적분 문제를 고르라면, 바로 이거 고를 것이다. 너무 좋은 문제. 아낌없는 별 드립니다.



삼차함수와 역함수를 좌표평면 위에 그려놓고 그 동향을 관찰하는 것. 이 관찰에서 알아낸 사실을 식으로 증명해보는 것.
이 두 과정이 상당히 중요하다.

25. 그림과 같이 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB가 있다. 중심이 부채꼴 OAB의 내부에 있고, 두 선분 OA, OB에 접하며 호 AB와 한 점에서 만나는 원의 넓이를 S(θ), 세 점 O, A, B를 지나는 원의 넓이를 T(θ)라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)}$ 의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① 1 ② $\frac{3}{2}$; ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

중요도	★★★★	쪽번	150 018	문항코드	20050-0392

기대T Comment
그림 잘못 그리면 죽어버리는 문제. 작은 원과 큰 원의 중심이 같다는 착각은, 금물이다.

26. 함수 $f(x) = x \ln x$와 실수 $t\left(-\frac{1}{e} < t < 0\right)$에 대하여 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 두 실근을 각각 $g(t), h(t)$라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $A(g(t), f(g(t))), B(h(t), f(h(t)))$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $g(t) < h(t)$, $\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0$) [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $g(t) < \frac{1}{e} < h(t)$

ㄴ. $f'(g(t)) \times f'(h(t)) < 0$

ㄷ. 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표는 $-\frac{g(t)h(t)}{t}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★	쪽번	167 020	문항코드	20050-0454

기대T Comment
20번 코멘트와 동일하다.

27. 함수 $f(x)=2e^{2x}+3e^{-x}-4$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $g(x)$가 있다. 실수 k에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=|g(x+k)-f(x)|$라 할 때, $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=0$에서 최솟값 $g(k)$를 갖는다.
(나) 닫힌구간 [-1, 1]에서 최댓값 $\frac{2e^2-e+3}{e}$을 갖는다

$g'\left(k-\frac{2}{3}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

중요도	★★★★	쪽 번	161 030	문항코드	20050-0434

기대T Comment
기출문제 30번 변형임이 한눈에 느껴져야 좋다.

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(g(x))=3x$
(나) $\int_{g(1)}^{g(2)} f(x)dx=27$

$\int_{1}^{2}\frac{x}{f'(g(x))}dx$의 값을 구하시오 [4점]

중요도	★★★	쪽 번	168 025	문항코드	20050-0459

기대T Comment
f, g 둘이 역함수인 척 하는데, 어림도 없지. 하지만 핵심은 역함수 적분과 똑같다. (가)조건식을 활용하는 것.

29. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)e^{f(x)-|f(x)|}$이라 할 때, 두 함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

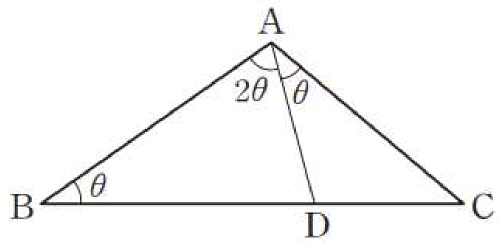
> (가) $\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+1}{x}=0$
> (나) 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값을 작은 값부터 크기순으로 모두 나열한 것을 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n}x_k=5$이다.

$f(-1)\times f(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{33}{4}$ ② 9 ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}$

중요도	★★★	쪽 번	159 021	문항코드	20050-0425

30. 그림과 같이 $\overline{AB}=3, \angle CAB=3\theta, \angle ABC=\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB=2\theta, \angle CAD=\theta$가 되도록 잡고, 선분 CD의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}f(\theta)=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



중요도	★★★★	쪽 번	169 027	문항코드	20050-0461

기대T Comment

(가) 조건은 후줄근한데, g(x) 모양이 꽤나 훌륭하여 결과가 괜찮은 문제

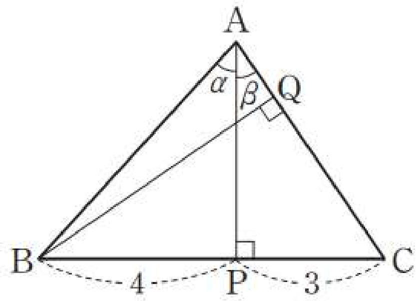
절댓값 있으면, 부호부터 나누고 시작하자.

기대T Comment

사인법칙과 극한의 콜라보는 기대T의 수험생 마지막 수능 29번 (13수능)에 출제된 뒤로 자취를 감췄지만, 언제 흑염룡이 되어 나올지 모른다.
항상 도형에서 각이 표시돼있다면, 사코법칙 준비해둘 것.

사실, 써서 손해인 상황은 잘 연출되지 않는다.

31. 그림과 같이 예각삼각형 ABC에서 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 Q, $\angle BAP=\alpha, \angle CAP=\beta$라 하자. $\tan(\alpha+\beta)=7, \overline{BP}=4, \overline{CP}=3$일 때, 선분 BQ의 길이는? [4점]



① $\frac{24}{5}$ ② 5 ③ $\frac{26}{5}$ ④ $\frac{27}{5}$ ⑤ $\frac{28}{5}$

중요도	★★	쪽번	173 015	문항코드	20050-0479

기대T Comment
아쉬운 문제. 문제 풀 때에는 α, β가 각각 쓰이겠지만 문제조건을 제시할 때에는 굳이 α, β가 분리돼있을 필요가 없음을 알 수 있다. ($\alpha+\beta$를 한번에 θ로 표현했어도 됐음.) 이런 아쉬운 부분을 캐치하여 평가원이 변형하지만, 이 문제는 그렇게 매력적이진 않다.

32. 두 함수 $f(x)=\int_0^x \frac{e^{t+1}+1}{e^t+1}dt, g(x)=\int_{-1}^x \frac{t}{e^{|t|}+1}dt$에 대하여 두 함수 $F(x), G(x)$를

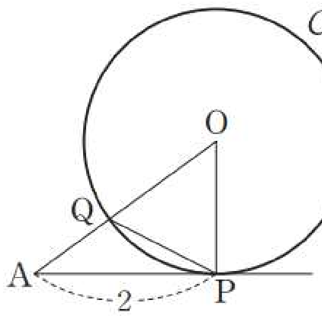
$F(x)=(f \circ g)(x), G(x)=(g \circ f)(x)$

로 정의할 때, $F'(1)+G'(0)=k$이다. $36k$의 값을 구하시오. [4점]

중요도	★★★	쪽번	168 026	문항코드	20050-0460

기대T Comment
절댓값에 주의해서 미분해줘야한다. F '(1)은 쉽지만, G'(0)은 신경써서 계산해주자.

33. 그림과 같이 중심이 O인 원 C 위의 점 P에 접하는 접선 위의 점 A에 대하여 $\overline{AP}=2$이고, 선분 OA와 원 C가 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 APQ의 넓이가 최대일 때, 원 C의 넓이는 $(a+2\sqrt{b})\pi$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.(단,a,b는 정수이다.) [4점]



중요도	★★	쪽 번	177 030	문항코드	20050-0494

기대T Comment
각을 변수로 두고 삼각함수에 대한 함수로 나타내는 문제. 좀 내신틱한 문제긴 한데, 수능 현장에서 당황하지 않도록 미리 경험해보자.

34. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $F(x)$와 $G(x)$를 각각

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt,\ G(x)=\int_1^x tf(t)dt$$

라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=e^{-xF(x)+G(x)}$이 성립한다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $x<1$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 1이다.
ㄷ. $f(2)=\frac{1}{2}$이면 F(2)=1이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

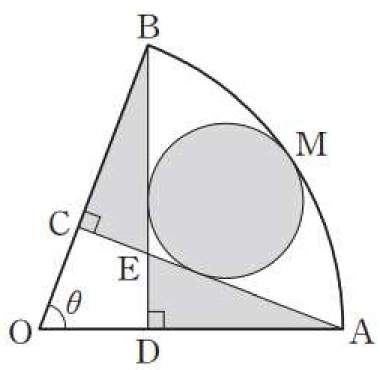
중요도	★★★	쪽 번	182 020	문항코드	20050-0514

기대T Comment
작년 6월 평가원 문제가 생각나는 문제이다. 특별할 건 없고, 미분 열심히 하다보면 어이없게 풀리는 문제.

<table>
<tr><th colspan="2">기대모의고사 가형/나형 Vol1, 2, 3 링크</th></tr>
<tr><td>Vol.1, 2 : 1등급컷 84~88, 신선함과 동시에 수능스러운 정제됨을 경험할 수 있는 모의고사
Vol.3 (가형) : 올해 6, 9, EBS 반영한 Final 모의고사 (나형은 Vol.3 제작 불발됐습니다.)</td><td>Atom.ac
접속</td></tr>
<tr><th colspan="2">김기대T 수능 후 논술 Final 개강 안내사항</th></tr>
<tr><td>실시간 수능 후 Final 시간표를 확인할 수 있습니다.</td><td></td></tr>
</table>

35. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 부채꼴 OAB가 있다. 점 A에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 D라 하고, 선분 AC와 선분 BD의 교점을 E, 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하자. 삼각형 AED와 삼각형 BCE의 넓이의 합을 f(θ), 호 AB와 점 M에서 만나고 선분 AE, 선분 BE에 접하는 원의 넓이를 g(θ)라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\pi$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



중요도	★★★	쪽 번	184 029	문항코드	20050-0523

기대T Comment
OM에 대한 선대칭인 상황을 파악해주시고, 또한 굳이 삼각형 AED와 삼각형 BCE의 넓이의 합 을 f로 둘 필요가 없다는 것이 보이지? 두 삼각형 중 하나만 제시했어도 됐을텐데. 아쉬움이 남는다.

<수능 후 이과 수리논술 Final 개강안내 - 대치오르비>

자세한 수업시간은 아래 QR코드로 확인 가능합니다.

1주차 (Basic, 한양, 건국, 동국, 과기대)	2주차 (연세, 광운+세종,중앙,이대,아주,에리카)	3주차 (인하대)

개강학교 (ㄱㄴㄷ순)	회차* (기간)	수업일	수업소개 / 마감주의알림 (작년 마감속도 기준)
논술 Basic	1회 (1일)	3(수능 당일) 저녁	- 논술을 본격적으로 준비한 기간이 4개월 이하인 학생들은 수강 강력 추천! - *작년 기준 빠른 마감, 수능 전 등록 추천*
건국대	2회 (1일)	4(금) 점심+저녁	- 아주대와 약간 다른 수학적 자료해석형. 덕분에 충분히 도전해볼만한 난이도. - 당일 집중 특강으로 건국대 스타일 파악? 핵가능!
동국대	1회 (1일)	5(토) 점심	- 독보적 출제 스타일을 가진 학교. 이에 당황하지 않도록 동국대 유형에 필수인 '수학적 모델링 전략'을 제시
광운대 & 세종대	4회 (4일)	8(화) 아침 + 9(수)~11(금) 점심	- 광운대의 제시문이 더 친절하다는 점을 제외하고, 많은 점이 닮은 두 학교. 과목별 패턴분석으로 효율적 정복 가능! - *작년 기준 빠른 접수. 수능 전 예약/등록 추천*
연세대	4회 (2일)	6(일) 저녁 + 7(월) 아침+점심+저녁	- 쉬워지는 과학논술, 수리논술 고득점은 필수! - 예상모의고사로 최근 3년간 급변하고 있는 연대 수리논술 경향을 간접경험 - *올해 최대 응시자수! 빠른 마감 예상. 수능 전 등록 추천*
에리카	3회 (1일)	13(일) 아침+점심+저녁	- 본캠 시험출제에 영감을 주는 분캠이 있다?? 우수한 출제력, 그 때문에 지원자들에겐 버거운 난이도ㅠ *Final 수강 추천*
아주대	3회 (1일)	12(토) 아침+점심+저녁	- 까다로운 자료해석형 시험출제경향. 이를 아는 것과 모르는 것의 차이가 체감난이도로 직결되는 학교!
이화여대	3회 (1일)	9(수)~11(금) 아침	- 문제는 어려우나 합격자 점수를 보면 '해볼만한데?'란 생각이 드는 학교. - 타학교보다 감점에 신경 써야하는 특수성이 있는 학교. 꼼꼼한 첨삭 제공!
인하대	6회 (6일)	14(월)~19(토) ① 점심반 ② 저녁반	- 인하대 논술이 한양대보다 어렵다고? 그래, 어려운 시험이지.. 떨어지기 어려운 시험! 인하대의 특성을 아는 순간, 체감 난이도는 급하강 - 기대T의 시그니쳐 수리논술 Final로, 모든 Final 중 수업 후 만족도가 제일 높은 수업** *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
서울 과기대	3회 (2일)	5(토) 저녁 + 6(일) 아침+점심	- 지원자 실력 대비 어렵게 출제하는 과기대는, 중앙대와 달리 살짝 선 넘을 필요가 있다. 그 선, 내가 제시해줄게.
중앙대	4회 (4일)	8(월) ~ 11(목) 저녁	- 수능 전에 굳이 하지 마라. 중앙대는 Final로 충분히 준비되는 학교니까. - 과유불급! 합격의 선을 정확히, 과하지 않게 제시하는 수업 *Final 수강 추천*
한양대	4회 (1일)	4(금) 아침+점심+ 점저+저녁	- 작년보다 빨라진 한양대의 논술시계 ㅠㅠ 예상모의고사 4회분으로 실력 점검하고 역대 우수기출 총정리된 자습자료로 빠르게 한양대 스타일 흡수! - *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
한양대 (의예과)	1회 (일)	5(토) 점심	- 다른 학원 한양의대 Final 수업내용과 겹치지 않아 중복수강할 수 있음. - 고난도 모의고사 2회분으로 자신의 실력을 한번 더 체크해볼 수 있는 기회

* : 회차가 구분된 수업은 모두 '다른 수업'입니다. 내용이 같은 수업은 인하대 점심반/저녁반 이외에 없습니다.

** : 수업 후 설문조사 결과 97.64%가 수업/첨삭 '모두 만족' 답변 ('모두 불만족' 응답률 0%))

1) [정답/모범답안]

3

[해설]

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)\left(\frac{x+1}{3}\right)^n$이 수렴하므로

$(x-3)\left(\frac{x+1}{3}\right)=0$ 또는 $-1<\frac{x+1}{3}<1$

$(x-3)\left(\frac{x+1}{3}\right)=0$에서

$x=-1$또는 $x=3$ ……㉠

$-1<\frac{x+1}{3}<1$에서 $-4<x<2$

이때 가능한 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1 ……㉡

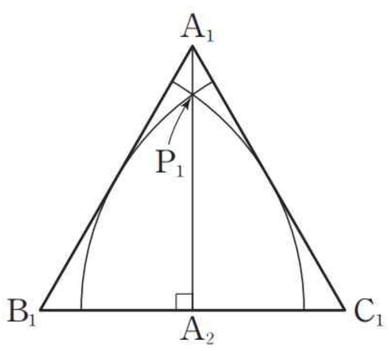
㉠, ㉡에서 가능한 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 3이고 구하는 정수 x의 개수는 6이다.

2)

[정답/모범답안]

3

[해설]



정삼각형 $A_1B_1C_1$은 한 변의 길이가 1이므로 점 B_1을 중심으로 하고 직선 A_1C_1에 접하는 원의 반지름의 길이는 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 높이인 $\frac{\sqrt{3}}{2}$과 같다.

따라서 삼각형 $P_1B_1C_1$은 $\overline{P_1B_1}=\overline{P_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$인 이등변삼각형이고

$\overline{B_1A_2}=\frac{1}{2}$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{P_1A_2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $l_1=\overline{A_1P_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

삼각형 $A_2B_2C_2$와 삼각형 $A_1B_1C_1$은 서로 닮은 도형이고 닮음비는

$1:2$이므로

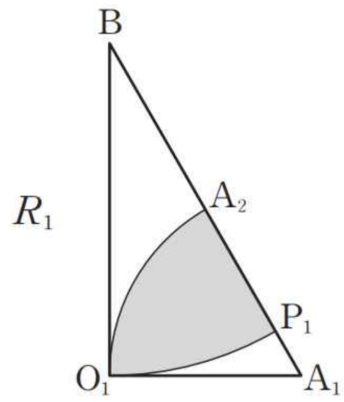
$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

3)

[정답/모범답안]

5

[해설]



직각삼각형 O_1A_1B의 내부에 있고 부채꼴 BO_1P_1의 외부에 있는 도형

의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}$……㉠

S_1의 값은 부채꼴 $A_1A_2O_1$의 넓이에서 ㉠의 값을 뺀 것과 같으므로

$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 O_2A_2B와 삼각형 O_1A_1B는 서로 닮은 도형이고 닮음비는

$\overline{BA_2}:\overline{BA_1}=(2-1):2=1:2$

이므로 넓이의 비는 $1:4$이다.

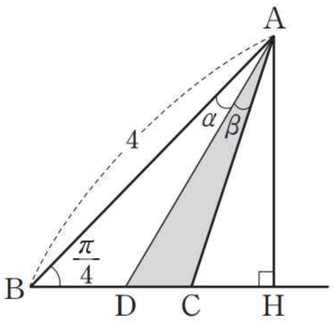
따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{9}$

4)

[정답/모범답안]

4

[해설]



점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$\overline{AH}=4\sin\frac{\pi}{2}=2\sqrt{2}$

$\angle ACH=\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}$이고

$$\tan\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

이므로

$$\overline{CH}=\frac{\overline{AH}}{\tan\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\angle ADH=\alpha+\frac{\pi}{4}$이고

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}$$

이므로

$$\overline{DH}=\frac{\overline{AH}}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{5}{3}}=\frac{6\sqrt{2}}{5}$$

$\overline{DC}=\overline{DH}-\overline{CH}=$

$$=\frac{6\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{15}$$

따라서 삼각형 ADC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{DC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{2}}{15}\times2\sqrt{2}=\frac{16}{15}$$

5)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$f(x)=e^x\sin x$에서

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$

따라서 $\frac{f''(\pi)}{f'(\pi)}=\frac{2e^{\pi}\times(-1)}{e^{\pi}\times(-1)}=2$

6)

[정답/모범답안]

2

[해설]

2 이상의 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 곡선

$y=\sin n^x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 변곡점의 좌표를 (b_n, a_n)이라 하자.

$y'=n\sin^{n-1}x\times\cos x$

$y''=n(n-1)\sin^{n-2}x\times\cos^2 x+n\sin^{n-1}x\times(-\sin x)$

$\sin x>0$이므로 $y''=0$에서

$(n-1)\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$(n-1)\cos^2 b_n=\sin^2 b_n$

$\sin^2 bn=1-\cos^2 b_n$이므로

$(n-1)\cos^2 b_n=1-\cos^2 b_n$에서

$\cos^2 b_n=\frac{1}{n}$이고 $\sin^2 b_n=1-\frac{1}{n}$

$\sin b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

따라서 $a_n=\sin^n b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$

이때 $t=-\frac{1}{n}$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0-$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{t\to0-}(1+t)^{\frac{1}{t}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

7)

[정답/모범답안]

5

[해설]

ㄱ. $S_1+S_2=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}$

$=-\cos\pi-(-\cos 0)$

=2 (참)

ㄴ. $\frac{\frac{\pi}{3}+\pi}{2}=\frac{2}{2}\pi$이고

$\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$

$=-\cos\pi-\left(-\cos\frac{2}{3}\pi\right)$

$$=-(-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$S_2=2\times\frac{1}{2}=1$이고 ㄱ에서 $S_1+S_2=2$이므로

$S_1=S_2=1$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $S_1+S_2=2$이고

$0<\alpha<\pi$에서 $S_1=2S_2$이면 $S_2=\frac{2}{3}$이므로

$$\int_{\frac{\alpha+\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{3}$$

$$[-\cos x]_{\frac{\alpha+\pi}{2}}^{\pi}=-\cos\pi-\left\{-\cos\left(\frac{\alpha+\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=1-\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$$

에서 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$

$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8)

[정답/모범답안]

4

[해설]

$xf'(x)-f(x)=x^2\times 2x$에서

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x$$

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=2^x$에서 $\frac{f(x)}{x}=\frac{2^x}{\ln 2}+C$(단, C는 적분상수)

$\frac{f(1)}{1}=\frac{2}{\ln 2}+C=\frac{4}{\ln 2}$에서 $C=\frac{2}{\ln 2}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 2}$$

$\frac{f(2)}{2}=\frac{2^2}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 2}=\frac{6}{\ln 2}$에서

$$f(2)=\frac{12}{\ln 2}$$

9)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$$f(x)=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)dx$$

$=-\cot x-\tan x+C$ (단, C는 적분상수)

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1-1+C=1$에서 C=3

$$f(x)=-\cot x-\tan x+3$$

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$일 때, $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$에서

$\tan\alpha=\frac{3}{4}$, $\cot\alpha=\frac{4}{3}$

따라서 $f(\alpha)=-\frac{4}{3}-\frac{3}{4}+3=\frac{11}{12}$

10)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$f'(x)=(2^x-2)(2^x-4)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)=\frac{4^x}{\ln 4}-6\times\frac{2^x}{\ln 2}+8x+C$ (단, C는 적분상수)

f$f(0)=\frac{1}{\ln 4}-6\times\frac{1}{\ln 2}+C=-\frac{11}{2\ln 2}+C=-\frac{11}{2\ln 2}$

에서 C=0

$$f(x)=\frac{4_x}{\ln 4}-6\times\frac{2^x}{\ln 2}+8x$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $M=f(1)=\frac{4}{\ln 4}-6\times\frac{2}{\ln 2}+8\times 1=\frac{10}{\ln 2}+8$

$$m=f(2)=\frac{4^2}{\ln 4}-6\times\frac{2^2}{\ln 2}+8\times 2=-\frac{16}{\ln 2}+16$$

따라서 $M-m=\frac{6}{\ln 2}-8$

11)

[정답/모범답안]

4

[해설]

$g(x)=f(x)+f(-x)$라 할 때,

$g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$$\int_0^1\{f(x)+f(-x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0\{f(x)+f(-x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2\{f(x)+f(-x)\}dx-\int_0^2\{f(x)+f(-x)\}dx$$

=12−16=−4

$$\int_{-1}^1\{f(x)+f(-x)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{f(x)+f(-x)\}\,dx$$

=2×(−4)=−8

12)

[정답/모범답안]

1

[해설]

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(g(x))=x$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f'(x)=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$이므로

㉠에 의하여

$$\cos^2 g(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=g'(x)$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\cos^2 g(x)dx &= \int_0^1 xg'(x)dx \\ &= [xg(x)]_0^1-\int_0^1 g(x)dx \\ &= \{1\times g(1)-0\times g(0)\}-\left(\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx\right) \\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx \\ &= [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

13)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$n\ge 3$인 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx \\ &= [\sin^{n-1}x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos x(-\cos x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x(\sin^2 x-1)dx \\ &= \boxed{(n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\end{aligned}$$

$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$에서

$I_n=\boxed{\dfrac{n-1}{n}}\times I_{n-2}\,(n\ge 3)$이다.

위의 사실을 이용하면

$$I_5=\frac{4}{5}I_3=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}I_1=\frac{8}{15}I_1$$

또한 $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=\boxed{\frac{8}{15}}$$

이다.

따라서 $f(n)=n-1, g(n)=\dfrac{n-1}{n}, k=\dfrac{8}{15}$이므로

$$f(4)\times g(5)\times k=3\times\frac{4}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{32}{25}$$

14)

[정답/모범답안]

5

[해설]

ㄱ. $$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt \\ &= \int_0^x\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt\end{aligned}$$

x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x+\cos x} \\ &= \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$에서 $\dfrac{\pi}{2}-t=x$로 놓으면

$t=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $x=\dfrac{\pi}{4}, t=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $x=0$

$-1\dfrac{dx}{dt}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}(-dx) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄷ. $$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}=0$$

$x=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$x=\dfrac{\pi}{4}$에서 극솟값이자 최솟값을 갖는다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx = [\ln\ (\sin x + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(0+1)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

함수 $f(x)$의 최솟값은

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$f'(x) = xe^x$

$f(g(x)) = x$를 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x) = 1$

$f'(g(x))g'(x) = g(x)e^{g(x)}g'(x) = 1$

에서 $\dfrac{1}{g(x)e^{g(x)}} = g'(x)$

$f(1) = 0, f(2) = e^2$이므로

$g(0) = 1, g(e^2) = 2$

$$\int_0^{e^2} \frac{x}{g(x)e^{g(x)}}dx$$
$$= \int_0^{e^2} xg'(x)dx$$
$$= [xg(x)]_0^{e^2} - \int_0^{e^2} g(x)dx$$
$$= \{e^2 \times g(e^2) - 0 \times g(0)\} - \left\{3e^2 - \int_1^2 f(x)dx\right\}$$
$$= \int_1^2 f(x)dx$$
$$= \int_1^2 (x-1)e^x dx$$
$$= [(x-1)e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx$$
$$= (e^2 - 0) - [e^x]_1^2 = e$$

16)

[정답/모범답안]

3

[해설]

ㄱ. $F(x+2\pi) = \sin(\sin(2\pi + x))$
$= \sin(\sin x) = F(x)$

$G(x+\pi) = \cos\ (\cos(\pi + x))$
$= \cos(-\cos x)$
$= \cos(\cos x) = G(x)$

따라서 두 함수 $F(x), G(x)$는 모두 주기함수이다. (참)

ㄴ. $F(x) = \sin(\sin x)$에서

$-1 \le \sin x \le 1$이므로

$-\sin 1 \le F(x) \le \sin 1$

$G(x) = \cos\ (\cos x)$에서

$-1 \le \cos\ x \le 1$이므로

$\cos 1 \le G(x) \le 1$

$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$이므로 $\sin 1 > \cos 1$

따라서 함수 $F(x)$의 최댓값이 함수 $G(x)$의 최솟값보다 크다. (거짓)

ㄷ. $H(x) = \dfrac{F(x)}{G\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$로 놓으면

$$H(x) = \frac{\sin\ (\sin x)}{\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}$$
$$= \frac{\sin\ (\sin x)}{\cos\ (\sin x)} = \tan\ (\sin x)$$

$H'(x) = \sec^2(\sin x) \times \cos x$

$\sec^2\ (\sin x) > 0$이므로

$H'(x) = \sec^2(\sin x) \times \cos x = 0$에서 $\cos x = 0$

$H(2\pi + x) = \tan(\sin(2\pi + x)) = \tan(\sin x) = H(x)$

이므로 함수 $H(x)$는 주기함수이다.

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $H(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$H'(x)$		+	0	−	0	+	
$H(x)$	0	↗	tan 1	↘	−tan 1	↗	0

함수 $H(x)$는 $x = \frac{\pi}{x}$일 때 최댓값 $\tan 1$을 가지므로

$M = \tan 1$

$\tan\frac{\pi}{4} < \tan 1 < \tan\frac{\pi}{3}$에서 $1 < M < \sqrt{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17)

[정답/모범답안]

2

[해설]

조건 (나)에 의하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=1$이므로 $f(3)=1, f\ '(3)=1$이고,

$\lim_{x\to5}\frac{f(x)-2}{x-5}=\frac{1}{3}$이므로 $f(5)=2, f\ '(5)=\frac{1}{3}$이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(3)=1$에서 $g(1)=3, f(5)=2$에서 $g(2)=5$이고,

$f\ '(3)=1, f\ '(5)=\frac{1}{3}$에서 역함수의 미분법에 의하여

$g'(1)=\frac{1}{f\ '(3)}=1, g'(2)=\frac{1}{f\ '(5)}=3$이다.

따라서

$$\int_1^2 h(x)dx=\int_1^2\{g(x)+(x+1)g'(x)+xg''(x)\}dx$$
$$=\int_1^2 g(x)dx+\int_1^2 xg'(x)dx+\int_1^2 g'(x)dx+\int 2xg''(x)dx$$
$$=\int_1^2 g(x)dx+[xg(x)]_1^2-\int_1^2 g(x)dx+\int_1^2 g'(x)dx+[xg'(x)]-\int_1^2 g'(x)dx$$
$$=[xg(x)]_1^2+[xg'(x)]_1^2$$
$$=2g(2)-g(1)+2g'(2)-g'(1)$$
$$=2\times5-3+2\times3-1$$
$$=10-3+6-1=12$$

{다른 풀이}

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

조건 (나)에 의하여 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=1$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{f(x)-1}=1$에서 $f(x)=y$로 놓으면

$x=g(y)$이고 $x\to$ 3일 때, $y=f(x)\to$ 1이다.

즉, $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{f(x)-1}=\lim_{y\to1}\frac{g(y)-3}{y-1}=1$

$\lim_{x\to5}\frac{f(x)-2}{x-5}=\frac{1}{3}$이므로

$\lim_{x\to5}\frac{x-5}{f(x)-2}=3$에서 $f(x)=y$로 놓으면

$x=g(y)$이고 $x\to$ 5일 때, $y=f(x)\to$ 2이다.

즉, $\lim_{x\to5}\frac{x-5}{f(x)-2}=\lim_{y\to2}\frac{g(y)-5}{y-2}=3$

함수 $g(x)$는 미분가능하므로

$\lim_{y\to1}\frac{g(y)-3}{y-1}=1$에서 $g(1)=3, g'(1)=1$이고,

$\lim_{y\to2}\frac{g(y)-5}{y-2}=3$에서 $g(2)=5, g'(2)=3$이다.

따라서

$$[x\{g(x)+g'(x)\}]'=\{g(x)+g'(x)\}+x\{g'(x)+g''(x)\}$$
$$=g(x)+g'(x)+xg'(x)+xg''(x)$$
$$=g(x)+(x+1)g'(x)+x''g(x)$$

이므로

$$\int_1^2 h(x)dx=\int_1^2\{g(x)+(x+1)g'(x)+xg''(x)\}dx$$
$$=[x\{g(x)+g'(x)\}]_1^2$$
$$=2\{g(2)+g'(2)\}-\{g(1)+g'(1)\}$$
$$=2(5+3)-(3+1)$$
$$=2\times8-4$$
$$=16-4=12$$

18)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$a>0, b>0, x\ge0$이므로 $f(x)$의 부호는 $\sin x$의 부호와 일치한다.

자연수 n에 대하여 $S_n=\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)dx\right|$라 하면

(i) n이 홀수인 경우

닫힌구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$에서 $f(x)\ge0$이므로

$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}a(x+b)\sin x\,dx$

$=[a(x+b)(-\cos x)]_{(n-1)\pi}^{nx}+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}a\cos x\,dx$

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}a\cos x\,dx=0$이므로

$S_n=a(n\pi+b)\times(-\cos n\pi)-a\{(n-1)\pi+b\}\times\{-\cos\ (n-1)\pi\}$

$a(n\pi+b)\times1-a\{(n-1)\pi+b\}(-1)$

$a\{(2n-1)\pi+2b\}$

(ii) n이 짝수인 경우

닫힌구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$에서 $f(x)\le0$이므로

$S_n=-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)dx=-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}a(x+b)\ \sin x\,dx$

$=-\ [a(x+b)\times(-\cos x)]_{(n-1)\pi}^{n\pi}-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}a\cos x\,dx$

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}a\cos x\,dx=0$이므로

$S_n=-a(n\pi+b)(-\cos n\pi)+a\{(n-1)\pi+b\}\times\{-\cos\ (n-1)\pi\}$

$=-a(n\pi+b)(-1)+a\{(n-1)\pi+b\}\times1$

$=a\{(2n-1)p+2b\}$

(i), (ii)에 의하여 $S_n=a\{(2n-1)p+2b\}$

닫힌구간 $[3\pi, 4\pi]$에서

$F(x)=S_1-S_2+S_3+\int_{3\pi}^{x}f(t)dt$ ……㉠

$G(x)=S_1+S_2+S_3-\int_{3\pi}^{x}f(t)dt$ ……㉡

이므로 ㉠+㉡을 하면 $F(x)+G(x)=2(S_1+S_3)$

$G(x)=-F(x)+2(S_1+S_3)$

조건 (가)에서 G(x)=-F(x)+24이므로

$S_1+S_3=(a\pi+2ab)+(5a\pi+2ab)=6a\pi+4ab=12$

$3a\pi+2ab=6$ ……㉢

닫힌구간 $[6\pi, 7\pi]$에서

$F(x)=S_1-S_2+S_3-S_4+S_5-S_6+\int_{6\pi}^{x}f(t)dt$ ……㉣

$G(x)=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+\int_{6\pi}^{x}f(t)dt$ ……㉤

이므로 ㉣-㉤을 하면 $F(x)-G(x)=-2(S_2+S_4+S_6)$

$G(x)=F(x)+2(S_2+S_4+S_6)$

조건 (나)에서 G(x)=F(x)+60이므로

$S_2+S_4+S_6=(3a\pi+2ab)+(7a\pi+2ab)+(11a\pi+2ab)$

$=21a\pi+6ab=30$

$7a\pi+2ab=10$ ……ⓗ

ⓒ, ⓗ을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{\pi}, b=\dfrac{3}{2}\pi$

$f(x)=a(x+b)\ \sin x=\dfrac{1}{\pi}\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)\ \sin x$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi}\times\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}\pi\right)\times\sin\dfrac{\pi}{2}$

$=\dfrac{1}{\pi}\times 2\pi\times 1=2$

19)

[정답/모범답안]

4

[해설]

$g(x)$는 미분가능한 함수이므로 $g(0), g(4\pi)$, 극값들 중에서 최솟값이 존재한다.

(i) $g(0)$과 $g(4\pi)$의 값을 구하면 다음과 같다.

$f(0)=0+\sin 0-1=-1$이므로

$$g(0)=\int_{f(0)}^{f(0)+2}\{(t-0)^4+(t-0)^2\}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1}(t^4+t^2)dt$$

$$=\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{15}$$

또, $f(4\pi)=4\pi+\sin 4\rho-1=4\pi-1$이므로

$$g(4\pi)=\int_{4\pi-1}^{4\pi+1}\{(t-4p)^4+(t-4p)^2\}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1}(t^4+t^2)dt$$

$$=\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{15}$$

(ii) 함수 $g(x)$의 극값을 구하면 다음과 같다.

$$g(x)=\int_{f(x)}^{f(x)+2}\{(t-x)^4+(t-x)^2\}\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{5}(t-x)^5+\frac{1}{3}(t-x)^3\right]_{f(x)}^{f(x)+2}$$

$$=\left[\frac{1}{5}\{f(x)+2-x\}^5+\frac{1}{3}\{f(x)+2-x^3\}\right]-\left[\frac{1}{5}\{f(x)-x\}^5+\frac{1}{3}\{f(x)-\right.$$

이때 $f\ '(x)=\cos x+1$이므로

$g'(x)=[\{f(x)+2-x\}^4+\{f(x)+2-x^2\}]\{f'(x)-1\}$

$-[\{f(x)-x\}^4+\{f(x)-x\}^2]\{f\ '(x)-1\}$

$=\{(\sin x+1)^4+(\sin x+1)^2\}\cos x$

$-\{(\sin x-1)^4+(\sin x-1)^2\ \}\cos x$

$=\cos x\left[\{(\sin x+1)^4-(\sin x-1)^4\}+\{(\sin x+1)^2-(\sin x-1)^2\}\right]$

$=\cos x\{(\sin x+1)^2-(\sin x-1)^2\}\times\{(\sin x+1)^2+(\sin x-1)^2+1\}$

$=4\cos x\sin x(2\sin^2 x+3)$

$g'(x)=0$에서 $2\sin^2 x+3\neq 0$이므로

$\cos x=0$ ……㉠

또는 $\sin x=0$ ……㉡

㉠을 풀면

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}\pi$ 또는 $x=\dfrac{7}{2}\pi$

이므로

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2}\left\{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^4+\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}dt$$

$$=\int_0^2(t^4+t^2)dt=\frac{136}{15}$$

$$g\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\int_{\frac{3}{2}\pi-2}^{\frac{3}{2}\pi}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\pi\right)^4+\left(t-\frac{3}{2}\pi\right)^2\right\}dt$$

$$=\int_{-2}^{0}(t^4+t^2)dt=\frac{136}{15}$$

$$g\left(\frac{5}{2}\pi\right)=\int_{\frac{5}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi+2}\left\{\left(t-\frac{5}{2}\pi\right)^4+\left(t-\frac{5}{2}\pi\right)^2\right\}dt$$

$$=\int_0^2(t^4+t^2)dt=\frac{136}{15}$$

$$g\left(\frac{7}{2}\pi\right)=\int_{\frac{7}{2}\pi-2}^{\frac{7}{2}\pi}\left\{\left(t-\frac{7}{2}\pi\right)^4+\left(t-\frac{7}{2}\pi\right)^2\right\}dt$$

$$=\int_{-2}^{0}(t^4+t^2)dt=\frac{136}{15}$$

㉡을 풀면

$x=n\pi(n=1,2,3)$

이므로

$$g(n\pi)\int_{n\pi-1}^{n\pi+1}\{(t-n\pi)^4+(t-n\pi)^2\}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1}(t^4+t^2)dt=\frac{16}{15}$$

(i), (ii)로부터 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

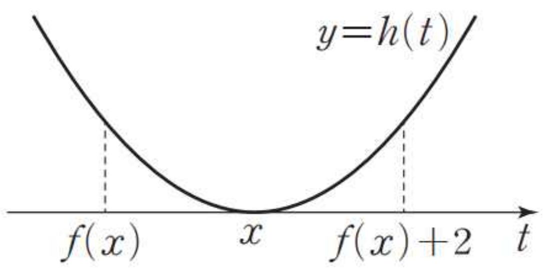
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frac{16}{15}$	↗	$\frac{136}{15}$	↘	$\frac{16}{15}$	↗	$\frac{136}{15}$	↘	$\frac{16}{15}$	↗

x	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	3π	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$	4π
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	↗	$\frac{136}{15}$	↘	$\frac{16}{15}$	↗	$\frac{136}{15}$	↘	$\frac{16}{15}$

따라서 $g(x)$의 최솟값(극솟값)은 $\dfrac{16}{15}$이므로 x에 대한 방정식 $g(x)=\dfrac{16}{15}$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

{다른 풀이}

$h(t)=(t-x)^4+(t-x)^2$이라 하면 임의의 양수 α에 대하여 $h(x-\alpha)=h(x+\alpha)$이므로 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같이 $t=x$에 대하여 대칭이다.



또, 함수 $g(x)$의 적분구간에서 위 끝 $f(x)+2$와 아래 끝 $f(x)$의 차는

$[f(x)+2]-f(x)=2$

이다.

그러므로 함수 $g(x)$는 적분구간의 위 끝 $f(x)+2$와 아래 끝 $f(x)$가 $t=x$에 대하여 대칭일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $\dfrac{f(x)+\{f(x)+2\}}{2}=x$에서

$f(x)+1=x, (x+\sin x-1)+1=x$

$\sin x=0$

그러므로 $0\le x\le 4\pi$에서 $x=n\pi(n=0,1,2,3,4)$

따라서 구하는 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

20)

[정답/모범답안]

256

[해설]

기울기가 $t\,(t>0)$인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 접점의 x좌표
와 y좌표가 각각 $g(t)$와 $h(t)$이므로

$f\,'(g(t))=t$ ……㉠

$f(g(t))=h(t)$ ……㉡

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 k일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점의 좌표를 $(a, f(a))\,(a>0)$으로 놓으면 원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$k=\dfrac{f(a)}{a}=f\,'(a)$

$f(x)=(\ln x)^2$에서 $f(a)=(\ln a)^2$이고,

$f\,'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}, f\,'(a)=\dfrac{2\ln a}{a}$

이므로 $k=\dfrac{(\ln a)^2}{a}=\dfrac{2\ln a}{a}$

$(\ln a)^2=2\ln a, \ln a(\ln a-2)=0$

$\ln a=0$또는 $\ln a=2$

즉, $a=1$ 또는 $a=e^2$

$a=1$이면

$k=f\,'(1)=\dfrac{2\ln 1}{1}=0$이므로 $g(t), h(t)$가 정의되지 않는다.

그러므로 $a=e^2$, 즉 $g(k)=e^2$이고,

$k=f\,'(e^2)=\dfrac{2\ln e^2}{e^2}=\dfrac{4}{e^2}$

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f\,''(g(t))g'(t)=1$

이므로 $g'(t)=\dfrac{1}{f''(g(t))}$ ……㉢

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f\,'(g(t))g'(t)=h'(t)$이고, ㉠, ㉢에 의하여

$h'(t)=f\,'(g(t))g'(t)=tg'(t)$

$f\,'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$에서

$f\,''(x)=\dfrac{2\left(\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1\right)}{x^2}=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$

이므로

$g'(k)=\dfrac{1}{f''(g(k))}=\dfrac{1}{f''(e^2)}=\dfrac{1}{\frac{2(1-\ln e^2)}{e^4}}=-\dfrac{e^4}{2}$= 1

따라서 $k^2\times g'(k)=\dfrac{16}{e^4}\times\left(-\dfrac{e^4}{2}\right)=-8$,

$k\times h'(k)=k^2\times g'(k)=-8$이므로

$k^2\times g'(k)+k\times h'(k)^2=\{-8+(-8)\}^2$

$=(-16)^2=256$

{다른 풀이}

기울기가 $t\,(t>0)$인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때

접점의 x좌표와 y좌표가 각각 $g(t)$와 $h(t)$이므로

$f\,'(g(t))=t$ ……㉠

$f(g(t))=h(t)$ ……㉡

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 k일 때,

곡선 $y=f(x)$위의 점의 좌표를 $(a, f(a))\,(a>0)$으로 놓으면

원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의

점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$k=\dfrac{f(a)}{a}=f\,'(a)$

$f(x)=(\ln x)^2$에서 $f(a)=(\ln a)^2$이고,

$f\,'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}, f\,'(a)=\dfrac{2\ln a}{a}$이므로

$k=\dfrac{(\ln a)^2}{a}=\dfrac{2\ln a}{a}$

$(\ln a)^2=2\ln a$

$\ln a(\ln a-2)=0$

$\ln a=0$ 또는 $\ln a=2$

$a=1$또는 $a=e^2$

$a=1$이면 $k=f\,'(1)=\dfrac{2\ln 1}{1}=0$이므로

$g(t), h(t)$가 정의되지 않는다.

그러므로 $a=e^2$, 즉 $g(k)=e^2$이고,

$k=f\,'(e^2)=\dfrac{2\ln e^2}{e^2}=\dfrac{4}{e^2}$

㉠에서

$f\,'(g(t))=\dfrac{2\ln(g(t))}{g(t)}=t$이므로

$2\ln\,(g(t))=tg(t)$ ……㉢

㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{2g'(t)}{g(t)}=g(t)+tg'(t)$ ……㉣

㉣의 양변에 $t=k$를 대입하면

$\frac{2g'(k)}{g(k)}=g(k)+kg'(k)$

$k=\frac{4}{e^2}$ 이고, $g(k)=e^2$ 이므로

$\frac{2g'(k)}{e^2}=e^2+\frac{4}{e^2}g'(k)$이므로

$g'(k)=-\frac{e^4}{2}$

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$h'(t)=f\ '(g(t))g'(t)$이므로

$h'(k)=f\ '(g(k))g'(k)=f\ '(e^2)\times\left(-\frac{e^4}{2}\right)$

$=\frac{2\ln e^2}{e^2}\times\left(-\frac{e^4}{2}\right)=-2e^2$

따라서 $k^2\times g'(k)=\frac{16}{e^4}\times\left(-\frac{e^4}{2}\right)=-8$,

$k\times h'(k)=\frac{4}{e^2\times(-2e^2)}=-8$이므로

$\{k^2\times g'(k)+k\times h'(k)\}^2=\{-8+(-8)\}^2$

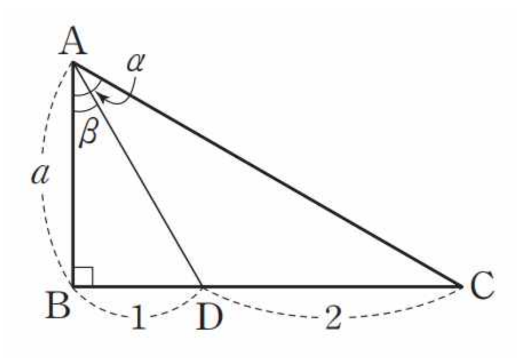
$=(-16)^2=256$

21)

[정답/모범답안]

4

[해설]



$\overline{AB}=a, \angle CAB=\alpha, \angle DAB=\beta$라 하면

그림에서

$\tan\alpha=\frac{3}{a}, \tan\beta=\frac{1}{a}$이므로

$\tan\ (\angle CAD)=\tan\ (\alpha-\beta)$

$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{3}{a}-\frac{1}{a}}{1+\frac{3}{a^2}}=\frac{2}{a+\frac{3}{a}}$

그런데 $a+\frac{3}{2}\geq 2\sqrt{3}$에서

$\tan\ (\angle CAD)\leq\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

이므로 ∠CAD의 크기가 최대가 되려면 $a=\frac{3}{a}$이어야 한다.

따라서 $a=\sqrt{3}$이므로

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{a^2+1}=2$

22)

[정답/모범답안]

5

[해설]

점 P의 좌표가 $(2\sqrt{2}-1, 1)$에서

$a(1-\cos^3 bt)=2\sqrt{2}-1>0, a\sin^3 bt=1$

이므로 $a>0, \sin bt>0$

또한 $1=\sin^2 bt+\cos^2 bt\geq 2|\sin bt\cos bt|$에서

$|\sin bt\cos bt|\leq\frac{1}{2}\left(\text{단, 등호는} |\sin bt|=|\cos bt|=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{일 때 성립}\right)$

시각 t에서 점 P의 속도는

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(3ab\cos^2 bt\sin bt, 3ab\sin^2 bt\cos bt)$

이고 $ab>0$이므로

$\left|\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\right|=\sqrt{9a^2b^2\sin^2 bt\cos^2 bt(\cos^2 bt+\sin^2 bt)}$

$=3ab|\sin bt\cos bt|$

$\leq\frac{3}{2}ab$

이므로 등호성립 조건에 의하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\sin bt=\cos bt=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

$a(1-\cos^2 bt)=a\left\{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right\}=2\sqrt{2}-1$

$a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=1$=1에서 $a=2\sqrt{2}$

(ii) $\sin bt=-\cos bt=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$a(1-\cos^3 bt)=a\left\{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right\}=2\sqrt{2}-1$에서

$a=\frac{18\sqrt{2}-16}{7}$

$a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$=1에서 $a=2\sqrt{2}$

이므로 모순이다.

이때 점 P의 좌표가 $(2\sqrt{2}-1, 1)$일 때, 속력이 18이므로

$\frac{3}{2}ab=18, ab=12$

따라서 $a=2\sqrt{2}, b=3\sqrt{2}$이므로

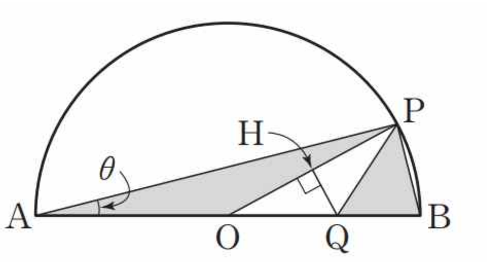
$a^2+b^2=8+18=26$

23)

[정답/모범답안]

3

[해설]



$\overline{OA}=\overline{OP}=1$, 즉 삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로 ∠OPA=θ
또한, ∠POA=π-2θ
따라서 삼각형 OPA의 넓이 S(θ)는

$S(\theta)=\frac{1}{2}1^2\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ ……㉠

점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\frac{1}{2}$이고 ∠POQ=2$\theta$이므로 $\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos 2\theta}$

즉, $\overline{PQ}=\overline{OQ}=\frac{1}{2\cos 2\theta}$

또, $\angle APB=90^{\circ}$, $\overline{AB}=2$이므로 $\overline{PB}=2\sin\theta$
따라서 삼각형 PQB의 넓이 T(θ)는

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\cos 2\theta}\times 2\sin\theta\times sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)$

$=\frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta}\times sin\theta$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)\times T(\theta)}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta\times\frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta}\sin\theta}{\theta^2}$

$=\frac{1}{4}\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin 2\theta}{2\theta}\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos 3\theta}{\cos 2\theta}$

$=\frac{1}{4}\times 2\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

24)
[정답/모범답안]
3

[해설]
$F'(x)=|\,f(x)|+a$이므로

$y=G(x)$일 때 $G'(x)=\frac{1}{F'(y)}=\frac{1}{|\,f(y)|+a}$이므로

함수 $G'(x)$가 극대이면 함수 $|\,f(y)|+a$는 극소이다.

$F(0)=0$이므로 $G'(0)=\frac{1}{F'(0)}=\frac{1}{|\,f(0)|+a}$이고

조건 (가)에서 함수 $G'(x)$가 $x=0$에서 극대이므로
함수 $|\,f(x)|+a$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값 1을 가진다. ……
㉠

적당한 양수 a가 존재해서 $F(a)=114$이면

$G'(114)=\frac{1}{F'(\alpha)}=\frac{1}{|\,f(\alpha)|+a}=1$있고

조건 (가)에서 함수 $G'(x)$가 $x=114$에서 극대이므로
함수 $|\,f(x)|+a$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값 1을 가진다. ……
㉡

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로
㉠과 ㉡이 성립하려면 $a=1$이고 $f(x)=x^2(x-a)$ 또는
$f(x)=x(x-a)^2$ ……
㉢

어느 경우에도

$F(a)=\int_0^a(|f(t)|+a)dt$

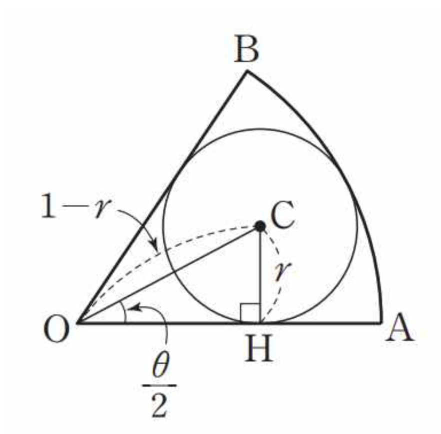
$=\int_0^a(|f(t)|+1)dt=\frac{1}{12}\alpha^4+\alpha=114$

$\alpha^4+12\alpha-1368=0$

25)
[정답/모범답안]
1

[해설]
부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ이므로 중심이 부채꼴 OAB의 내부에 있고, 두 선분 OA, OB에 접하며 호 AB와 한 점에서 만나는 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 θ라 하면

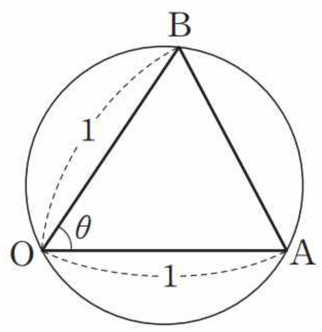
$\overline{OC}+\theta=1$, 즉 $\overline{OC}=1-\theta$ ……㉠



점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle COH=\frac{\theta}{2}$이므로

$r=\overline{OC}\sin\frac{\theta}{2}$ ……㉡



㉠, ㉡에서 $r=(1-r)\sin\frac{\theta}{2}$

$r\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta}{2}$

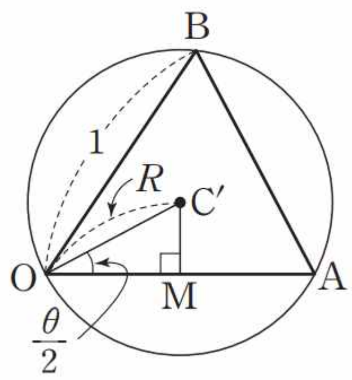
$r\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta}{2}$

$r=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

따라서 이 원의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\pi\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2=\pi\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

그림과 같이 세 점 O, A, B를 지나는 원은 삼각형 OAB에 외접하는 원과 같다.



삼각형 OAB에 외접하는 원의 중심을 C' 반지름의 길이를 R라 하고, 중심 C'에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}$

$=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

이고, $\angle C'OM=\frac{1}{2}\angle BOA=\frac{\theta}{2}$이므로 직각삼각형 OMC'에서

$\cos\frac{\theta}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{R}$, 즉 $R=\dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

이 원의 넓이 $T(\theta)$는

$T(\theta)=\pi R^2=\pi\dfrac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times\pi\frac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\pi\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}}=\lim$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=1^2\times\frac{1^2}{1^2}=1$$

26)

[정답/모범답안]

5

[해설]

ㄱ. $f'(x)=\ln x+1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 극솟값을 가진다.

또한, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 $g(t)<\frac{1}{e}<h(t)$이다. (참)

ㄴ. $0<x<\frac{1}{e}$에서 $f'(x)<0, x>\frac{1}{e}$에서 $f'(x)>0$이고,

$g(t)<\frac{1}{e}<h(t)$이므로 $f'(g(t))<0, f'(h(t))>0$이고

$f'(g(t))\times f'(h(t))<0$이다. (참)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(g(t),f(g(t)))$에서의 접선의 기울기는

$\ln(g(t))+1, f(g(t))=g(t)\times ln(g(t))=t$이므로

$l_1: y-f(g(t))=\{\ln\ (g(t))+1\}(x-g(t))$

$y=\{\ln\ (g(t))+1\}x-g(t)\times ln\ (g(t))-g(t)+f(g(t))$,

$y=\ln\ (g(t))+1x-g(t)$

같은 방법으로

$l_2: y=\{\ln(h(t))+1\}x-h(t)$

$\{\ln(g(t))+1\}x-g(t)=\{\ln(h(t))+1\}x-h(t)$에서

$x=\dfrac{g(t)-h(t)}{\ln\ (g(t))-\ln\ (h(t))}$ 이므로

$\ln\ (g(t))=\dfrac{t}{g(t)}, \ln\ (h(t))=\dfrac{t}{h(t)}$

$x=\dfrac{g(t)-h(t)}{\frac{t}{g(t)}-\frac{t}{h(t)}}=\dfrac{g(t)-h(t)}{\frac{h(t)-g(t)}{g(t)\times h(t)}\times t}=\dfrac{g(t)-h(t)}{t}$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27)

[정답/모범답안]

7

[해설]

(ⅰ) $g(k)$의 값을 구하자.

함수 $h(x)$의 최솟값이 $g(k)$이므로

$h(0)=|g(k)-f(0)|=g(k)$에서

$g(k)-f(0)=g(k)$ 또는 $g(k)-f(0)=-g(k)$

이때 $f(0)=2+3-4=1+0$이므로

$g(k)-f(0)=-g(k), g(k)=\frac{f(0)}{2}=\frac{1}{2}$2 ‘=;2!;

(ⅱ) $g'(k)$의 값을 구하자.

함수 $y=g(x+k)-f(x)$의 그래프가 x축과 만나면 함수 $h(x)$의

최솟값은 0이다. 그러나 $h(x)$의 최솟값이 $g(k)=\frac{1}{2}\neq0$이다.

따라서 $y=g(x+k)-f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는

다.

두 함수 $g(x+k), f(x)$가 모두 연속함수이므로

$y=g(x+k)-f(x)$도 연속함수이고 그래프가 x축과 만나지 않으

므로 $g(x+k)-f(x)>0$ 또는$g(x+k)-f(x)<0$이다.

$x=0$일 때 $g(x+k)-f(x)$의 값은 $g(k)-f(0)=\frac{1}{2}-1<0$이므

로 $g(x+k)-f(x)<0$임을 알 수 있다.

따라서 $h(x)=|g(x+k)-f(x)|=f(x)-g(x+k)$이므로

$h'(x)=f\ '(x)-g'(x+k)$

$h'(0)=f\ '(0)-g'(k)=0$에서

$g'(k)=f\ '(0)$이고 $f\ '(x)=4e2x-3e-x$이므로

$g'(k)=f\ '(0)=4e\hat{a}-3e\hat{a}=1$

(iii) $g'\left(k-\frac{2}{3}\right)$의 값을 구하자.

$g(x)$가 이차함수이므로 $g(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$으로 놓으면

$g'(x)=2ax+b$이므로 $g(k)=ak^2+bk+c=\frac{1}{2}$

$g'(k)=2ak+b=1$

$g(k+1)=a(k+1)^2+b(k+1)+c$

$=(ak^2+bk+c)+(2ak+b)+a=\frac{1}{2}+1+a=\frac{1}{2}+a$

$g(k-1)=a(k-1)^2+b(k-1)+c$

$=(ak^2+bk+c)-2ak-b+a=\frac{1}{2}-1+a=-\frac{1}{2}+a$

$h(1)-h(-1)=(2e^2+3e-1-4)-\frac{3}{2}-a-\left\{(2e^{-2}+3e-4)+\frac{1}{2}-a\right\}$

$=2e^2-3e+3e^{-1}-2e^{-1}-2$

의 계산 결과 값이 양수이므로 $h(1)>h(-1)$이다.

또한 $h''(x)=f''(x)-g''(x+k)=8e^{2x}+3e^{-x}-2a$이고 $a<0$이므로 $h'(x)$는 증가함수이다.

그런데 $h'(0)=0$이므로 $h(x)$는 극솟값을 1개 갖는다.

따라서 함수 $h(x)$는 닫힌구간 [-1, 1]에서 $x=1$일 때 최댓값 $h(1)$을 가지므로

$h(1)=f(1)-g(k+1)=\frac{2e^3+3}{e}-4-\left(\frac{3}{2}+a\right)$

$=\frac{2e^3+3}{e}-\frac{11}{2}-a=\frac{2e^3-e+3}{e}$

이므로 $-\frac{11}{2}-a=-1$에서 $a=-\frac{9}{2}$

따라서

$g'\left(k-\frac{2}{3}\right)=2a\left(k-\frac{2}{3}\right)+b=2ak+b-\frac{4a}{3}=1-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{9}{2}\right)=7$

28)

[정답/모범답안]

3

[해설]

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f\ '(g(x))g'(x)=3$이므로

$\int_1^2\frac{x}{f\ '(g(x))}=\frac{1}{3}g'(x)$

또한, $x=\frac{1}{3}f(g(x))$이므로

$\int_1^2\frac{x}{f\ '(g(x))}\,dx=\int_1^2\left\{\frac{1}{3}f(g(x))\times\frac{1}{3}g'(x)\right\}dx$

$=\frac{1}{9}2f(g(x))g'(x)dx$

$g(x)=t$로 놓으면

$g'(x)=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=1$일 때 $t=g(1), x=2$일 때 $t=g(2)$이므로

$\frac{1}{9}\int_1^2 2f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(1)}^{g(2)}f(t)dt=\frac{1}{9}\times 27=3$

29)

[정답/모범답안]

5

[해설]

조건 (가) $\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+1}{x}=0$에서

$x\to 0$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{2\ f(x)+1\}=0$

이때 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=-\frac{1}{2}$이고,

$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+1}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x}$

$=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2f'(0)=0$

에서 $f\ '(0)=0$

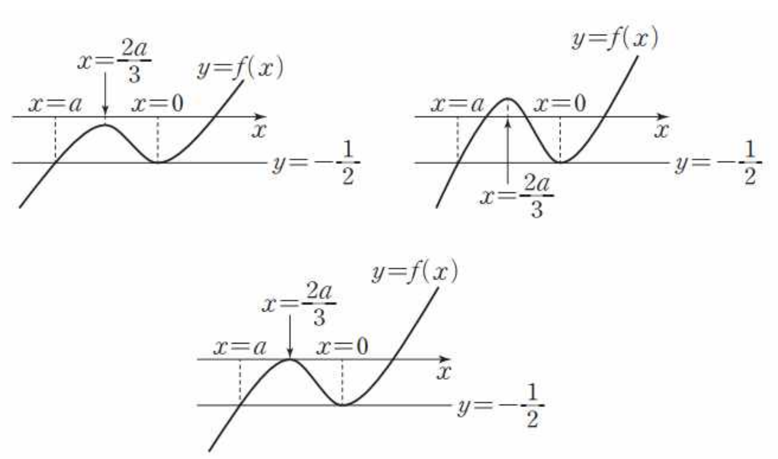
따라서 $f(0)=-\frac{1}{2}, f\ '(0)=0$을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인

삼차함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2(x-a)-\frac{1}{2}$로 놓으면

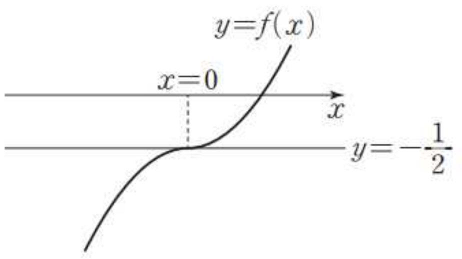
$f'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$

이므로 실수 a의 값에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

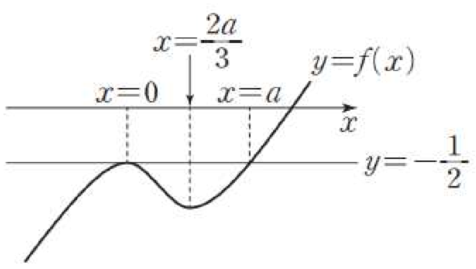
(i) $a<0$일 때



(ii) $a=0$일 때



(ⅲ) $a>0$일 때



한편

$g(x)=f(x)\times e^{f(x)-|f(x)|}$

$=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ f(x)\times e^{2f(x)} & (f(x)<0) \end{cases}$

에서 $h(x)=f(x)\times e^{2f(x)}$이라 하면

$h'(x)=f'(x)\times e^{2f(x)}+f(x)2\ f'(x)\times e^{2f(x)}$

$=\{1+2\ f(x)\}\times f'(x)\times e^{2f(x)}$

이므로

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (f(x)\geq 0) \\ \{1+2f(x)\}\times f'(x)\times e^{2f(x)} & (f(x)<0) \end{cases}$

이때 $f(x)=0$인 경우

참고 와 같이 $f(x)=0$인 경우에도 미분가능하다.

따라서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$f(x)\geq 0$일 때 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값이고,

$f(x)<0$일 때 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=-\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값이다.

(ⅰ) $a<0$일 때,

함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 될 수 있는 x의 값은 $a, \frac{2a}{3}, 0$이다.

이때 $a<0$이므로 $\sum_{k=1}^{n} x_k$의 값은 5가 될 수 없다.

(ⅱ) $a=0$일 때,

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$1+2f(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수$g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 0으로 1개뿐

이다. 즉, $x_1=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $a>0$일 때,

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$1+2f(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 0, $\frac{2a}{3}, a$로 3개이다.

즉, $x_1=0, x_2=\frac{2a}{3}, x_3=a$이므로

$\sum_{k=1}^{n} x_k=\sum_{k=1}^{3} x_k=0+\frac{2a}{3}+a=\frac{5a}{3}$

$\frac{5a}{3}=5$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=x^2(x-3)-\frac{1}{2}$이고, $f(-1)=-\frac{9}{2}, f(1)=-\frac{5}{2}$

이므로

$f(-1)\times f(1)=\left(-\frac{9}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{45}{4}$

{참고}

$f(\alpha)=0$이라 하면

(ⅰ) [그림 1]에서

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)\times e^{2f(\alpha+h)}-f(\alpha)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)\times e^{2f(\alpha+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}\times e^{2f(\alpha+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\times\lim_{h\to 0-}e^{2f(\alpha+h)}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

이때 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

가 성립한다. 따라서

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}$ 이므로 함수

$g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

또한, $x=a$ 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 모두 양이므로 함수 $g(x)$는

$x=a$에서 극대 또는 극소가 되지 않는다.

(ⅱ) [그림 2]에서 (ⅰ)과 같은 방법으로 생각하면

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$ 좌우에서 $g'(x)$의 부

호가 모두 음이므로 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되지

않음을 알 수 있다.

(ⅲ) [그림 3]에서

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)\times e^{2f(\alpha+h)}-f(\alpha)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)\times e^{2f(\alpha+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}\times e^{2f(\alpha+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\times\lim_{h\to 0-}e^{2f(\alpha+h)}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(\alpha+h)\times e^{2f(\alpha+h)}-f(\alpha)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(\alpha+h)\times e^{2f(\alpha+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}\times e^{2f(\alpha+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\times\lim_{h\to 0-}e^{2f(\alpha+h)}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

이때 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

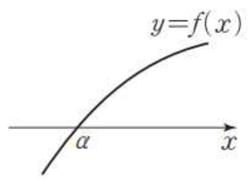
가 성립한다. 따라서

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}$이므로 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

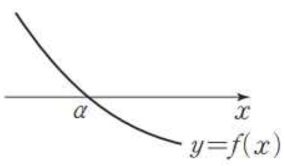
또한, $x=a$ 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다.

(ⅳ) [그림4]에서 (ⅲ)과 같은 방법으로 생각하면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$ 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

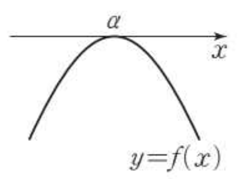
함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극소가 됨을 알 수 있다.



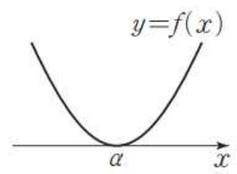
[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]



[그림 4]

30)

[정답/모범답안]

15

[해설]

$\angle BCA=\pi-4\theta$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\pi-4\theta)}=\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}$$

$\overline{AB}=3$이므로 $\overline{AC}=\dfrac{3\sin\theta}{\sin 4\theta}$

$\angle ADC=3\theta$이므로 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 3\theta}=\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}$$

$$f(\theta)=\overline{CD}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\overline{AC}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{3\sin\theta}{\sin 4\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}f(\theta)=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\sin^2\theta}{\sin 3\theta\sin 4\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}}{\frac{\sin 3\theta}{\theta}\times\frac{\sin 4\theta}{\theta}}$$
$$=\frac{3\times 1^2}{3\times 4}=\frac{1}{4}=k$$

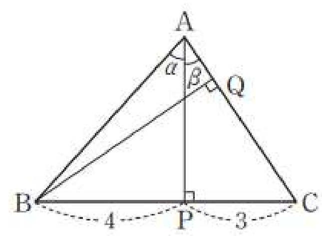
따라서 $60k=60\times\dfrac{1}{4}=15$

31)

[정답/모범답안]

5

[해설]



$4=\overline{BP}=\overline{AP}\tan\alpha, 3=\overline{CP}=\overline{AP}\tan\beta$에서

$\tan\alpha:\tan\beta=4:3$

$\tan\alpha=4k, \tan\beta=3k\ (k>0)$으로 놓으면

$$7=\tan\ (\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha+\tan\beta}$$

$$7=\frac{7k}{1-12k^2}, 12k^2+k-1=0$$

$(3k+1)(4k-1)=0$에서 $k=\dfrac{1}{4}$

즉, $\tan\alpha=1, \tan\beta=\dfrac{3}{4}$이고 $\overline{AP}=4$

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{BP}^2}=4\sqrt{2}$$

$\tan(\alpha+\beta)=7$이므로 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{7}{\sqrt{50}}$

□

$$\overline{BQ}=\overline{AB}\sin\ (\alpha+\beta)=4\sqrt{2}\times\frac{7}{\sqrt{50}}=\frac{28}{5}$$

{다른 풀이}

$\tan\alpha=1, \tan\beta=\dfrac{3}{4}$이고 $\overline{AP}=4$이므로

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PC}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$

삼각형 ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{BQ}\times\overline{AC}$$

이므로

$\frac{1}{2}\times 7\times 4=\frac{1}{2}\times \overline{BQ}\times 5$

따라서 $\overline{BQ}=\frac{28}{5}$

32)

[정답/모범답안]

18

[해설]

$h(x)=\frac{x}{e^{|x|}+1}$로 놓으면

모든 실수 x에 대하여 $h(x)=-h(-x)$이므로

$g(1)=\int_{-1}^{1}\frac{t}{e^{|t|}+1}dt=0$

$F'(1)=f'(g(1))g'(1)$

$\quad =f'(0)g'(1)=\frac{e+1}{2}\times\frac{1}{e+1}=\frac{1}{2}$

$G'(0)=g'(f(0))f'(0)$

$\quad =g'(0)f'(0)=0\left(g'(x)=\frac{x}{e^{|x|}+1}\text{이고 } g'(0)=0\right)$

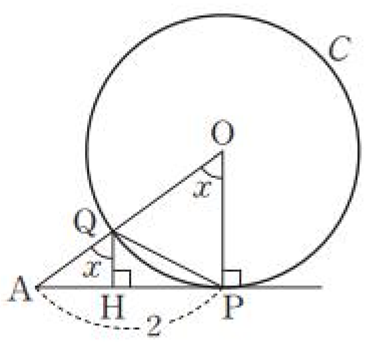
따라서 $k=\frac{1}{2}$이므로 $36k=18$

33)

[정답/모범답안]

29

[해설]



$\overline{AP}=2$이므로

점 Q에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\angle AOP=x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\tan x=\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$이므로 $\overline{OP}=\frac{2}{\tan x}$

또, $\sin x=\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}$이므로 $\overline{OA}=\frac{2}{\sin x}$

$\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로

$\overline{AQ}=\overline{OA}-\overline{OP}=\frac{2}{\sin x}-\frac{2}{\tan x}$

$\triangle OAP\backsim\triangle QAH$이므로 $\angle AOP=\angle AQH$

$\overline{QH}=\overline{AQ}\cos x$

$\quad =\left(\frac{2}{\sin x}-\frac{2}{\tan x}\right)\cos x$

$\quad =\frac{2(\cos x-\cos^2 x)}{\sin x}$

삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times\overline{QH}=\overline{QH}$

이때 $f(x)=\overline{QH}$라 하면 $f(x)=2(\cos x-\cos^2 x)$

$f'(x)=2\times\frac{(-\sin x+2\cos x\sin x)\sin x-(\cos x-\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x}$

$\quad =2\times\frac{2\sin^2 x\cos x+\cos^3 x-1}{\sin^2 x}$

$\quad =2\times\frac{2(1-\cos^2 x)\cos x+\cos^3 x-1}{\sin^2 x}$

$\quad =-2\times\frac{\cos^3 x-2\cos x+1}{\sin^2 x}$

$\quad =-\frac{2}{\sin^2 x}(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x-1)$

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $0<\sin x<1, 0<\cos x<1$이므로

$f'(x)=0$에서 $\cos^2 x+\cos x-1=0$

$\cos x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad\cdots\cdots ㉠$

이때 $0<x<\frac{\pi}{5}$에서 ㉠을 만족시키는 x를 $x=\alpha$라 하고 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 일 때 $f(x)=\overline{QH}$, 즉 삼각형 APQ의 넓이가 최대

이다. 즉, 삼각형 APQ의 넓이가 최대일 때 원 C의 넓이는

$\overline{OP}^2\times\pi=\frac{4}{\tan\alpha}\times\pi$

$\quad =4\times\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\times\pi$

$\quad =4\times\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\times\pi$

$\quad =4\times\frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}\times\pi$

$\quad =\{(3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})\}\pi=(-2+2\sqrt{5})\pi$

따라서 $a=-2, b=5$이므로 $a^2+b^2=4+25=29$

34)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$F(x)=\int_1^x f(t)dt,\ G(x)=\int_1^x tf(t)dt$이므로

$F'(x)=f(x),\ G'(x)=xf(x)$

모든 실수 x에 대하여 $e^{-xF(x)+G(x)}>0$이므로 $f(x)>0$이고,

$\ln f(x)=-xF(x)+G(x)$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=-F(x)-xF'(x)+G'(x)$에서

$\frac{f'(x)}{f(x)}=-F(x)-xf(x)+xf(x)=-F(x)$이므로

$f'(x)=-f(x)F(x)$ ……㉡

ㄱ. $x<1$일 때, $f(x)>0$이므로

$F(x)=\int_1^x f(t)dt<0$이고, $f'(x)=-f(x)F(x)>0$이다.

따라서 $x<1$일 때, $f'(x)>0$이므로 $x<1$에서 함수$f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. $f'(x)=0$에서$f(x)=0$또는$F(x)=0$

$f(x)>0$이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x는

$F(x)=0$을 만족시키는 $x=1$뿐이다.

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=-f(1)F(1)=-f(1)\int_1^1 f(t)dt=-f(1)\times 0=0$

$x>1$일 때, $f(x)>0$이므로

$F(x)=\int_1^x f(t)dt>0$이고, $f'(x)=-f(x)F(x)<0$이다.

따라서$x>1$일 때, $f'(x)<0$이므로 $x>1$에서 함수$f(x)$는 감소한다.

함수 $f(x)$에서$f'(1)=0$이고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양

(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

그러므로 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. ㉡에서 $f'(x)=-F'(x)F(x)$이므로

$f'(x)+F(x)F'(x)=0$ ……㉢

㉢의 양변을 x에 대하여 부정적분하면

$f(x)+\frac{1}{2}\{F(x)\}^2=C$ (단, C는 적분상수)

$x=1$을 대입하면 $f(1)+\frac{1}{2}\{F(1)\}^2=C$

$f(1)=1$이고 $F(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$이므로 C=1

모든 실수 x에 대하여 $f(x)+\frac{1}{2}\{F(x)\}^2=1$, 즉

$2f(x)+\{F(x)\}^2=2$이므로 $2f(2)+F(2)^2=2$

$f(2)=\frac{1}{2}$이므로 $\{F(2)\}^2=1$

$F(2)=\int_1^2 f(t)dt>0$이므로 F(2)=1 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

{다른 풀이}

$F(x)=\int_1^x f(t)dt,\ G(x)=\int_1^x tf(t)dt$이므로

$F'(x)=f(x),\ G'(x)=xf(x)$

$f(x)=e^{-xF(x)+G(x)}$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^{-xF(x)+G(x)}\times\{-xF(x)+G(x)\}'$

$=e^{-xF(x)+G(x)}\times\{-F(x)-xf(x)+xf(x)\}$

$=-e^{-xF(x)+G(x)F(x)}\times F(x)$

$f'(x)=-e^{-xF(x)+G(x)F(x)}\times F(x)$ ……㉡

ㄱ. $x<1$일 때,

$-e^{-xF(x)+G(x)}<0$이고, $f(x)>0$이므로

$F(x)\int_1^x f(t)dt<0$이고, $f'(x)=-e^{-xF(x)+G(x)}\times F(x)>0$이다.

따라서 $x<1$일 때,$f'(x)>0$이므로 $x<1$에서 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=-e^{-1\times F(1)+G(1)}\times F(1)$

$=-e^{-F(1)+G(1)}\times\int_1^1 f(t)dt$

$=-e^{-F(1)+G(1)}\times 0=0$

$x>1$일 때,

$-e^{-xF(x)+G(x)}<0$이고, $f(x)>0$이므로

$F(x)=\int_1^x 1f(t)dt>0$이고, $f'(x)=-e^{-xF(x)+G(x)}\times F(x)<0$

이다.

따라서 $x>1$일 때, $f'(x)<0$이므로 $x>1$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

함수 $f(x)$에서 $f'(1)=0$이고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

그러므로 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. ㉡에서

$f'(x)=-e^{-xF(x)+G(x)}\times F(x)$

$=-f(x)F(x)$

$=-F'(x)F(x)$

이므로

$f'(x)+F(x)F'(x)=0$ ……㉢

㉢의 양변을 x에 대하여 부정적분하면

$f(x)+\frac{1}{2}\{F(x)\}^2=C$ (단, C는 적분상수)

$x=1$을 대입하면

$f(1)+\frac{1}{2}\{F(1)\}^2=C$

$f(1)=1$이고 $F(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$

이므로 C=1

모든 실수 x에 대하여 $f(x)+\frac{1}{2}\{F(x)\}^2=1$, 즉

$2f(x)+\{F(x)\}^2=2$이므로

$2f(2)+\{F(2)\}^2=2$

$f(2)=\frac{1}{2}$이므로 $\{F(2)\}^2=1$

$F(2)=\int_1^2 f(x)dx>0$이므로 $F(2)=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

35)

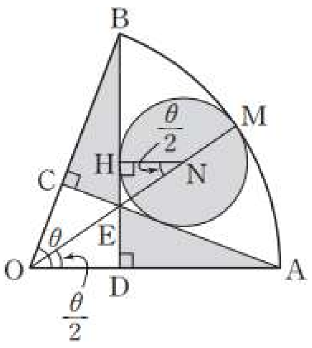
[정답/모범답안]

73

[해설]

원의 중심을 N이라 하고, 점 N에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle EOD = \angle ENH = \frac{\theta}{2}$



$\overline{AD} = 1-\cos\theta,\ \overline{DE} = \cos\theta\tan\frac{\theta}{2}$

$f(\theta)$는 삼각형 AED의 넓이의 2배와 같으므로

$f(\theta) = (1-\cos\theta)\ \cos\theta\tan\frac{\theta}{2}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OE} = \cos\theta\sec\frac{\theta}{2} + r\sec\frac{\theta}{2} + r = 1$

$\overline{OE} + \overline{NE} + \overline{MN} = 1$이므로

$\cos\theta\sec\frac{\theta}{2} + r\sec\frac{\theta}{2} + r = 1$

$$r = \frac{1-\cos\theta\sec\frac{\theta}{2}}{1+\sec\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\frac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}+1} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+1\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+1\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$g(\theta) = \pi\left\{\frac{\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+1\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}\right\}^2$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)} = \lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\left\{\frac{\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+1\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}\right\}}{\theta\times(1-\cos\theta)\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\left\{\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2-\left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+1\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}\right\}^2}{\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\times\cos\theta\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}}$$

$$= \frac{\pi\left(\frac{1-\frac{1}{4}}{2\times}\right)^2}{\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}} = \frac{9}{64}\pi$$

따라서 $p=64, q=9$이므로

$p+q=64+9=73$