[정현경/한성은 모의고사]

┃ 대학수학능력시험 수학(가형) 연습 ┃

한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

아무래도 공부에 집중하기 힘든 상황입니다만,
다 같이 망하고 있다고 생각하면 좀 나을 것 같아요.

hansungeun.com
  – 저자소개, 학습자료, 교재판매

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $2^4 \times 4^{-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

2. ${}_2\Pi_3$의 값은? [2점]

① 6 ② 8 ③ 9
④ 12 ⑤ 16

3. $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$일 때, $(\sin x + \cos x)^2$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{e^x - e}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}$ ② 1 ③ e
④ e^2 ⑤ e^3

5. $\int_{1}^{e} x\ln x dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2+1}{4}$ ③ $\frac{e^2+2}{4}$ ④ $\frac{e^2+3}{4}$ ⑤ $\frac{e^2+4}{4}$

6. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

7. 함수 $y=\frac{1}{x}(x>0)$의 그래프와 두 직선 $x=e$, $x=e^5$ 및 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $x=a$에 의하여 이등분될 때, a의 값은? [3점]

① $2e$ ② e^2 ③ $2e^2$ ④ e^3 ⑤ $2e^3$

8. $0 \le i \le 5$인 정수 i에 대하여 $(2+x)^5$의 전개식에서 x^i의 계수를 a_i라 하자. $\sum_{i=0}^{5} a_i$의 값은? [3점]

① 183 ② 198 ③ 213 ④ 228 ⑤ 243

9. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수일 때, 두 눈의 수의 합이 6의 약수일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{14}{27}$ ③ $\frac{16}{27}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{10}{27}$

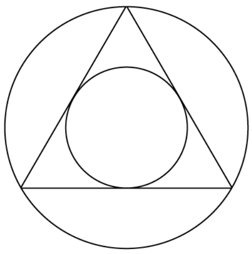
10. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{11} (-1)^k a_k = a_6$$

이고 $a_7 = 2$일 때, a_{10}의 값은? [3점]

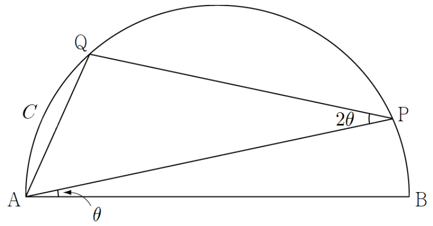
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

11. 그림과 같이 한 정삼각형과 이 정삼각형의 내접원과 외접원으로 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? [3점]



① 1260 ② 1680 ③ 2520 ④ 3760 ⑤ 5040

12. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O가 있다. 반원의 호 위의 두 점 P, Q는 $2\angle \mathrm{PAB} = \angle \mathrm{QPA}$를 만족시킨다. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}} = f(\theta)$, $\overline{\mathrm{AQ}} = g(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{2 - f(\theta)}{\{g(\theta)\}^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [3점]



① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

13. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$4\sum_{k=1}^{8} a_k = \sum_{k=5}^{12} a_k$$

이다. $a_1 a_2 = 2$일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k a_{k+1}$의 값은? [3점]

① 162 ② 150 ③ 138
④ 126 ⑤ 114

14. 함수 $f(x) = x^3 + x + 1$의 역함수가 $g(x)$이고, 미분가능한 함수 $h(x)$가

$$h(g(x)) = g(3x)$$

을 만족시킬 때, $h'(0)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \geq n^2 \ \cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때 (좌변) $=$ (우변) $=1$이므로
(*)이 성립한다.
(ii) (*)은 다음 부등식과 서로 동치이다.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{2n}{n+1}$$

$n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \geq \frac{2m}{m+1}$$

이다. $n=m+1$일 때

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} \geq \frac{2m}{m+1} + \boxed{\text{(가)}} = \frac{2m+1}{m+1}$$

한편

$$\frac{2m+1}{m+1} - \frac{2(m+1)}{m+2} = \frac{m}{(m+1)(m+2)} \geq 0$$

이므로 $\frac{2m+1}{m+1} \geq \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(4)}{f(5)}$의 값은? [4점]

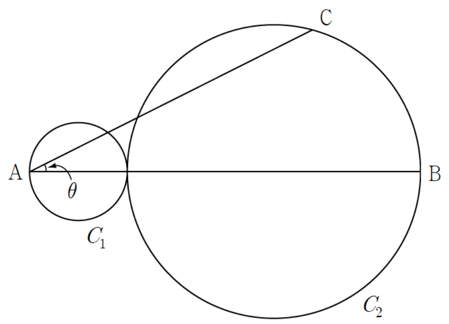
① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

16. 어느 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량은 평균이 mg이고 표준편차가 σg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균이 200g 이하일 확률과 220g 이상일 확률이 0.0668로 서로 같을 때, $m+\sigma$의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 200 ② 210 ③ 220
④ 230 ⑤ 240

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1, 3인 두 원 C_1, C_2가 서로 외접하고 있다. 원 C_1 위의 점 A, 원 C_2 위의 점 B는 $\overline{\mathrm{AB}}=8$를 만족시키고, 원 C_2 위의 점 C에 대하여 $\angle\mathrm{CAB}=\theta$일 때, $\tan\theta=\frac{1}{2}$이다. $\overline{\mathrm{CA}}$의 길이는? (단, $\overline{\mathrm{CA}}>4$이다.) [4점]



① 5 ② 6 ③ 7
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $2\sqrt{5}+2$

18. 함수 $f(x)=\sqrt{x^2+2}$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)dt$$

이다. $\int_0^4 xg'(x)dx$의 값은? [4점]

① $8\sqrt{2}$ ② $\frac{26\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
④ $10\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

19. 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는 시행을 세 번 반복할 때 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 a, b, c라 하자. $a+b+c>4$일 때, $(a-2)(b-2)(c-2)=0$일 확률은? [4점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

20. 실수 a와 함수

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

에 대하여 함수 $f(af(x))$의 최댓값을 $g(a)$라 하자. $\int_0^2 g(a)da$의 값은? [4점]

① $1+\ln 2$ ② $2+\ln 2$ ③ $3+\ln 2$
④ $1+\ln 4$ ⑤ $2+\ln 4$

21. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)e^x$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 1) \\ kf(x-a)+b & (x>1) \end{cases} \quad (a\ge 1)$$

실수 k에 대하여 $g(x)$가 실수 전체에서 미분가능하게 되는 $(a,\ b)$의 순서쌍의 개수를 $n(k)$라 할 때, $n(k)=1$이 되게 하는 k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}e^3$ ② $\frac{1}{2}e^2$ ③ e
④ $\frac{1}{2}e$ ⑤ $\frac{1}{4}e$

단답형

22. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$의 값을 a라 할 때, $20a$의 값을 구하여라. [3점]

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고

$$\mathrm{E}(2X-4)=12, \quad \sigma(2X-4)=4$$

일 때, n의 값을 구하여라. [3점]

24. 함수 $f(x)=a\cos bx+c$의 최솟값이 0, 최댓값이 12이고, 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근 중 가장 작은 것이 2π이다. abc의 값을 구하여라. (단, a, b는 양수이다.) [3점]

25. $1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{b-a}{\log_a b}=\frac{a}{3\log_b a}=\frac{b}{4}$$

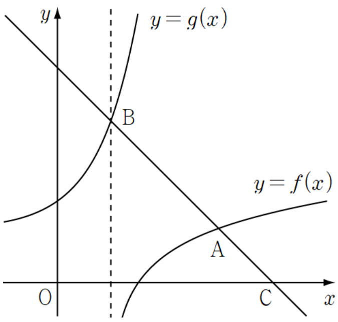
일 때, $a+b$의 값을 구하여라. [3점]

26. 자연수 k에 대하여

$$f(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+k^{n+1}}{4^n+k^n}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} f(k)$의 값을 구하여라. [4점]

27. 함수 $f(x)=\log_a(x-k)$의 역함수가 $g(x)$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=g(x)$, x축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 B가 곡선 $y=f(x)$의 점근선 위의 점이고, 점 A가 선분 BC의 $2:1$ 내분점이다. $f(2k+2)=k$일 때, $a+k$의 값을 구하여라. (단, a와 k는 양의 실수이다.) [4점]



28. 흰 공 8개와 파란 공 2개가 있다. 이 10개의 공을 5명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 공을 1개만 받는 학생이 2명이 되도록 나누어주는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않고, 모든 학생은 1개 이상의 공을 받는다.) [4점]

29. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3장의 카드와 문자 a, b, c가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하여라. [4점]

숫자가 적혀 있는 카드끼리 이웃할 때는 작은 수가 적혀 있는 것부터 크기 순서로 놓인다.

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 다음을 만족시킨다.

$f'(x)=0$의 세 실근 α, β, γ은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 또, $f(\beta) \le 0$이다.

함수 $g(x)=x^2e^{-x+2}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(x)=0$의 근이 7개다. (나) $h(x)=f(4)$의 근이 2개다. (다) $h(x)=-1$의 근이 6개다.

$f(3\sqrt{2})$의 값을 구하여라. (단, $\lim_{x \to \infty} g(x)=0$) [4점]

[정현경/한성은 모의고사]

수능(가형) 연습 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	②	03	③	04	①	05	②
06	①	07	④	08	⑤	09	①	10	⑤
11	②	12	③	13	④	14	③	15	②
16	④	17	⑤	18	③	19	②	20	①
21	①	22	10	23	16	24	18	25	10
26	42	27	4	28	780	29	384	30	48

COMMENT 12

$\angle \mathrm{PAQ} = \frac{\pi}{2} - 3\theta$, $\angle \mathrm{AQP} = \frac{\pi}{2} + \theta$인 것을 봤으면 어떻게든 풀었겠지. 원에 내접하는 사각형 ABPQ를 봐도 좋고, $\angle \mathrm{APQ}$의 중심각 $\angle \mathrm{AOQ} = 4\theta$로 가도 좋고. $f(\theta) = 2\cos 3\theta$이고, $g(\theta) = 2\sin 2\theta$이다.

COMMENT 14

$f(0) = 1$, $f(1) = 3$이므로 $g(1) = 0$, $g(3) = 1$이다. $h(g(x)) = g(3x)$를 미분하면
$g'(x) \times h'(g(x)) = 3g'(3x)$에서 $g'(1) \times h'(g(1)) = 3 \times g'(3)$이다.
※ 대응관계를 도식화시켜보면 재미있는 그림이 그려진다.

COMMENT 15

$f(m) = \frac{1}{m+1}$, $\quad g(m) = \frac{2(m+1)}{m+2}$

COMMENT 17

$\overline{\mathrm{CA}} = x$, 원 C_2의 중심을 O라 하자. $\overline{\mathrm{AO}} = 5$, $\overline{\mathrm{OC}} = 3$, $\cos(\angle \mathrm{CAO}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 코사인법칙에서

$$3^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이다. 풀면 $x = 2\sqrt{5} \pm 2$이다. 이 중 짧은 것은 $\overline{\mathrm{CA}} > 4$에 모순, $2\sqrt{5} + 2$가 답이다.
※ 원의 중심 O에서 현 AC에 수선을 내려서 푼 애들도 잘했어요.

COMMENT 18

$g'(x) = \int_0^x f'(t)dt = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}$ 이다.

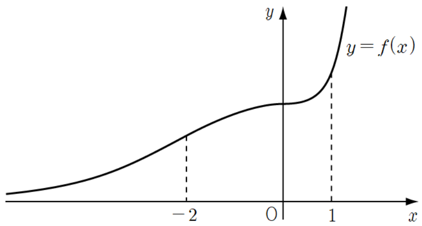
$\int_0^4 xg'(x)dx = \int_0^4 \{x\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}x\}dx$는 계산된다.

COMMENT 20

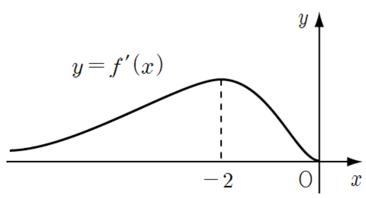
$0 \le a \le 1$일 때는 $g(a) = f(a)$이고,
$1 < a \le 2$일 때는 $g(a) = f(1)$이다.

COMMENT 21

함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$와 도함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[그림1] $y = f(x)$



[그림2] $y = f'(x)$

$kf(x-a)+b$는 [x축 방향으로 평행이동]→[y축 방향으로 k배]→[y축 방향으로 평행이동]이다.
b는 나중에 적당히 맞추면 되기 때문에 $f'(1)=kf'(1-a)$에서 $f'(1-a)$가 하나로 존재해야 한다.
$1-a=-2$이다. 나머지는 계산. 대충 변곡점이 맞을 때 하면 되겠지 뭐.

COMMENT 28

1개의 공을 받는 두 명이 받는 공의 종류에 따라 분류하자.

Case1) 둘 모두 파란 공을 받을 때 : ${}_5C_2\times{}_3H_2=60$가지.

Case2) 하나는 파란 공 하나는 흰 공을 받을 때 : $({}_5C_2\times2)\times(3\times{}_3H_2)=360$가지.

Case3) 둘 모두 흰 공을 받을 때 : ${}_5C_2\times(6\times{}_3H_2)=360$가지.

COMMENT 29

숫자가 적혀 있는 카드 세 장 중 몇 장이 서로 이웃하는지에 따라 분류하자.

Case1) 셋 모두 이웃 : 순서는 정해져 있다. 나머지 세 장과 세장 묶음의 배열. $4!=24$가지.

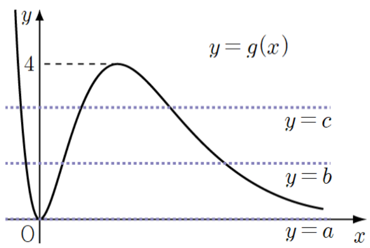
Case2) 셋 중 둘 이웃 : 누가 따로 갈지 3가지와 배열방법의 곱. → $3!\times\{3\times(4\times3)\}=216$가지.

Case3) 셋 모두 따로 : 나머지 세 장을 깔고 사이사이에 넣으면 된다. → $3!\times(4\times3\times2)=144$가지.

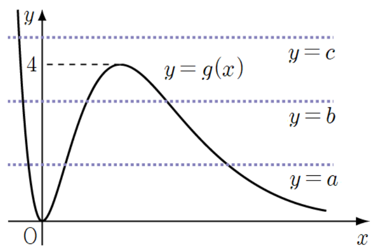
COMMENT 30

$f'(x)=0$의 세 실근이 등차수열이므로 $f(x)$의 두 극솟값은 서로 같다. $f(\beta)\le0$에서 $f(x)=0$의 근은 2개 또는 3개다.
$f(x)=0$의 근이 2개라면 (가)를 만족할 수 없다. 실수 k에 대하여 $g(x)=k$의 근은 최대 3개이기 때문이다.

따라서 $f(\beta)=0$이다. $f(x)=0$의 세 근을 a, b, c라 하면, ($b=\beta$이다.)
(가)를 만족하는 a, b, c의 조합은 다음의 두 가지가 가능하다.



Case1)



Case2)

Case1)은 $a=0$이고 b와 c가 0과 4 사이의 값을 가지는 경우,
Case2)는 a와 b가 0과 4 사이의 값이고 c가 4보다 큰 값을 가지는 경우이다.

(나)에 의해 Case2)가 불가능해진다. $f(x)=f(4)$의 근은 2개 혹은 4개인데, $h(x)=f(g(x))=f(4)$의 근이 너무 많아진다.

Case1)의 경우는 $f(x)=f(4)$의 근이 음수 근 하나와 4이다. $h(x)=f(4)$의 근은 음수 근이 0개, 4는 2개를 출력한다.
(다)에서 $f(x)$의 극솟값이 -1 각이지? 확인해보면, $h(x)=-1$의 근의 개수는 $f(x)$의 극솟값이 -1보다 클 때는 0,
$f(x)$의 극솟값이 -1보다 작을 때는 12다. $f(x)=x(x-\beta)^2(x-2\beta)$의 극솟값이 -1임을 풀자. $\beta=\sqrt{2}$이고 답은 48이다.