[삼각형이란 무엇인가]

| 한성은 |

한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

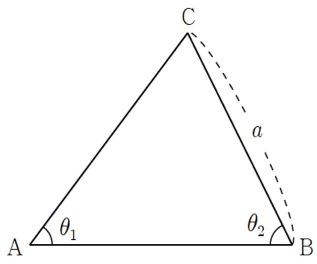
문항 완성도는 그냥 그렇습니다. 대충 푸세여 ㅎㅎ

hansungeun.com
- 저자소개, 학습자료, 교재판매

CCL

쓰기 좋은 사인법칙

문제) 예각삼각형 ABC에서 두 각 $\angle A$와 $\angle B$이 각각 θ_1, θ_2이고
변 BC의 길이가 a로 주어졌을 때, $\overline{AC}$를 θ_1, θ_2, a를 이용하여 나타내어라.

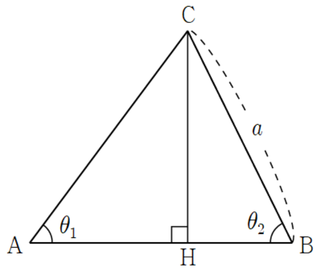


풀이1) 딱 봐도 사인법칙이다.
각이 두 개 이상 주어지거나, 외접원이 뜨면 사인법칙이라고 적어두자.

$$\frac{a}{\sin\theta_1}=\frac{\overline{AC}}{\sin\theta_2}$$

이므로 $\overline{AC}=\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\times a$이다.

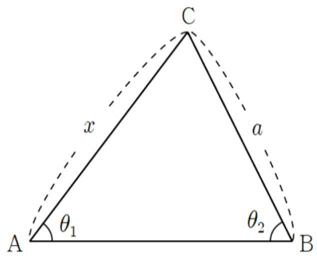
풀이2) 점 C에서 변 AB에 수선을 내리자.
길이 a와 각 θ_2와 각 θ_1을 살리는 수선이다.



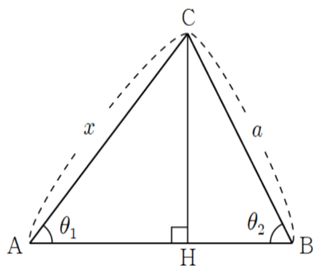
$\overline{CH}=a\sin\theta_2$이고 $\sin\theta_1=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$이므로 $\overline{AC}=\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\times a$이다.

※ 이 풀이는 풀이1)의 사인법칙을 풀어서 쓴 것이다.

풀이3) $\overline{\mathrm{AC}}$를 x라 두자.



이 그림을 보고 있으면 C에서 변 AB에 수선을 내리고 싶어진다.



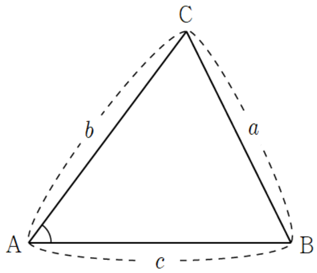
$x\sin\theta_1 = a\sin\theta_2$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = x = \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \times a$이다.

※ 야, 이건 풀이2)하고 똑같은 거 아냐? 라고 할지 모르겠는데, 그렇다. 똑같은 풀이다.
이걸 왜 다른 풀이랍시고 써 놨냐면 처음의 [x라 두자.]라는 과정을 강조하고 싶었다.
저 x라는 설정이 보조선 CH를 꺼내는 데 도움을 줬다고 볼 수 없을까?

※ 풀이2)는 사고의 흐름이 $a \to \overline{\mathrm{CH}} \to x$인 것에 비해 풀이3)은 원스텝인 삘이다.
대신 양쪽이 동시에 보여야 한다.

쓰기 좋은 코사인법칙

문제) 예각삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB의 길이가 각각 a, b, c로 주어졌을 때,
$\cos(\angle \mathrm{BAC})$를 a, b, c를 이용하여 나타내어라.

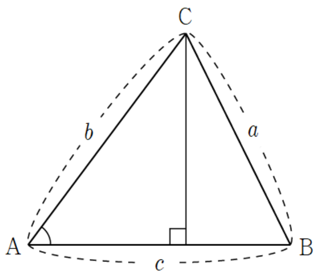


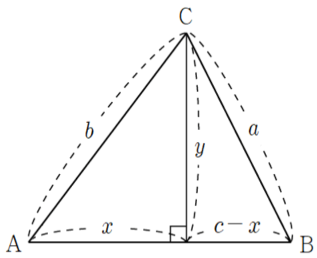
풀이1) 딱 봐도 코사인법칙이다.
각이 하나 주어졌을 때나 세 변의 길이에서 각을 구할 때는 코사인 법칙이다.

$$\cos(\angle \mathrm{BAC}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

이다.

풀이2) 점 C에서 변 AB에 수선을 내리자.





오른쪽 그림과 같이 선분의 길이를 설정하면,

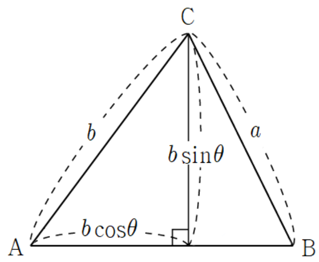
$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (c-x)^2 + y^2 = a^2$$

이다. 두 식을 빼면 x에 대한 일차식이 뜬다.

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

이므로 $\cos(\angle \mathrm{BAC}) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$이다.

풀이3) 풀이2)에서 $\angle \mathrm{BAC} = \theta$라 두고 선분의 길이들을 θ를 이용하여 나타내 보자.



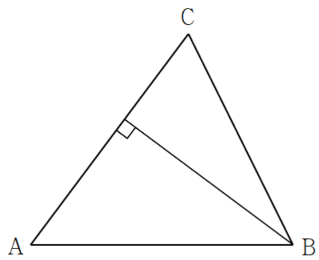
오른쪽 직각 삼각형에서 피타고라스를 치면

$$b\sin^2\theta + (c - b\cos\theta)^2 = a^2$$

이다. 정리하면 $\cos\theta = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$이다.

※ 풀이1)은 풀이2) 또는 풀이3)을 공식화 시킨 것이다.
※ 풀이2)와 풀이3)을 따로 쓴 것은 발상방법의 차이 때문이다.
풀이3)에서는 <u>구하는 값 $\cos\theta$를 이용해서</u> 길이들을 나타냈다.

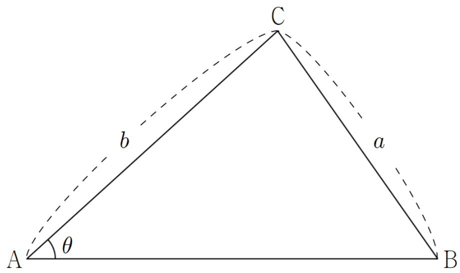
풀이4) 수선을 반대로 내려도 풀 수 있다.



※ 직각을 어디로 잡는가에 따라서 접근/풀이의 난이도가 달라진다.
이는 삼각형 분석의 가장 핵심적인 내용이다. [좌표계 설정]에서 살펴보도록 하자.

쓰기 나쁜 코사인법칙

문제) 예각삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}=\theta$이고 변 BC, CA의 길이가 각각 a, b로 주어졌을 때, $\overline{\mathrm{AB}}$를 θ, a, b를 이용하여 나타내어라.



풀이1) 끼인각이 아니라 살짝 부담스럽지만 일단은 코사인법칙이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=x$라 두면 $a^2=b^2+x^2-2bx\cos\theta$이므로 x는 방정식

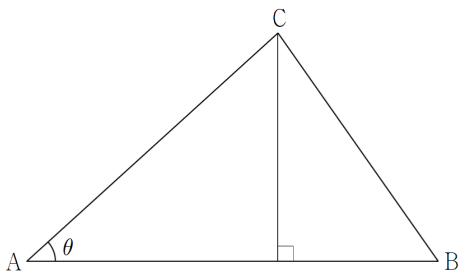
$$x^2-2b\cos\theta\times x+b^2-a^2=0$$

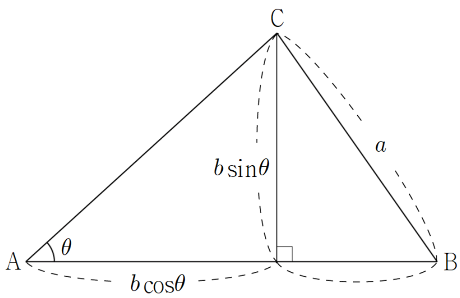
의 근이다. 근의 공식에 넣어 보면, $x=b\cos\theta\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}$이다.

이 중 $\angle \mathrm{ABC}$가 예각인 것은 $b\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}$이다.

※ 두 근 중 x값을 선택하는 것은 $\angle \mathrm{ABC}$가 예각인지, 둔각인지와 관련한다.
이에 대한 자세한 이야기는 [코사인법칙과 이차방정식]에서 다시 살펴보도록 하자.

풀이2) 이 수선은 너무나 내리고 싶다. 그렇지 않다면 병원으로.





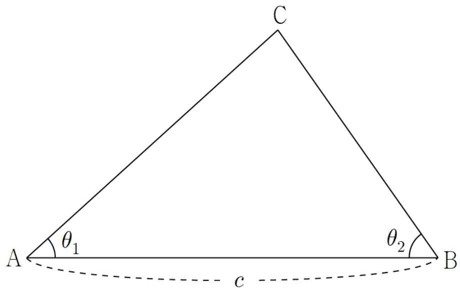
주어진 정보들에서부터 오른쪽 그림과 같은 길이들을 알 수 있고,

저기 그게 $\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=b\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}$ 이다.

쓰기 나쁜 사인법칙

문제) 예각삼각형 ABC에서 두 각 $\angle A$와 $\angle B$이 각각 θ_1, θ_2이고

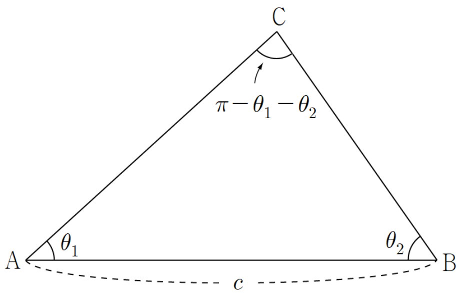
변 AB의 길이가 c로 주어졌을 때, $\overline{BC}$를 θ_1, θ_2, c를 이용하여 나타내어라.



풀이1) 각이 두 개 이상 주어져 있으므로 사인법칙이다.

$\angle C=\pi-\theta_1-\theta_2$이므로 사인법칙에 의해 $\dfrac{c}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta_1}$이다.

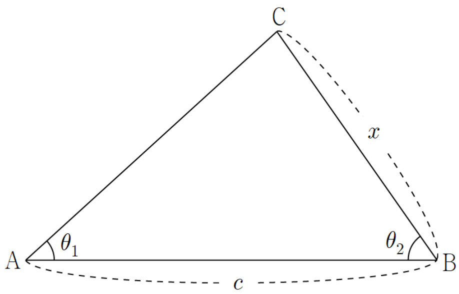
따라서 $\overline{BC}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\times c$이다. 삼각함수의 덧셈정리를 쓸 수 있으면 좋다.



이후의 풀이2)와 풀이3)에는

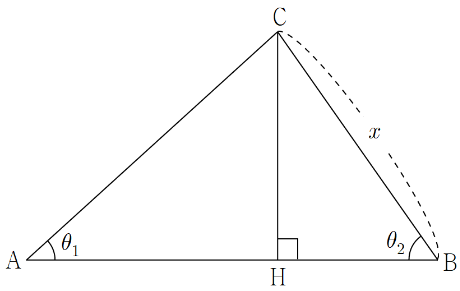
구하는 값 $\overline{BC}$를 x라 두자.

가 필요하다. 바보같이 들릴 것 같지만, 이 설정은 풀이의 가장 중요한 부분이다.
이 설정을 주면 문제를 못 풀던 학생들이 문제를 풀게 되거든. [역행추론]이라고 하더라고.



풀이2) 수선 내려서 직각삼각형 두 개로 쪼개면 되겠지?

길이 x와 각 θ_2를 살리기 위해서 내린 수선이다.



직각삼각형을 타고 길이를 옮기는 작업은 익숙해야 한다. 위 그림에서

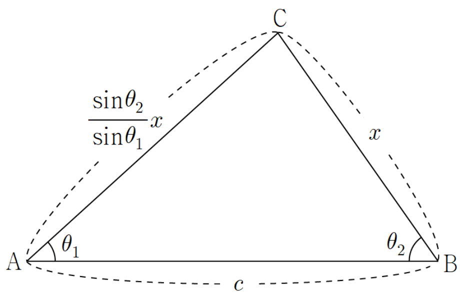
$\overline{\mathrm{BH}}=x\cos\theta_2$, $\overline{\mathrm{CH}}=x\sin\theta_2$, $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{x\sin\theta_2}{\tan\theta_1}$

이므로 $c=\left(\cos\theta_2+\dfrac{\sin\theta_2}{\tan\theta_1}\right)\times x$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=x=\dfrac{1}{\cos\theta_2+\dfrac{\sin\theta_2}{\tan\theta_1}}\times c$이다.

※ 삼각함수의 덧셈정리를 안다면 식을 정리하여 풀이1)에서 얻은 결과와 일치함을 확인하자.

※ 풀이2)는 본질적으로 전설의 제1코사인법칙이다. 삼각형 공부하다 보니까 얘를 자꾸 쓰던데?

풀이3) $\overline{\mathrm{BC}}$를 x라 두니, 사인법칙 쓰기가 좋아졌다.



변의 길이가 2개가 주어졌으니 코사인법칙을 맞음직하다.

$$\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}x\right)^2=x^2+c^2-2xc\cos\theta_2$$

이다. 풀면 나오겠지.

반대로 써도 좋다.

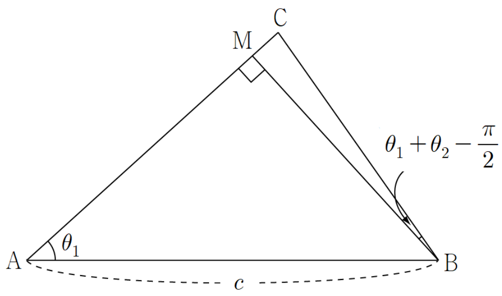
$$x^2=\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}x\right)^2+c^2-2\times\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}x\times c\times\cos\theta_1$$

※ 이 두 가지 코사인법칙은 C에서 변 AB에 수선을 내리는 것에 의해 설명된다.

⇒ 말하자면 풀이2)를 공식으로 처리한 것이 풀이3)이다.

※ 복잡한 이차방정식이 뜨지만 수1의 삼각함수의 활용 단원의 내용을 잘 적용한 풀이다.

풀이4) 점 B에서 변 AC에 수선을 내려보자.
<u>길이 c와 각 θ_1를 살리기 위해서</u> 내린 수선이다.



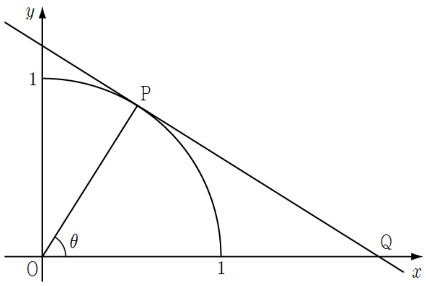
위 그림에서 $\overline{\mathrm{BM}}=c\sin\theta_1$

이므로 $\overline{\mathrm{BC}}$는 $\dfrac{c\sin\theta_1}{\cos\left(\theta_1+\theta_2-\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\times c$이다.

※ 이 수선은 풀이1)의 사인법칙을 설명해주는 수선이다.
풀이1)과 풀이4)가 서로 같은 풀이이고 풀이2)와 풀이3)이 서로 같은 풀이이다.
※ 풀이1)이나 풀이4)가 풀이2)나 풀이3)보다 간단하다.
⇒ 수1의 삼각형 문항들 중에서도 삼각함수의 덧셈정리가 편한 것들이 가끔 보인다.
※ 그림의 문제이기도 하지만, 수선을 [내리는] 것에 비해서 [올리는] 행위는 부담스럽다.
⇒ [좌표계 설정]에서 생각해보자.
※ 예각삼각형이라는 보장이 없으면 수선의 발이 변을 내분하는지 외분하는지가 부담스러울 수 있다.
⇒ 대충 정하고 계산 밀어보면 되지만, 정상적으로 수학을 하는 학생이라면 부담스러워야 한다.
⇒ [코사인법칙과 이차방정식]에서 살펴보자.

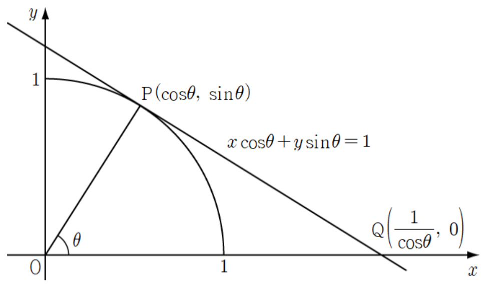
좌표계 설정

문제) 좌표평면 위의 곡선 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 x절편을 Q라 하자.
$\angle \mathrm{POQ}=\theta$라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$를 θ에 대한 식으로 나타내어라. (단, P는 제1사분면 위의 점이다.)



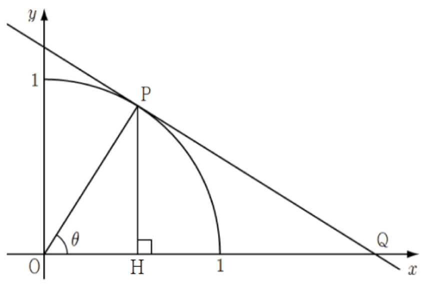
쳐맞는 풀이1) 점 P는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 접선의 방정식은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$이고 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\cos\theta-\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2+\sin^2\theta}$ 이다. 정리하면 $\sqrt{\dfrac{\cos^4-2\cos^2\theta+1+\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}=\tan\theta$이다.

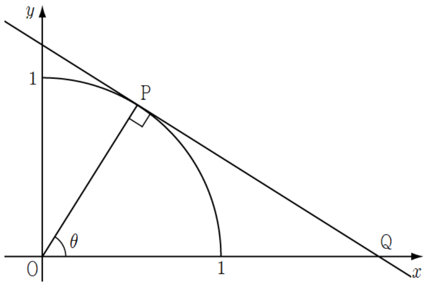


쳐맞는 풀이2) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$이고,

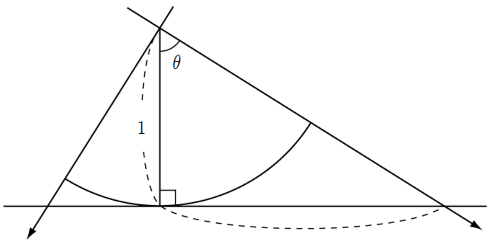
삼각형 POH와 삼각형 QPH의 닮음에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sin\theta\times\dfrac{1}{\cos\theta}=\tan\theta$이다.

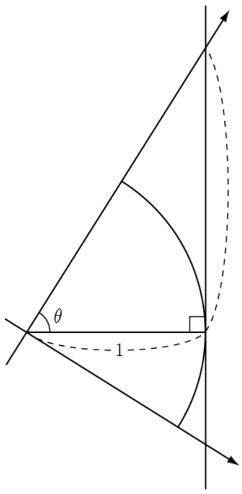


안 맞는 풀이3) 접선이므로 $\angle \mathrm{OPQ}$는 직각이다. $\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\tan\theta$이다.



※ 삼각형 문제가 어려운 이유 중 다수는 풀이3)의 직각을 못 보는 것과 관련이 있다.
아래 그림들은 문제의 그림을 돌려서 나타낸 것이다.

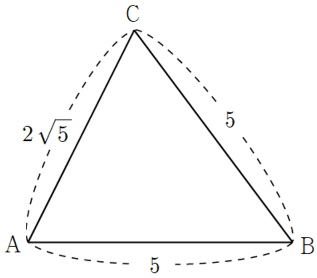




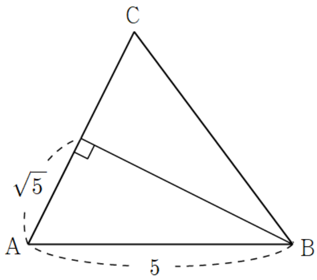
이 그림들에서 $\tan\theta$를 뽑아내지 못하겠다면 군대로.

※ 풀이2)과 풀이3)를 비교해보면, 좌표계(x축과 y축)를 돌린 것이 주효했다.
이와 같은 경우는 삼각형 문제를 풀다보면 자주 관찰된다. 아래 문항들을 다뤄보자.

문제) 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=2\sqrt{5}$일 때, $\cos(\angle CAB)$의 값을 구하여라.

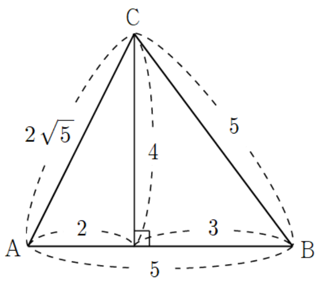


풀이1) 이등변삼각형은 이 수선이지.



답은 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이다.

풀이2) 문제를 만들다 보니까 이 삼각형의 5, 5, $2\sqrt{5}$ 조합이 자꾸 튀어 나오더라구. 왜냐면,

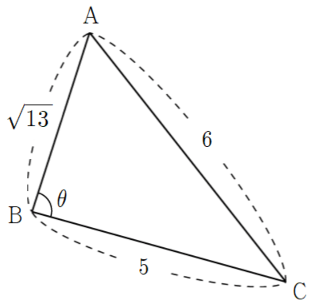


이기 때문이야.

풀이3) 코사인법칙의 장점은 수선이고 나발이고 아무 생각 없이 풀린다는 점이다. 조와.

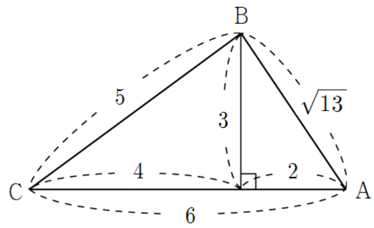
$$\cos(\angle CAB)=\frac{(2\sqrt{5})^2+5^2-5^2}{2\times 2\sqrt{5}\times 5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

문제) 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{13}$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=6$이다.
$\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.



풀이1) $\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{13})^2+5^2-6^2}{2\times\sqrt{13}\times5}=\dfrac{\sqrt{13}}{65}$이다. $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$이므로
넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times5\times\dfrac{18\sqrt{13}}{65}=9$이다.

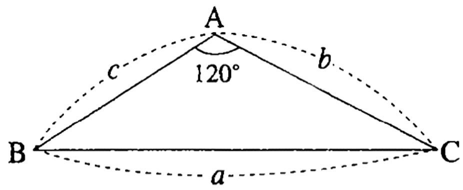
풀이2) 풀이1)이 개빡치는 이유는?



이렇게 만들어진 문제를 이상한 방향에서 풀었기 때문이다.
$\cos(\angle ABC)$가 아니라 $\cos(\angle BCA)$를 구했다면 $\dfrac{4}{5}$가 떠서 행복했다.

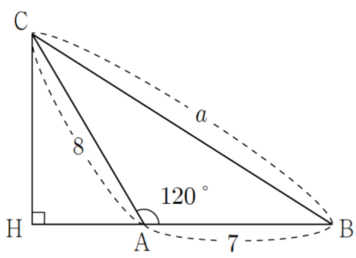
※ $\angle ABC=\theta$라고 준 것은 풀이1)을 유도하는 것이다. 낚여서 팔딱거려 보라고.

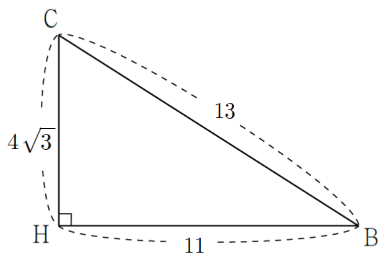
[1998학년도 수능 26번] $\triangle \mathrm{ABC}$에서 $b=8$, $c=7$, $\angle \mathrm{A}=120^\circ$일 때, a의 값을 구하여라.



풀이1) 코사인법칙 치면 답을 구할 수 있다. 13이다.

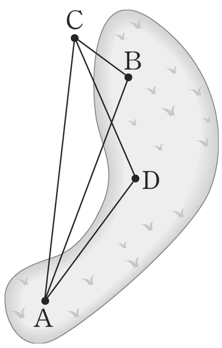
풀이2) 이 문제는 아래와 같은 방법으로 만들어진 것이다.





출제자가 가장 먼저 했던 생각은 오른쪽의 직각삼각형이다.
이후, 자기들끼리 즐거워하는 과정이 있었을 것이다.
'야, 니네 13^2-11^2이 48(약수 개많음)인 것 아냐?'
'이거 숫자 죽이는데? 이걸로 한 문제 만들 수 있겠다.'
그리고 점 A를 찍는다.
'$\overline{\mathrm{HA}}=4$ 잡으면 숫자 개꿀이네.'
그렇다고 왼쪽 그림으로 내면 너무 속보이니까 살짝 돌린다.
돌리면서 문제가 어려워 진 것이다.

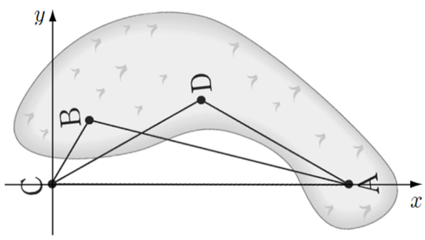
[2004학년도 9월 20번] A지점에서 공을 치기 시작하여 B지점에 이르게 하는 골프 경기가 있다.
한 방송사에서 이 골프 경기를 중계방송 하기위하여 출발점인 A지점과 $\overline{AC}=240\mathrm{m}$, $\overline{BC}=60\mathrm{m}$인 C지점에
각각 카메라를 설치하였다. 한 선수가 A지점에서 친 공이 D지점에 떨어졌을 때, A와 C지점에서
바라본 각이 $\angle CAD=\angle ACD=30^\circ$ 이었다. $\angle BCD=30^\circ$ 일 때 D지점에서 B지점까지의 직선거리는?



① $18\sqrt{21}\,\mathrm{m}$ ② $20\sqrt{21}\,\mathrm{m}$ ③ $22\sqrt{21}\,\mathrm{m}$
④ $24\sqrt{21}\,\mathrm{m}$ ⑤ $26\sqrt{21}\,\mathrm{m}$

풀이1) $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\angle BCD$를 줬다. 코사인법칙이다.

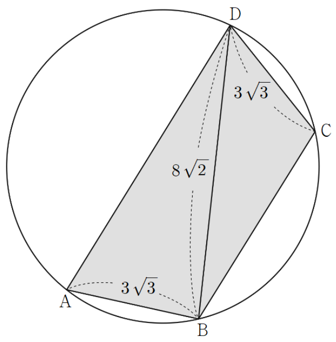
풀이2) 좌표축을 아래와 같이 설정하자.



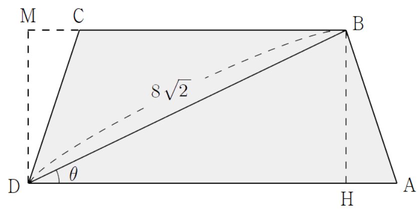
$\overline{BC}=60$, $\angle BCA=60^\circ$ 이므로 $B(30,\ 30\sqrt{3})$이며,
삼각형 ACD가 이등변삼각형이므로 $C(120,\ 40\sqrt{3})$이다.
두 점 사이의 거리는 $20\sqrt{21}$ 이다.

아마 출제자는 풀이2)의 그림에서부터 문제를 만들었을 것이다.
그리고 돌리고, 골프경기 중계방송을 얹는다.

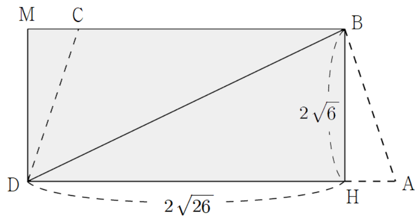
[2019년 고2 11월 28번] 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=3\sqrt{3}$, $\overline{BD}=8\sqrt{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\frac{S^2}{13}$의 값을 구하여라.



풀이) 등변사다리꼴인 것을 확인하자.

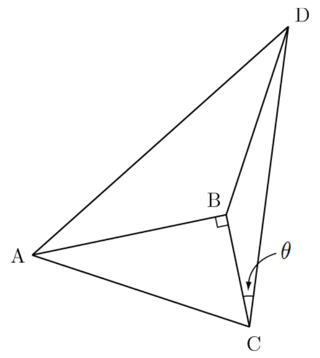


그림에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{13}}{4}$이고 삼각형 ABH와 삼각형 CDM이 서로 합동이므로 아래 그림의 직사각형의 넓이가 S이다. 답은 192다.



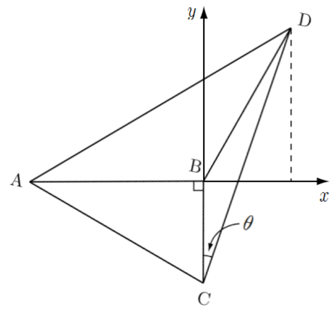
참고로 $\overline{AD}=2\sqrt{26}+\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2\sqrt{26}-\sqrt{3}$이다. 이 문제가 어려운 이유.

[한성은 SM0927번] 그림과 같이 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고, 점 D는 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$, $\tan(\angle BCD)=\frac{\sqrt{3}}{5}$를 만족시킨다. $\overline{AD}$의 값을 구하여라. (단, $\angle ACD>\frac{\pi}{3}$이다.)

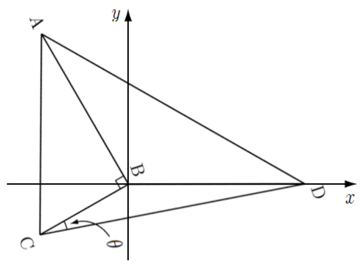


풀이) 아래 그림을 째려보자. $D(2\sqrt{3}\cos\alpha,\ 2\sqrt{3}\sin\alpha)$라 두면 $\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sqrt{3}\sin\alpha+2}=\frac{\sqrt{3}}{5}$이다.

열심히 풀면 $\tan\alpha$가 $\sqrt{3}$ 또는 $4\sqrt{3}$이 나오는디, $4\sqrt{3}$은 망하는 쪽이다. 답은 6이다.



참고) 사실 만들 때 아래의 그림에서부터 만들었다.
$A(-\sqrt{3},\ 3)$, $C(-\sqrt{3},\ -1)$, $D(2\sqrt{3},\ 0)$이다.



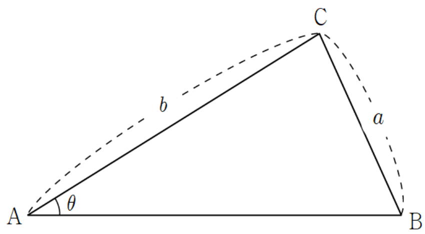
얘를 반영한 풀이는 $B(0,\ 0)$, $D(2\sqrt{3},\ 0)$와 $\angle DBA=\beta$라 두면

$A(2\sqrt{3}\cos\beta,\ 2\sqrt{3}\sin\beta)$, $C\left(2\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right),\ 2\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$에서 시작한다.

일반적인 풀이라고는 볼 수 없겠군.

코사인법칙과 이차방정식

문제) 삼각형 ABC에서 $\angle A = \theta$이고 변 BC, CA의 길이가 각각 a, b로 주어졌을 때, $\overline{AB}$를 θ, a, b를 이용하여 나타내어라.



풀이의 일부) $\overline{BC} = x$라 두면 $a^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos\theta$이므로 x는 방정식

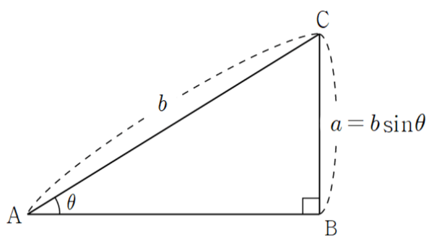
$$x^2 - 2b\cos\theta \times x + b^2 - a^2 = 0$$

의 근이다. 이 이차방정식의 근의 존재성/부호를 살펴보자.

판별식) 이차방정식 $x^2 - 2b\cos\theta \times x + b^2 - a^2 = 0$의 판별식 D는

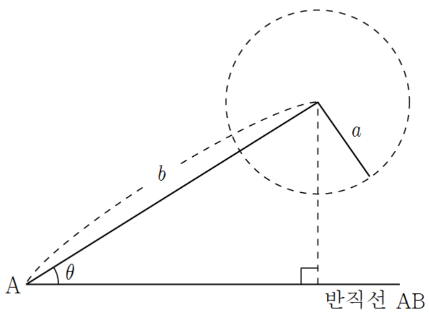
$$a^2 - b\sin^2\theta$$

이다. $D = 0$이 되는 경우는 $a = b\sin\theta$이고 $\angle ABC$가 직각이 될 때이다.

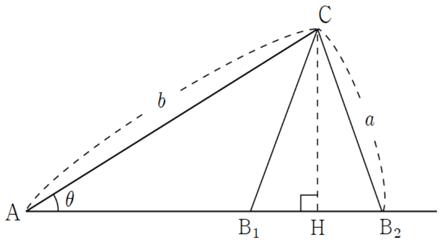


※ RHS인지 그 직각삼각형의 합동조건과 관련 있는 삘이다. 잘 생각해보기는 귀찮아.

$D < 0$, 즉 $a < b\sin\theta$인 경우에는 삼각형이 만들어지지 않는다.



$D>0$, 즉 $a>b\sin\theta$인 경우는 다음 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin\theta$이고 $a>b\sin\theta$이므로 가능한 선분 BC는 $\mathrm{B_1C}$, $\mathrm{B_2C}$의 두 가지 경우가 가능하다.

더 살펴보면, $\overline{\mathrm{AH}}=b\cos\theta$이고, $\overline{\mathrm{B_1H}}=\overline{\mathrm{B_2H}}=\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}$이므로

$\overline{\mathrm{AB_1}}=b\cos\theta-\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}$, $\overline{\mathrm{AB_2}}=b\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}$

이다. 가장 일반적인 코사인법칙의 증명과 같은 과정이다.

두 근의 부호) 사실 판별식은 조사할 필요가 딱히 없다.
간단히, $D<0$인 경우는 출제될 수 없기 때문이다.
중요하게 살펴봐야 할 것은 두 근의 부호이다.

각 θ가 예각인 경우와 둔각인 경우로 나눠서 살펴보자.

θ가 예각일 때 방정식

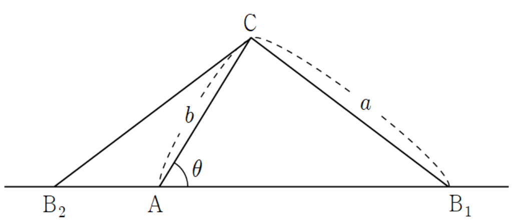
$x^2-2b\cos\theta\times x+b^2-a^2=0$

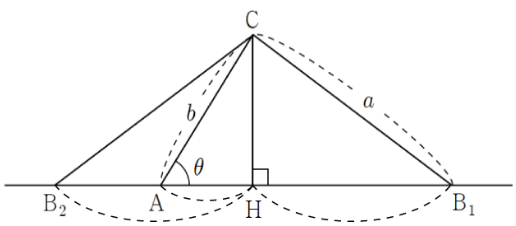
가 두 실근을 가질 때 두 실근의 합은 $2b\cos\theta$이므로 양수이고 두 근의 곱은 b^2-a^2이다. 이 방정식은,

Case1) $b>a$이면 두 양의 실근을
Case2) $b=a$이면 0과 양수 근 하나를
Case3) $b<a$이면 양수 근 하나와 음수 근 하나를 가진다.

Case1)은 위의 그림에서 본 경우이다. 출제 가능하다. 두 개의 근 중 상황에 맞는 것을 선택하면 된다.
Case2)는 이등변삼각형이 되는 경우다. 확인만 해두자. 이등변삼각형이면 애초에 코사인법칙으로 들어오질 않겠지.

Case3)의 경우는 아래 그림과 같은 상황이다.





방정식의 두 근을 x_1, $x_2(x_1<0<x_2)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB_1}}$이 x_2이고 $\overline{\mathrm{AB_2}}$가 $-x_1$이다.
삼각형 $\mathrm{AB_1C}$를 만드는 근 x_2가 코사인법칙을 치기 전에 예상하던 것이다.
오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{AH}}=b\cos\theta$이고 $\overline{\mathrm{HB_1}}=\overline{\mathrm{HB_2}}=\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}$이다.

문제는 x_1이다. 삼각형 $\mathrm{AB_2C}$가 예상과 반대방향으로 형성되어 각 θ가 내각이 아니라 외각이 되어 버린다.
따라서 음수 근인 x_1은 그냥 버리면 된다. 삼각형 $\mathrm{AB_2C}$에서 각 $\mathrm{CAB_1}$을 θ라고 하지는 않거등.

θ가 둔각일 때 방정식

$$x^2-2b\cos\theta\times x+b^2-a^2=0$$

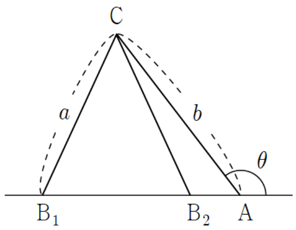
가 두 실근을 가질 때 두 실근의 합은 $2b\cos\theta$이므로 음수이고 두 근의 곱은 b^2-a^2이다. 이 방정식은,

Case4) $b>a$이면 두 음의 실근을

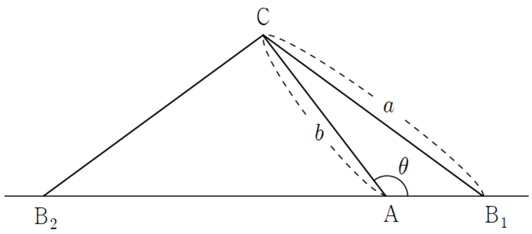
Case5) $b=a$이면 0과 음수 근 하나

Case6) $b<a$이면 양수 근 하나와 음수 근 하나를 가진다.

Case4)과 Case5)는 출제될 수 없다. 아래 그림을 살펴보자. 외각으로 코사인법칙을 친 꼴이 된다.
이쯤에서 코사인법칙을 삼각형을 버리고 좌표로 어떻게 정의하고 싶기도 했는데, 귀찮아서 관둘래.



결국 $\cos\theta$가 음수로 주어진 경우에는 Case6)만이 출제 가능하고, 두 근 중 양수인 근을 택하면 된다.



위 그림의 상황에서 코사인법칙을 사용하면 양수 근이 나타내는 삼각형 $\mathrm{AB_1C}$를 취하면 된다.
삼각형 $\mathrm{AB_2C}$와 관련하는 음수 근은 버리면 된다. 마찬가지로 θ가 바뀌기 때문.

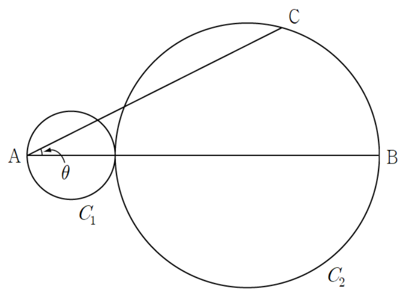
끼인각이 아닌 상황에서 코사인법칙을 사용했을 때 결론은 다음과 같다.

① 양수 근이 적어도 하나 나오지 않는 상황은 출제되지 않는다.

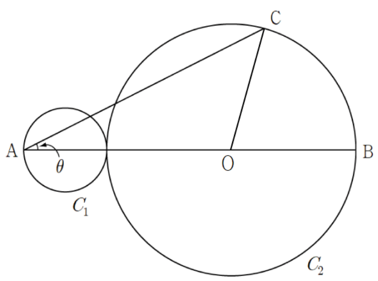
② 양수 근이 두 개 나오면 분위기 봐서 잘 선택해야 한다.

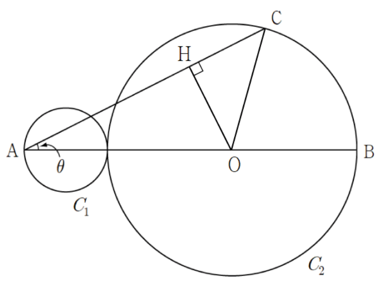
③ 양수 근이 하나이면 그것을 선택하면 된다. 이때 의미 없는 음수 근이 딸려 나올 수 있다.

[한성은 IW8762번] 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1, 3인 두 원 C_1, C_2가 서로 외접하고 있다.
원 C_1 위의 점 A, 원 C_2 위의 점 B는 $\overline{\mathrm{AB}}=8$를 만족시키고, 원 C_2 위의 점 C에 대하여 $\angle \mathrm{CAB}=\theta$일 때,
$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$이다. $\overline{\mathrm{CA}}$의 길이는? (단, $\overline{\mathrm{CA}}>4$이다.)



풀이1) 원은 뭐다? 중심에서 잇는다. 왼쪽 그림이다.





$\overline{\mathrm{CA}}=x$, 원 C_2의 중심을 O라 하자. $\overline{\mathrm{AO}}=5$, $\overline{\mathrm{OC}}=3$, $\cos(\angle \mathrm{CAO})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로 코사인법칙에서

$$3^2=x^2+5^2-2\cdot x\cdot 5\cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이다. 풀면 $x=2\sqrt{5}\pm 2$이다. $2\sqrt{5}+2$가 답인데, $2\sqrt{5}-2$가 왜 나왔는지도 이해하겠지?

풀이2) 현에다 수선을 내리고 싶다. 오른쪽 그림이다.

$\overline{\mathrm{AO}}=5$, $\cos(\angle \mathrm{CAO})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$에서 $\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{5}$이다.

직각삼각형 CHO에서 피타고라스를 치면 $\overline{\mathrm{CH}}=2$이다.

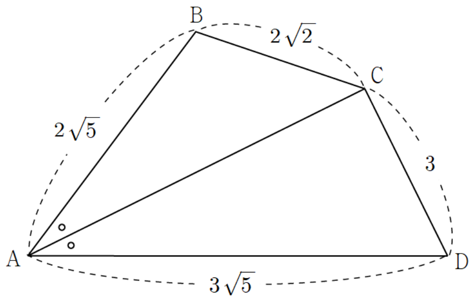
※ 이 풀이는 코사인법칙과 서로 같은 내용이지만, [현에 수선을 내리고 싶다.]에서 나온 풀이라고도 할 수 있다.
개인적으로, 수1의 삼각형 문제에 외접원이 아닌 원을 끼우면 뭔가 어정쩡하다고 느끼는 이유이기도 하다.

예제 001 [한성은 QM0634번]

그림과 같이 사각형 ABCD는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$,
$\overline{\mathrm{CD}}=3$, $\overline{\mathrm{DA}}=3\sqrt{5}$

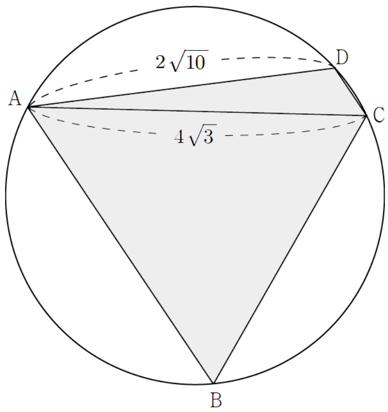
와 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$를 만족시킨다. $\overline{\mathrm{AC}}$의 값은?



① $2\sqrt{7}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ 6
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{11}$

예제 002 [한성은 LJ9885번]

그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{15}$ 인 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 선분 AB는 선분 CD와 평행하고 $\overline{AC}=4\sqrt{3}$, $\overline{AD}=2\sqrt{10}$ 이다. 사각형 ABCD의 넓이는?



① $12\sqrt{2}$　　② $12\sqrt{3}$　　③ 16
④ $16\sqrt{2}$　　⑤ $16\sqrt{3}$

예제 003 [한성은 JJ3769번]

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$인 삼각형 ABC가 있다. $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 a 또는 b이다. $a+b$의 값은?

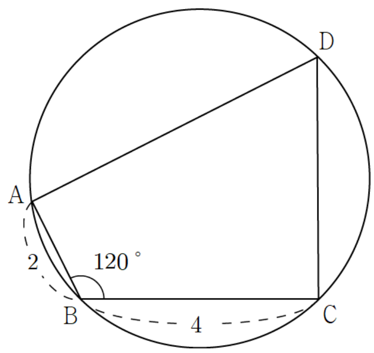
① $\sqrt{26}$　　② $2\sqrt{26}$　　③ $3\sqrt{26}$
④ $2\sqrt{39}$　　⑤ $3\sqrt{39}$

예제 004 [한성은 DV3464번]

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD는

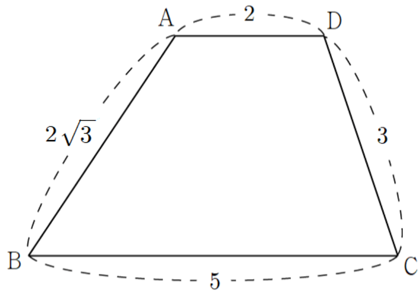
$$\overline{AB}=2,\quad \overline{BC}=4,\quad \angle ABC=120^\circ$$

를 만족시킨다. 사각형 ABCD의 넓이가 $8\sqrt{3}$일 때, 사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하여라.



예제 005 [한성은 BL4628번]

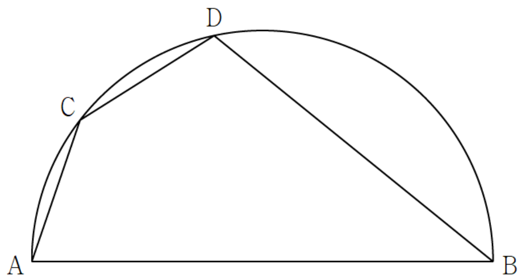
그림과 같이 변 AD와 BC가 서로 평행한 사다리꼴 ABCD에서
$\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CD}=3$, $\overline{DA}=2$일 때, 사다리꼴 ABCD의 넓이는?



① 7　② $7\sqrt{2}$　③ $7\sqrt{3}$
④ 14　⑤ $7\sqrt{5}$

예제 006 [한성은 ID8235번]

길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위의 두 점 C, D는 $\overline{AC}=2$, $\overline{CD}=2$를 만족시킨다. $\overline{BD}$의 값은?



① 4　② $\frac{13}{3}$　③ $\frac{14}{3}$

④ 5　⑤ $\frac{16}{3}$

예제 007 [한성은 EO8109번]

넓이가 $5\sqrt{3}$인 삼각형 ABC에서 $\angle BAC = 60^\circ$이고
$\overline{BC} = 2\sqrt{10}$이다. $\overline{AB} + \overline{AC}$의 값은?

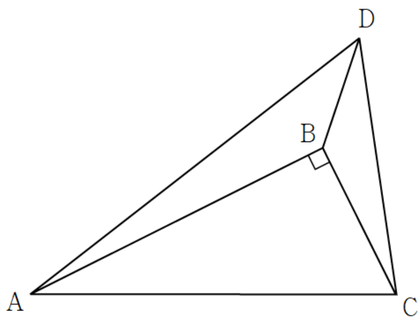
① 8 ② 9 ③ 10
④ 12 ⑤ 16

예제 008 [한성은 LB2799번]

$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$이고 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와
삼각형 ABC 밖의 점 D는 다음을 만족시킨다.

(가) $\angle ABD=\angle CBD$
(나) $\overline{BD}=\sqrt{2}$

$\cos^2(\angle ADC)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

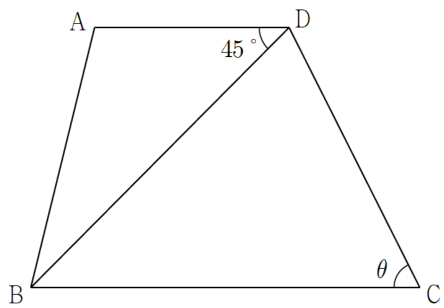


예제 009 [한성은 EB3904번]

두 선분 AD와 BC가 서로 평행한 사다리꼴 ABCD는

$$2\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}},\ \angle\mathrm{ADB}=45^\circ,\ \tan(\angle\mathrm{BCD})=2$$

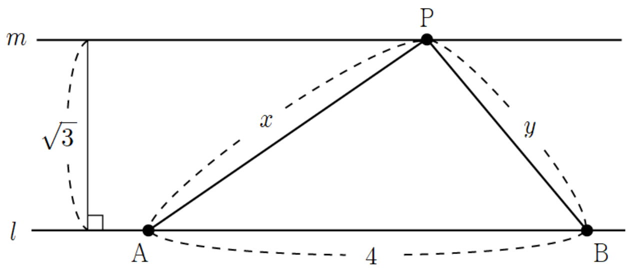
를 만족시킨다. 사다리꼴 ABCD의 넓이가 18일 때, $\overline{\mathrm{BD}}$의 값은?



① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 6
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ 8

예제 010 [한성은 ZV6571번]

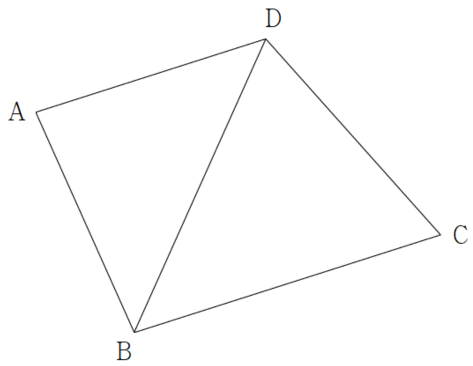
두 직선 l, m은 서로 평행하고 두 직선 사이의 거리는 $\sqrt{3}$이다. $\overline{\mathrm{AB}}=4$를 만족시키는 직선 l 위의 두 점 A, B와 직선 m 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=x$, $\overline{\mathrm{PB}}=y$라 할 때, xy의 최솟값은?



① $3\sqrt{5}$　　② $\sqrt{46}$　　③ $4\sqrt{3}$
④ 7　　⑤ $5\sqrt{2}$

예제 011 [한성은 TJ9007번]

두 선분 AD와 BC가 서로 평행한 사다리꼴 ABCD는 $\overline{AB}=\overline{AD}=3$, $\overline{BC}=\overline{BD}=4$를 만족시킨다. 사각형 ABCD의 넓이는?



① $4\sqrt{5}$ ② $\frac{14}{3}\sqrt{5}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{5}$

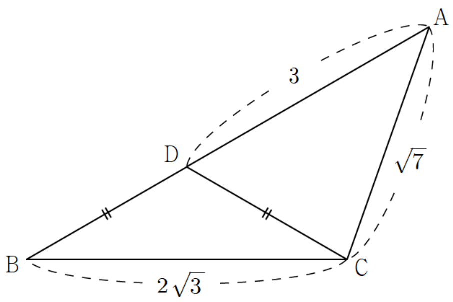
④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{20}{3}\sqrt{5}$

예제 012 [한성은 MC8481번]

그림과 같이 삼각형 ABC와 선분 AB 위의 점 D는

$$\overline{BC}=2\sqrt{3},\quad \overline{CA}=\sqrt{7},\quad \overline{AD}=3,\quad \overline{BD}=\overline{CD}$$

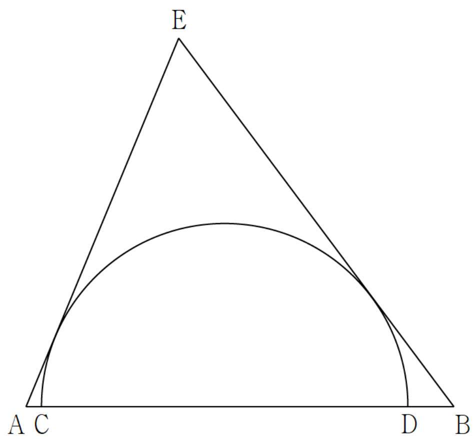
를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 넓이는?



① $\frac{5}{2}\sqrt{2}$　② $\frac{5}{2}\sqrt{3}$　③ 5
④ $\frac{5}{2}\sqrt{5}$　⑤ $\frac{5}{2}\sqrt{6}$

예제 013 [한성은 UY4106번]

그림과 같이 길이가 14인 선분 AB 위의 두 점 C, D는 $\overline{AC}=\frac{1}{2}$, $\overline{BD}=\frac{3}{2}$를 만족시킨다. 두 점 A, B에서 선분 CD를 지름으로 하는 반원에 접하는 직선들의 교점을 E라 할 때, 삼각형 ABE의 넓이를 구하여라.

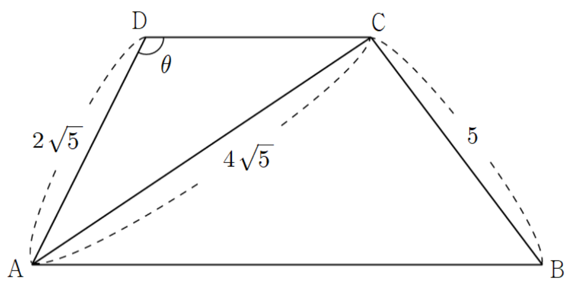


예제 014 [한성은 DF8868번]

그림과 같이 두 변 AB와 CD가 서로 평행한 사다리꼴 ABCD에서

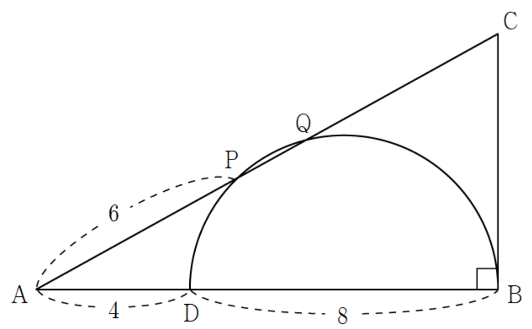
$$\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{BC}}=5$$

이고 $\angle \mathrm{ADC}=\theta$라 할 때 $\tan\theta=-2$이다. 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하여라.



예제 015 [한성은 WI5130번]

그림과 같이 $\overline{AB}=12$, $\angle B=90^{\circ}$인 직각삼각형 ABC와 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 D에 대하여 선분 BD를 지름으로 하는 반원이 선분 AC와 두 점 P, Q에서 만난다. $\overline{AP}=6$일 때, $\overline{CQ}$의 값은? (단, $\overline{AP}<\overline{AQ}$이다.)

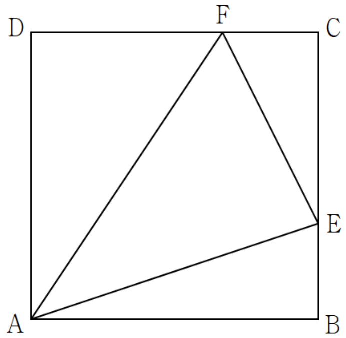


① $\frac{40}{7}$ ② 6 ③ $\frac{44}{7}$

④ $\frac{46}{7}$ ⑤ $\frac{48}{7}$

예제 016 [한성은 BG5924번]

한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD에 대하여 선분 BC를 1:2로 내분하는 점을 E, 선분 CD를 1:2로 내분하는 점을 F라 하자. 삼각형 AEF의 넓이는?

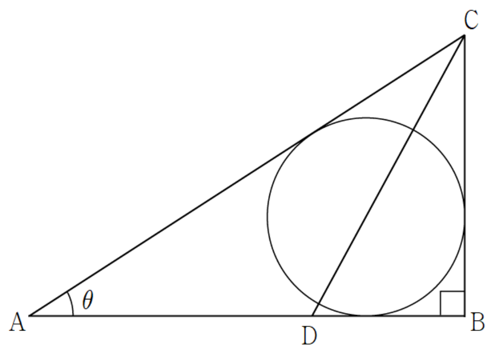


① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

예제 017 [한성은 SM7746번]

$\overline{AB}=1$, $\angle CAB=\theta$, $\angle CBA=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 C와 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 지나는 직선이 직선 AB와 만나는 점을 D라 하자. 다음 중 선분 BD의 길이를 나타내는 것은?

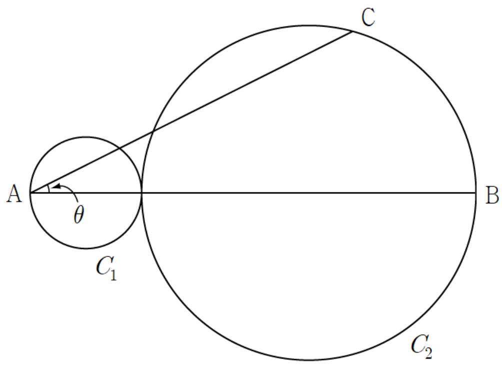


① $\dfrac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ② $\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ ③ $\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

④ $\dfrac{1}{1+\sin\theta}$ ⑤ $\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

예제 018 [한성은 IW8762번]

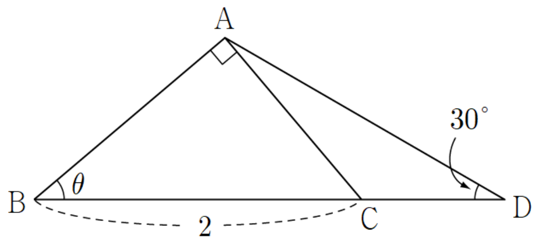
그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1, 3인 두 원 C_1, C_2가 서로 외접하고 있다. 원 C_1 위의 점 A, 원 C_2 위의 점 B는 $\overline{AB}=8$를 만족시키고, 원 C_2 위의 점 C에 대하여 $\angle CAB=\theta$일 때, $\tan\theta=\frac{1}{2}$이다. $\overline{CA}$의 길이는? (단, $\overline{CA}>4$이다.)



① 5 ② 6 ③ 7
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $2\sqrt{5}+2$

예제 019 [한성은 QE0459번]

그림과 같이 $\overline{BC}=2$, $\angle BAC=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 선분 BC의 연장선 위에 $\angle ADC=30^\circ$ 가 되도록 점 D를 잡는다. $\angle ABC=\theta$ 라 할 때, 다음 중 선분 AD의 길이를 나타내는 것은? (단, $\theta<60^\circ$ 이고 $\overline{BD}>\overline{CD}$ 이다.)

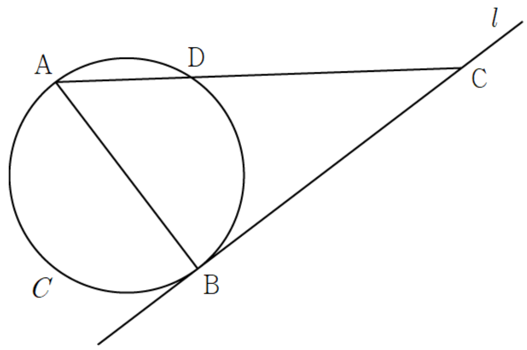


① $2\tan\theta$　　② $4\tan\theta$　　③ $\dfrac{4}{\cos\theta}$

④ $2\sin\theta\cos\theta$　　⑤ $4\sin\theta\cos\theta$

예제 020 [한성은 UY5548번]

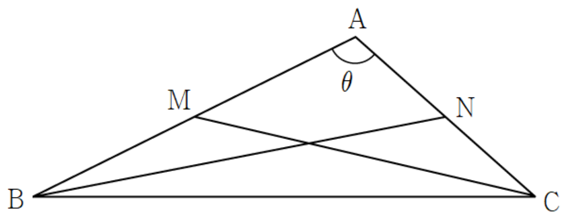
그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원 C와 점 B에서 원 C에 접하는 직선 l이 있다. 직선 l 위의 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{3}$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}$의 값은?



① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

예제 021 [한성은 FE3447번]

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=4$이고 $\angle BAC=\theta$라 할 때, $\cos\theta=-\frac{3}{8}$인 삼각형 ABC에 대하여 두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하자. $\overline{BN}\times\overline{CM}$의 값은?

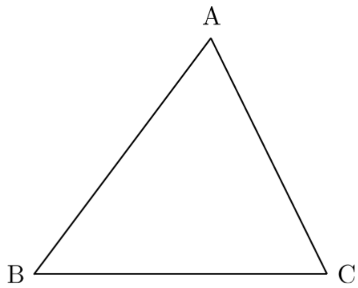


① $14\sqrt{7}$ ② $7\sqrt{30}$ ③ $8\sqrt{2}$
④ $7\sqrt{34}$ ⑤ 42

예제 022 [한성은 RI4182번]

예각삼각형 ABC에서 $\tan(\angle B)=\frac{4}{3}$, $\tan(\angle C)=2$, $\overline{BC}=5$이다.

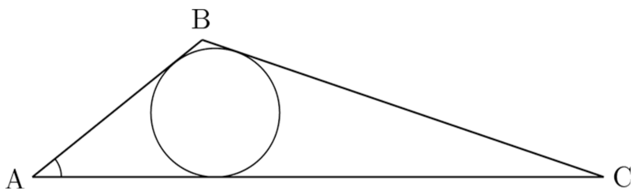
삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.



예제 023 [한성은 VL7904번]

넓이가 6인 삼각형 ABC는 $\cos(\angle A)=\frac{4}{5}$, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$를 만족시킨다.

삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는?

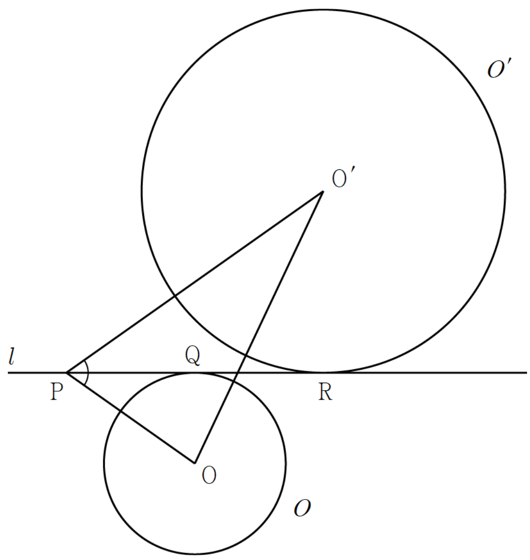


① $\frac{6-\sqrt{7}}{3}$ ② $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

④ $\frac{8-2\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{7-2\sqrt{7}}{3}$

예제 024 [한성은 NA6066번]

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 O와 중심이 O′이고 반지름의 길이가 2인 원 O'이 직선 l에 접한다. 직선 l과 두 원 O, O'의 접점을 각각 Q, R이라 하면, 직선 l 위의 점 P는 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이고 R이 아닌 점이다.
$\cos(\angle \mathrm{OPO'})=\dfrac{1}{3}$일 때, 삼각형 OPO′의 넓이는?

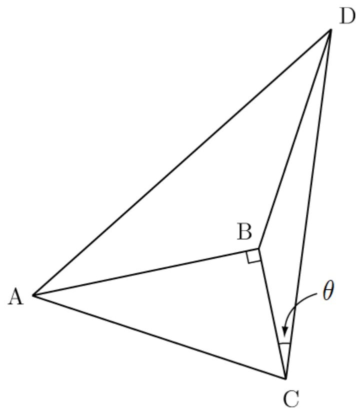


① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

예제 025 [한성은 SM0927번]

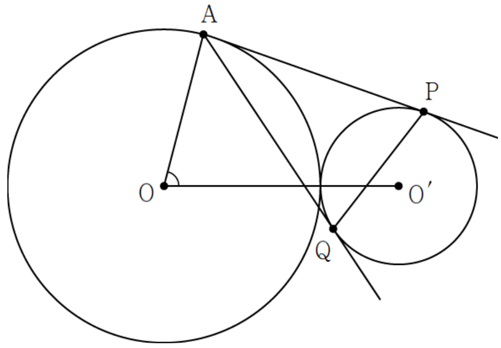
그림과 같이 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고, 점 D는 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$, $\tan(\angle BCD)=\frac{\sqrt{3}}{5}$를 만족시킨다. $\overline{AD}$의 값을 구하여라.

(단, $\angle ACD>\frac{\pi}{3}$이다.)



예제 026 [한성은 XL9688번]

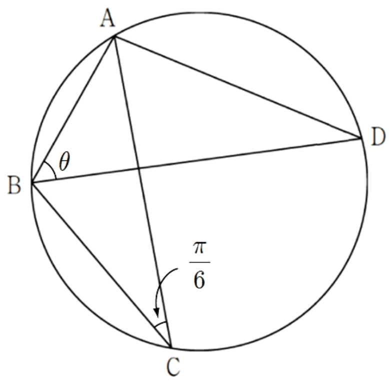
그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심이 O인 원 O와 반지름의 길이가 1이고 중심이 O′인 원 O'이 외접하고 있다. $\cos(\angle AOO') = \dfrac{1}{4}$를 만족시키는 원 O 위의 점 A에서 원 O'에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}$의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　② $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$　③ $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$　④ $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$　⑤ $\sqrt{10}$

예제 027 [한성은 YY1379번]

그림과 같이 한 원 위에 네 점 A, B, C, D가 있다. $\overline{AB}=5$, $\angle ACB=\frac{\pi}{6}$이고 $\angle ABD=\theta$일 때, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이다. $\overline{AD}$의 값은?

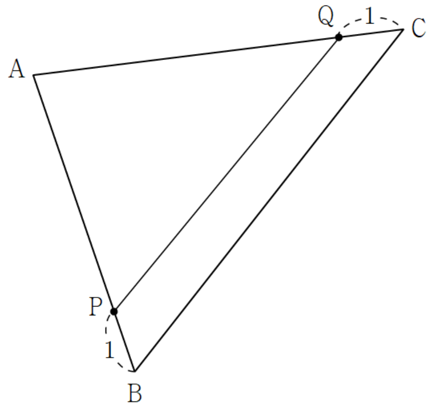


① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$

④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

예제 028 [한성은 TK1459번]

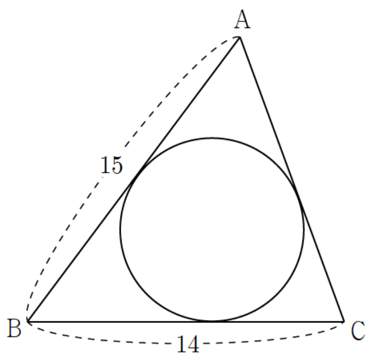
$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$, $\overline{CA}=6$인 삼각형 ABC와 변 AB 위의 점 P, 변 AC 위의 점 Q가 $\overline{PB}=\overline{QC}=1$를 만족시킨다. $\overline{PQ}$의 값은?



① $\sqrt{33}$　　② $\sqrt{35}$　　③ 6
④ $2\sqrt{10}$　　⑤ $3\sqrt{5}$

예제 029 [한성은 IS0978번]

그림과 같이 $\overline{AB}=15$, $\overline{BC}=14$, $\cos(\angle ABC)=\frac{3}{5}$인 삼각형 ABC가 있다.
삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는?



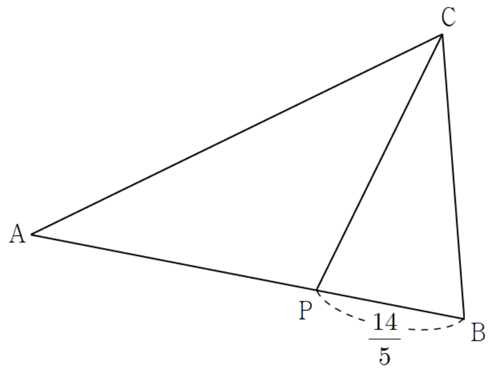
① $\frac{7}{2}$　② 4　③ $\frac{9}{2}$
④ 5　⑤ $\frac{11}{2}$

예제 030 [한성은 CO2947번]

그림과 같이 삼각형 ABC와 선분 AB 위의 점 P는

$$\overline{AP} = \overline{CP} = \overline{BC}, \quad \overline{PB} = \frac{14}{5}, \quad \cos(\angle PAC) = \frac{4}{5}$$

를 만족시킨다. 선분 AC의 길이를 구하여라.

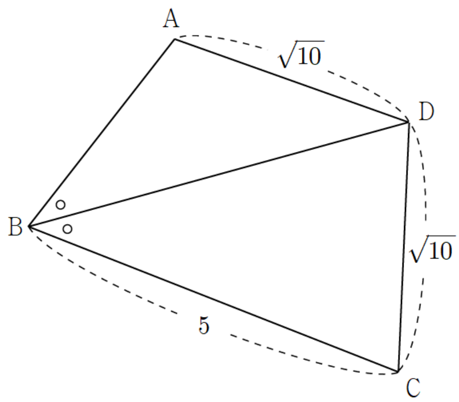


예제 031 [한성은 LC5048번]

그림과 같이 사각형 ABCD는

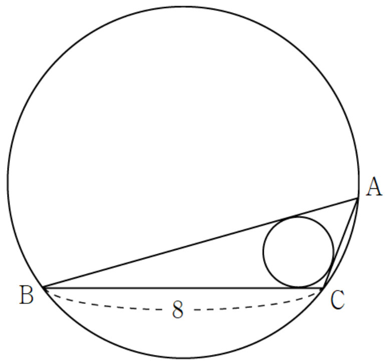
$\overline{BC}=5$, $\overline{CD}=\overline{DA}=\sqrt{10}$,
$\angle ABD=\angle CBD$

를 만족시킨다. 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 비가 $3:5$일 때, $\overline{BD}$의 값을 구하여라.



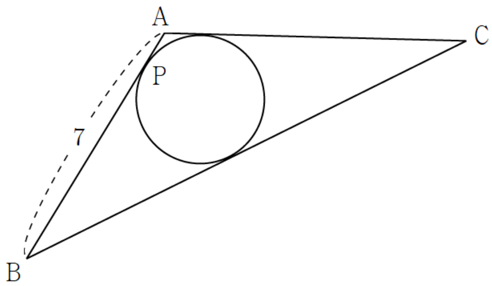
예제 032 [한성은 HN3101번]

그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{BC}=8$이고 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는 1이다. $\overline{AB}+\overline{AC}$의 값을 구하여라.



예제 033 [한성은 QG0810번]

그림과 같이 $\overline{AB}=7$이고 $\angle BAC=120°$인 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 AB와 만나는 점을 P라 하자. 점 P가 선분 AB를 $1:6$으로 내분하는 점일 때, 선분 BC의 길이를 구하여라.

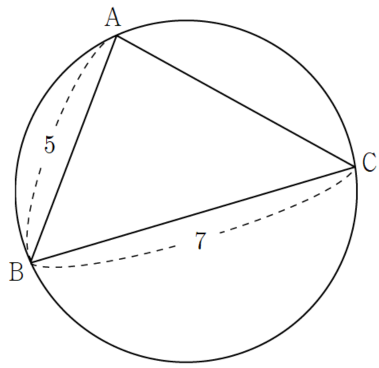


예제 034 [한성은 MC2978번]

넓이가 $\frac{25}{2}\pi$인 원에 내접하는 삼각형 ABC는

$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$

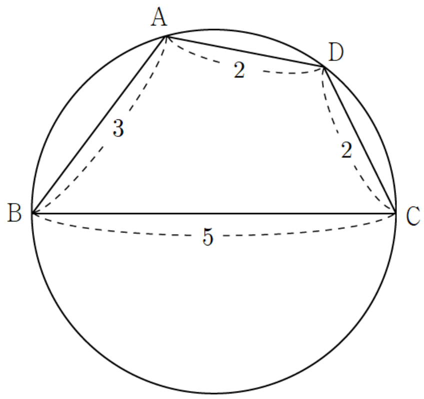
을 만족시킨다. $\overline{AC}$의 값은? $\left(단, \angle BAC < \frac{\pi}{2}\right)$



① 4　② 5　③ 6
④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

예제 035 [한성은 AZ5691번]

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CD}=2$, $\overline{DA}=2$인 사각형 ABCD가 원에 내접할 때, $\cos(\angle BCD)$의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{6}$

[정답표]

1. ③	2. ④	3. ④
4. 16	5. ②	6. ③
7. ③	8. 81	9. ②
10. ③	11. ②	12. ②
13. 84	14. 34	15. ①
16. ③	17. ⑤	18. ⑤
19. ⑤	20. ③	21. ④
22. 10	23. ②	24. ②
25. 6	26. ③	27. ④
28. ①	29. ②	30. 8
31. 5	32. 12	33. 13
34. ④	35. ③	

COMMENT 01

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$, $\overline{AC} = a$라 하면

$$\frac{(2\sqrt{5})^2 + a^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot a} = \frac{(3\sqrt{5})^2 + a^2 - 3^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot a}$$

이다.

COMMENT 02

사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다. $\overline{BC} = 2\sqrt{10}$ 이고

삼각형 ABC에서의 사인법칙에 의해 $\sin(\angle CAB) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

등변사다리꼴을 잘 쪼개보면 높이는 $\overline{AC} \times \sin(\angle CAB)$이고

아랫 변과 윗 변의 길이의 합의 절반은 $\overline{AC} \times \cos(\angle CAB)$이다.

※ $\overline{AB} = 4 + 2\sqrt{2}$, $\overline{CD} = 4 - 2\sqrt{2}$를 구하는 것도 가능하다.

COMMENT 04

삼각형 ABC를 쪼개보면, $\overline{AC} = 2\sqrt{7}$, 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

$\angle ADC = 60^\circ$ 이고 $\overline{AD} = a$, $\overline{CD} = b$라 하면

$\overline{AC}$의 길이에서 $a^2 + b^2 - ab = 28$, 넓이에서 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab = 6\sqrt{3}$

이다. 연립하여 풀면 $a + b = 10$이다.

COMMENT 05

$\overline{BD} = x$라 두면, $\cos(\angle ADB) = \dfrac{x^2 - 8}{4x}$이고 $\cos(\angle DBC) = \dfrac{x^2 + 16}{10x}$이다.

이 두 값이 서로 같으므로 $x = 2\sqrt{6}$이고 $\cos(DBC) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다.

※ A, D에서 선분 BC에 수선의 발을 내려서 직사각형 잘라내고 푸는 것도 가능하다.

COMMENT 06

$\angle ACB = 90^\circ$ 이고 $\overline{BC} = 4\sqrt{2}$이므로 $\sin(\angle ABC) = \dfrac{1}{3}$이다.

$\overline{AC} = \overline{CD}$이므로 $\angle ABC = \angle CBD$이고, $\sin(\angle CBD) = \dfrac{1}{3}$이다.

$\overline{BD} = x$라 두고 $\triangle BCD$에서 코사인 때리면 $2^2 = (4\sqrt{2})^2 + x^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot x \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

COMMENT 07

$\frac{1}{2}ab\sin60^\circ = 5\sqrt{3}$에서 $ab=20$이고

$(2\sqrt{10})^2 = a^2+b^2-2ab\cos60^\circ$에서 $a^2+b^2=60$이다.

COMMENT 08

$\overline{AC}=2\sqrt{5}$, $\overline{AD}=\sqrt{26}$, $\overline{CD}=\sqrt{10}$이다.

코사인법칙에 의해 $\cos(\angle ADC)=\frac{4}{\sqrt{65}}$이다.

COMMENT 12

$\overline{BD}=a$라 하면 $\cos(\angle DBC)=\frac{\sqrt{3}}{a}=\frac{12+(a+3)^2-7}{4\sqrt{3}(a+3)}$이다.

풀면 $a^3+6a^2+2a-36=0$에서 $a=2$이다.

COMMENT 15

선분 BD의 중점을 O라 할 때, 삼각형 AOP에서 코사인 때리면 $\cos(\angle PAO)=\frac{7}{8}$이다.

O에서 선분 PQ에 수선 내리고 째려보면 $\overline{PQ}=2$이다. 또 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\frac{96}{7}$이다.

※ 사실 방멱에 의해 $\overline{AD}\times\overline{AB}=\overline{AP}\times\overline{AQ}$이다. 최대한 안 보이게 해봤는데..

COMMENT 22

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\sqrt{5}b=2c$이다. 코사인 법칙에서 $b^2=c^2+25-6c$, $c^2=b^2+25-2\sqrt{5}b$이다.

세 식을 연립하면 $b=2\sqrt{5}$, $c=5$이고 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5\times5\times\frac{4}{5}$이다.

COMMENT 23

넓이 $\frac{1}{2}bc\sin(\angle A)$에서 $bc=20$,

코사인에서 $28=b^2+c^2-2bc\cos(\angle A)$에서 $b^2+c^2=60$이다. 연립하면 $b+c=10$이다.

내접원의 반지름의 길이 r에 대하여 $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$이므로 $r=\frac{5-\sqrt{7}}{3}$이다.

COMMENT 24

$\overline{PQ}=a$라 하자. $\overline{PO}=\sqrt{a^2+1}$, $\overline{PO'}=2\sqrt{a^2+1}$, $\overline{OO'}=\sqrt{a^2+9}$이다.
삼각형 OPO'에서 코사인 법칙 치면 $a=\sqrt{2}$이다.

COMMENT 25

$\overline{CD}=x$라 하자. 삼각형 BCD에서 $(2\sqrt{3})^2=2^2+x^2-4x\cos\theta$이다. $\rightarrow$ $x=2\sqrt{7}$.

삼각형 BCD에서 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sin(\angle CBD)}$이다. $\rightarrow$ $\angle CBD=\dfrac{5}{6}\pi$.

$\angle ABD=\dfrac{2}{3}\pi$이고 삼각형 ABD에서 $\overline{AD}=6$이다.

COMMENT 32

$\angle BAC=\theta$, $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$라 하자. 사인법칙에서 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$이다.

삼각형의 넓이에서 $\dfrac{1}{2}\times ab\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{2}\times(a+b+8)\times1$이므로 $ab=\dfrac{5}{4}(a+b+8)$이다.

코사인법칙에서 $64=a^2+b^2-2ab\times\dfrac{3}{5}=(a+b)^2-\dfrac{16}{5}ab=(a+b)^2-4(a+b+8)$이다.

COMMENT 33

$\overline{AC}=1+x$라 하면 $\overline{BC}=6+x$이다. 코사인법칙에 의해

$$(6+x)^2=7^2+(1+x)^2-14(1+x)\times\cos120^\circ$$

풀면 $x=7$이고 $\overline{BC}$는 13이다.

COMMENT 34

$\overline{AC}=b$, $\angle ABC=\theta$라 하자. 외접원의 반지름은 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$이므로

사인법칙에 의해 $\dfrac{b}{\sin\theta}=5\sqrt{2}$, 코사인법칙에 의해 $b^2=74-70\cos\theta$이다.

연립하면 $50\sin^2\theta=74-70\cos\theta$이고 풀면 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ 또는 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이다.

이 중 $\angle BAC$가 예각이 되는 것은 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$인 경우이다.

COMMENT 35

$\angle BCD=\theta$라 하면 $\angle BAC=\pi-\theta$이다.
선분 BD를 긋고 두 삼각형에서 코사인법칙을 때리면

$$5^2+2^2-20\cos\theta=3^2+2^2-12\cos(\pi-\theta)$$

이다.