

기·출·의·파·급·효·과  
기하



**기하**  
기출의 파급효과

# 기하의 도구와 태도

---

Chapter 1. 필수 도형 정리와 이차곡선\_010p

Chapter 2. 벡터 쪼개기, 벡터 내적 조건 해석, 벡터 회전\_150p

Chapter 3. 공간도형\_224p

Chapter 4. 예쁜 입체, 효율적인 좌표 잡기, 공간벡터 기본\_292p

Chapter 5. 직선의 방정식, 평면의 방정식, 외적\_316p

Chapter 6. 각종 꿀팁들 모음\_368p

# 저자의 말

---

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 3년째네요. 2년 동안 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 이까지 오는 데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

## 1. 기하 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

## 2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출들을 본문 속 예시로 들었습니다. 20학년도 수능 및 22학년도 예비시행 경향과 해당 기출까지 반영되어 있습니다.

기하 기출 중 평가원 29번은 물론 오답률이 높은 문제들을 예시로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 더욱 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예시로 든 들어주는 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예시들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 21번, 29번, 30번을 풀 생각이 없어 과거의 21번, 29번, 30번을 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

## 3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

최근 교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 본문과 함께 있는 예시 문제들은 기하 교재의 경우 대략 80문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화시키기 위해 충분히 넣었습니다. 기하 교재의 경우 유제는 대략 120문제입니다. 본문 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

#### 4. 칼럼 속 예시 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예시 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제는 칼럼과 예시들을 잘 학습했다면 무리 없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 Chapter 하나만 완료하고 유제 15문제만 푸세요! 이를 실천하면 기하 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 4등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.  
약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극히 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고  
18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고  
19학년도 수능 96점을 받아내었습니다. 이외에도 기출의 파급효과와 함께한 학생들이 성적 향상을 후기로 인증하였습니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

‘벡터 회전’을 이용하여 내적의 최대, 최소를 구하는 것은 평가원 기하 준킬러, 킬러에 제일 많이 나오는 소재이다.  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대, 최소를 바로 물으면 좋겠지만 대부분은  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{PB}$  꼴처럼 단순히 그림만으로 상황을 파악하기 힘들게 주어진다. 이때 ‘벡터 쪼개기’와 ‘벡터 내적 조건 해석’을 잘 이용하여  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 형태로 바꿔줘야 한다. 이 과정이 자유자재로 된다면 벡터의 내적도 공포의 대상이 아니다.

마음을 굳게 먹자. 평가원 기하 준킬러, 킬러를 확실히 정복할 수 있는 만큼 Chapter 2의 내용은 다른 Chapter에 비해 방대하다. ‘벡터 쪼개기’, ‘벡터 내적 조건 해석’, ‘벡터 회전’을 배우기 전에 기본적인 도구부터 살펴보자.

### ◇ 기본적인 도구

기본적인 도구에서는 동점과 정점의 구별, 벡터의 평행이동, 벡터의 정사영에 대해 다룬다.

#### ◇ 1. 동점, 정점 구별

‘동점’, ‘정점’은 Chapter 2뿐만 아니라 이 교재 전반에 나오는 용어이다.

동점은 말 그대로 움직이는 점이다. 동점  $P$ 가 이루는 자취로는 대표적으로 좌표평면에서는 원, 호, 직선 등이 있으며 좌표공간에서는 구, 구면, 원뿔의 밑면의 테두리, 직선 등이 있다.

정점은 말 그대로 고정된 점이다. 예를 들어 좌표평면에서 점  $A(1, 2)$ 이나 좌표공간에서 점  $B(1, 2, 3)$ 처럼 구체적인 좌표가 주어진 경우 정점이라고 부른다. 하지만 구체적인 좌표가 안 주어진 경우에도 ‘정점’인 경우가 있다. 좌표평면이나 좌표공간에서 점  $C$ 를 고정시켜도 문제 상황이 동일하다면 점  $C$ 도 ‘정점’이라고 할 수 있다.

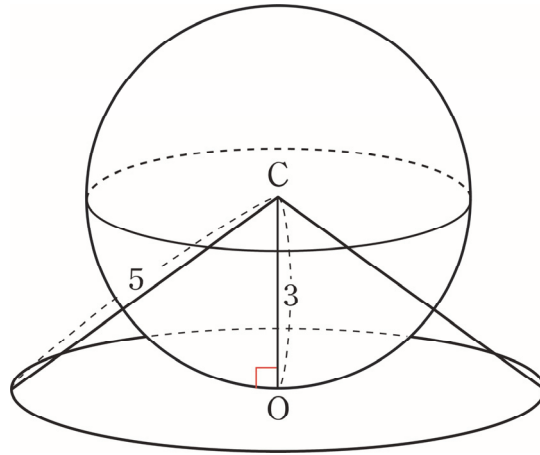
문제 상황이 동일한지의 여부는 직관적으로 판단할 수 있다. 자작 문제로 예를 들어 보겠다.

### 자작문제

좌표공간에서 구  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$  위의 점 P가 있다. 구의 중심을 점 C(0, 0, 3)이라고 할 때,  $\overline{CX} = 5$ 를 만족시키며  $xy$  평면에 있는 점 X가 있다. 점 X와 점 P 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은?

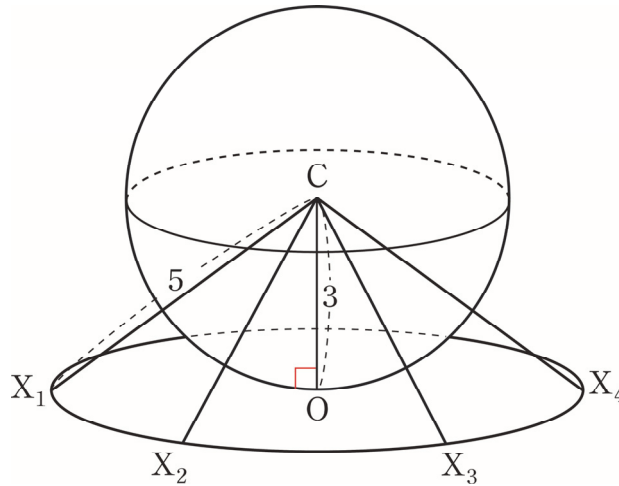


1. 구  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ 가 원점  $O$ 에서  $xy$ 평면에 접하므로 그림도 어렵지 않게 그릴 수 있다. 점  $C$ 의 수선의 발이 점  $O$ 이므로 **직각 표시**를 꼭 해주자.



점  $X$ 는  $\overline{CX} = 5$ 를 만족시키며  $xy$ 평면 위에 있으므로 점  $O$ 를 중심으로 하고 반지름이 4인 원 위에 존재한다.

2.

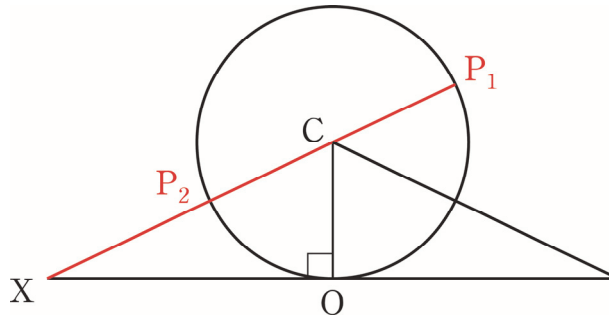


점  $X_1$ , 점  $X_2$ , 점  $X_3$ , 점  $X_4$  모두 점  $O$ 를 중심으로 하고 반지름이 4인 원 위에 존재하므로 점  $X$  위치의 후보가 된다. 하지만 직관적으로 **점  $X$ 가 네 개의 점 중 어떤 점에 고정하더라도 점  $X$ 와 점  $P$  사이의 거리의 최댓값, 최솟값은 일정할 것이기에 문제 상황이 동일하다**는 것을 알 수 있다. 따라서 점  $X$ 는 ‘**정점**’이라 할 수 있다.

그에 반해 점  $P$ 는 구  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$  위의 위치에 따라 점  $X$ 와 점  $P$  사이의 거리의 최댓값, 최솟값이 변한다. 따라서 점  $P$ 는 **자취가 구  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ 인 ‘동점’**이라 할 수 있다.



3.



입체의 평면화가 쉽도록 점  $X$ 를 점  $X_1$ 에 고정시켰다.  $\overline{XP}$ 가 최댓값, 최솟값을 가질 때는 점  $X$ , 점  $C$ , 점  $P$ 가 일직선 위에 있다. 점  $P$ 가 점  $P_1$  위치에 있을 때  $\overline{XP}$ 가 최댓값을 가지며 점  $P$ 가 점  $P_2$  위치에 있을 때  $\overline{XP}$ 가 최솟값을 가진다. 따라서  $\overline{XP}$ 의 최댓값은  $5 + 3 = 8$ 이며 최솟값은  $5 - 3 = 2$ 이다.

comment

대부분 이 정도 직관은 갖고 있겠지만 직관이 부족하더라도 걱정마라. 의심되면 점  $X$ 를 점  $X_1$ 뿐만 아니라 점  $X_2$ , 점  $X_3$ , 점  $X_4$  등의 위치에 '고정'시키며 답이 같은지 확인하면 된다. 시간은 좀 걸리겠지만 직관이 천천히 쌓일 것이다. Chapter 2에 있는 문제를 다 풀어보면 준수한 수준의 직관이 후천적으로도 생길 것이다.

## ◇ 2. 벡터 평행이동

두 벡터가 크기와 방향만 같으면 서로 같은 벡터이기에 **벡터의 평행이동을 시점과 종점의 평행이동이라고 생각**하면 편하다. 2개 이상의 벡터의 합이나 내적을 편하게 다루기 위해서는 시점 또는 종점을 맞춰줘야 한다.

### (1) 시점과 시점 맞추기

주로 벡터 내적 조건을 다룰 때는  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  꼴처럼 두 벡터의 시점을 맞춰주는 것이 다루기 쉽다. 두 벡터의 시점을 맞춰주어야 두 벡터가 이루는 각을 나타낼 수 있기 때문이다. 두 벡터의 시점을 맞추는 방법에는 크게 수식적인 방법과 도형적인 방법이 있다. 둘 다 자유자재로 다룰 줄 알아야 한다.

수식적으로 두 벡터의 시점을 맞추는 대표적인 방법은 벡터의 뺄셈을 이용한  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ 이다. 이를 이용해  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) \cdot \overrightarrow{PB}$  처럼 정리해 줄 수 있다.

**점 A, 점 B, 점 P가 정점이나 동점이나**에 따라  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$  꼴처럼 시점을 맞춰주는 것이 유리할 때도 있다. **점 A, 점 B, 점 P가 모두 정점**이고 점 M이 점 A와 점 B의 중점일 때,  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2 \times \overrightarrow{PM}$  처럼 이후에 배울 '벡터 쪼개기'를 이용하여 벡터를 단순화하면 다루기 쉽다.

**점 A, 점 B가 정점이고 점 P가 동점**이고 점 M이 점 A와 점 B의 중점일 때에도  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2 \times \overrightarrow{PM}$  처럼 이후에 배울 '벡터 쪼개기'를 이용하여 벡터를 단순화하면 다루기 쉽다. 동점 P와 정점 M과의 관계만 확인하면 되기 때문이다. 동점 P와 정점 A와의 관계와 동점 P와 정점 B와의 관계를 동시에 생각하는 것보다 훨씬 편리하다.

도형적으로 두 벡터의 시점을 맞추는 방법은 평행이동이다.

$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG}$ 의 값은?  $\overrightarrow{EG}$ 를 평행이동하면  $\overrightarrow{HD}$ 이므로  
 $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HD} = |\overrightarrow{HF}|^2 = 4$ 이다.  
 수식적으로는  $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF} \cdot (\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HE})$ 로 시점을 맞춰 풀 수도 있다.

점 B를 원점으로, 직선 BC를  $x$ 축, 직선 BA를  $y$ 축으로 잡자.  
 점 E(0, 3), 점 F(4, 3), 점 G(2, 6), 점 H(2, 3)이다.  
 $\overrightarrow{HF} = (2, 0)$ ,  $\overrightarrow{EG} = (2, -3)$ 이므로  $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = 4$ 이다.

점 E, 점 F, 점 G, 점 H가 모두 정점일 때는 좌표로 푸는 것이 제일 쉽다.  
 따라서 도형적으로 시점을 맞추는 방법의 유리함을 잘 느낄 수 없다. 하지만 동점이 하나 이상 있을 때는 도형적으로 시점을 맞추는 방법이 매우 유리하다.

'벡터 회전'에서 예시를 풀다 보면 말이 아닌 마음으로 와닿게 될 것이다.

## (2) 시점과 종점 맞추기

주로 벡터의 합 조건을 다룰 때는  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  꼴처럼 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞춰주는 것이 다루기 쉽다. 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 방법에는 크게 수식적인 방법과 도형적인 방법이 있다. 둘 다 자유자재로 다룰 줄 알아야 한다.

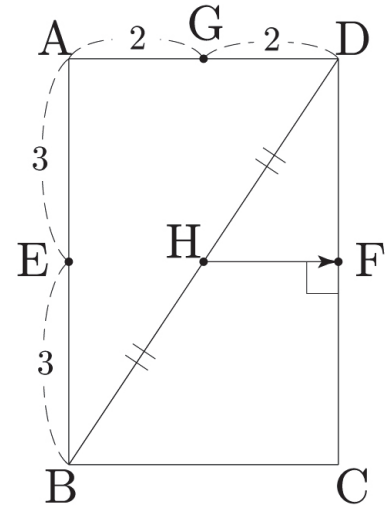
수식적으로 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 대표적인 방법은 벡터의 덧셈을 이용한  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC}$  이다. 내적 조건도  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PB}$  처럼 종점을 맞춰줄 수 있다.

도형적으로 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 방법은 평행이동이다.

$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF}$ 를 간단히 하면?  $\overrightarrow{EG}$ 를 평행이동하면  $\overrightarrow{BH}$ 이므로  
 $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{BF}$ 로 간단히 할 수 있다.

점 E, 점 F, 점 G, 점 H가 모두 정점이라 그리 어렵지 않았을 것이다. 하지만 동점이 섞인다면 어떨까? 원점 O는 정점이고 점 A, 점 B가 동점이라면  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 를 만족하는 동점 C의 자취의 영역은 어떻게 구할까?

이후에 배울 '벡터 쪼개기'를 이용하여  $\overrightarrow{OC} = 2 \times \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = 2 \times \overrightarrow{OM}$ 로 바꾸면 쉽지 않을까?



아니다. 점 A, 점 B가 동점이기에 점 M도 동점이다.

동점과 동점의 중점이 그리는 자취를 구해야 하는데 대부분의 문제 상황에서 쉽지 않은 일이다.

따라서 최선의 수단은 가장 기본적인 도구인 벡터 평행이동으로 동점 C의 자취의 영역을 직접 그리는 것이다. 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추기로 그림을 그리다 보면 선분이나 호를 연장하거나 평행이동을 해야 하는데 그림을 잘 못 그린다면 매우 힘들고 실수하기 쉽다.

어떻게 하면 벡터 평행이동의 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞춰가며 자취의 영역을 쉽고 정확하게 그릴 수 있을까?

점 A가  $\widehat{PQ}$ 나  $\overline{PQ}$  위를 움직이고 점 B가  $\widehat{RS}$ 나  $\overline{RS}$  위를 움직인다고 가정해보자.

먼저  $\overrightarrow{OA}$ 의 종점인 점 A를 점 P에 고정하자.  $\overrightarrow{OB}$ 를 평행이동하여 시점 O를  $\overrightarrow{OA}$ 의 종점 P에 맞추고  $\overrightarrow{OB}$ 를 그리자. 이는 곧 점 C의 자취의 '테두리'의 일부이다.

그 이유는  $\overrightarrow{OB}$ 를 평행이동하여 시점 O를  $\overrightarrow{OA}$ 의 종점 P에 맞추면 종점 B는 점 C에 맞춰져  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PC}$ 이다.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PC}$ 이므로  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$ 이기 때문이다.

이제  $\overrightarrow{OA}$ 의 종점인 점 A를 점 Q에 고정하자.  $\overrightarrow{OB}$ 를 평행이동하여 시점 O를  $\overrightarrow{OA}$ 의 종점 Q에 맞추고  $\overrightarrow{OB}$ 를 그리자. 이는 곧 점 C의 자취의 '테두리'의 일부이다.

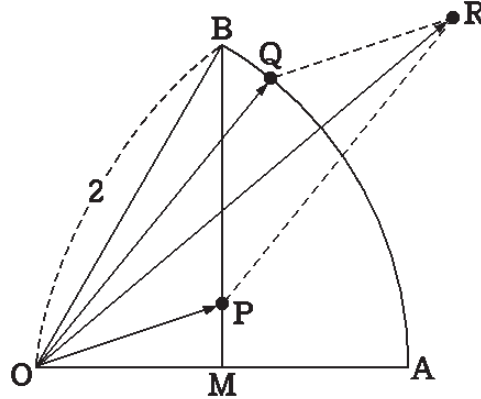
그 이유는  $\overrightarrow{OB}$ 를 평행이동하여 시점 O를  $\overrightarrow{OA}$ 의 종점 Q에 맞추면 종점 B는 점 C에 맞춰져  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{QC}$ 이다.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{QC}$ 이므로  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC}$ 이기 때문이다.

**점 C의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌을 것이다.** 이제 점 A를 점 P와 점 Q 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠하고 점 C의 자취의 영역을 완성 시키자.

**점 A를 경계점에 고정하여 점 C의 자취의 영역의 '테두리'를 먼저 그리면 점 C의 자취의 영역을 구하기가 훨씬 쉽고 정확하게 그릴 수 있다.** 자동차 그림을 그릴 때 자동차의 '테두리'를 먼저 스케치하고 자동차 '테두리' 내부를 색칠하는 것이 더 쉽게 자신이 원하는 자동차 그림을 그릴 수 있듯이 말이다.

자취의 영역의 '테두리'를 먼저 그리지 않고 자취의 영역 내부 색칠을 먼저 하면 자취의 영역을 그릴 때 실수가 매우 잦다. 따라서 **꼭 자취의 영역의 '테두리'부터 완성하자!** 글로만 보면 이해가 잘 안 될 것이다. 이제 문제를 통해 적용해보도록 하겠다.

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다.  $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는? [4점]



- ①  $\sqrt{3}$       ② 2      ③  $2\sqrt{3}$       ④ 4      ⑤  $3\sqrt{3}$

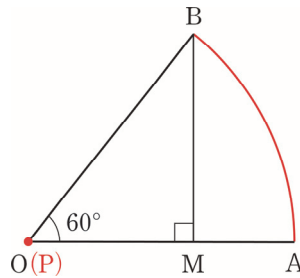


1. 점 P가 두 선분  $\overline{OM}$ 과  $\overline{BM}$ 위를 움직인다. 점 P가  $\overline{OM}$  위를 움직일 때와 점 P가  $\overline{BM}$  위를 움직일 때로 각각 나누어 점 R이 나타내는 자취의 영역을 구해보자.

점 P가  $\overline{OM}$  위를 움직일 때 점 R이 나타내는 자취의 영역을 구해보자.

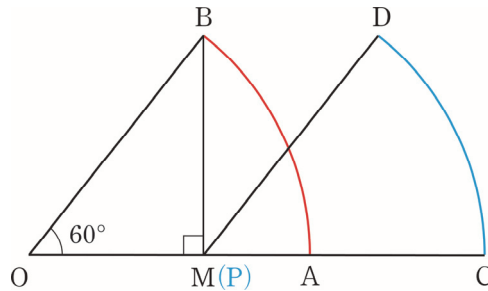
점 P를 점 O, 점 M에 각각 고정하고 점 R이 나타내는 자취의 영역의 '테두리'를 구해보도록 하겠다.

$\overline{OP}$ 의 중점인 점 P를 점 O에 고정하자.



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서  $\overrightarrow{OP}$ 의 중점인 점 P를 점 O에 고정하고  $\overrightarrow{OQ}$ 를 그리면  $\widehat{AB}$ 가 그려진다.

$\overline{OP}$ 의 중점인 점 P를 점 M에 고정하자.



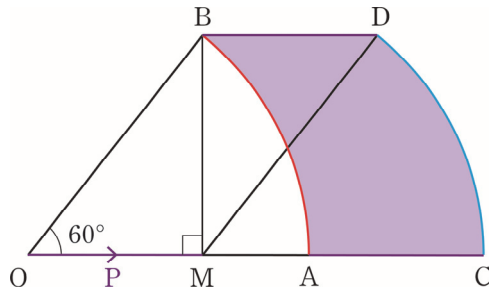
$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서  $\overrightarrow{OP}$ 의 중점인 점 P를 점 M에 고정하고  $\overrightarrow{OQ}$ 를 그리면  $\widehat{CD}$ 가 그려진다.

점 P가  $\overline{OM}$  위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.

테두리의 꼭짓점 A, B, C, D는 어떻게 있을까?

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{CD}$ 는 점 Q의 자취인  $\widehat{AB}$ 를 따왔으니

점 P의 자취인  $\overline{OM}$ 을 써먹을 차례이다.

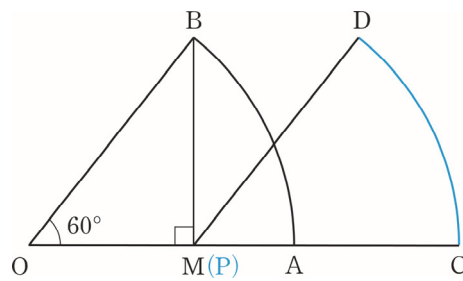


점 A와 점 C, 점 B와 점 D를 이을 때, 점 P의 자취인  $\overline{OM}$ 을 이용하면 된다.  
따라서 점 P가  $\overline{OM}$  위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역은 위와 같다.

2. 점 P가  $\overline{BM}$  위를 움직일 때 점 R이 나타내는 자취의 영역을 구해보자.

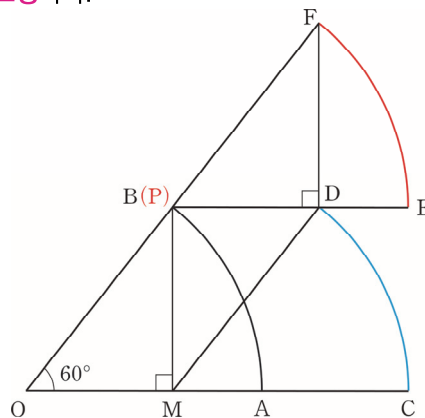
점 P를 점 B, 점 M에 각각 고정하고 점 R이 나타내는 자취의 영역의 '테두리'를 구해보도록 하자.

$\overline{OP}$ 의 종점인 점 P를 점 M에 고정하자.



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서  $\overrightarrow{OP}$ 의 종점인 점 P를 점 M에 고정하고  $\overrightarrow{OQ}$ 를 그리면  $\widehat{CD}$ 가 그려진다.

$\overline{OP}$ 의 종점인 점 P를 점 B에 고정하자.



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서  $\overrightarrow{OP}$ 의 종점인 점 P를 점 B에 고정하고  $\overrightarrow{OQ}$ 를 그리면  $\widehat{EF}$ 가 그려진다.

점 P가  $\overline{BM}$  위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.

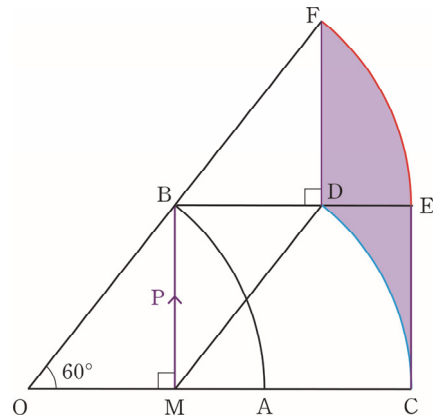
테두리의 꼭짓점 C, D, E, F는 어떻게 이을까?

$\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{OQ}$ 에서  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{EF}$ 는 점 Q의 자취인

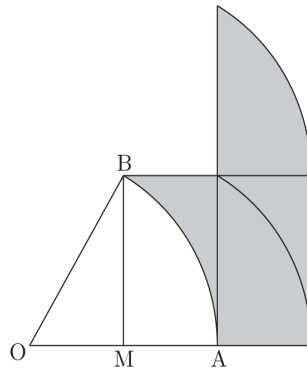
$\widehat{AB}$ 를 따왔으니 점 P의 자취인  $\overline{BM}$ 을 써먹을 차례이다.

점 C와 점 E, 점 D와 점 F를 이을 때, 점 P의 자취인  $\overline{BM}$ 을 이용하면 된다.

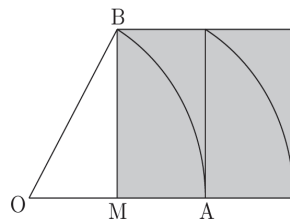
점 P가  $\overline{BM}$  위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역은 오른쪽 그림과 같다.



3. 결론적으로 점 R의 자취의 영역은 아래와 같다.



위 영역의 넓이는 아래와 같이 가로와 세로의 길이가  $2$ 이고 세로의 길이가  $\sqrt{3}$ 인 직사각형의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는  $2\sqrt{3}$ 이다. 답은 ③!!

**comment**

동점 2개일 때, 자취의 영역을 그릴 때는 동점 하나를 경계점에 고정한 후에 자취의 영역의 '테두리'부터 그리자. 이후에 동점을 경계점 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠한다. '테두리'의 존재로 색칠되는 영역을 예측하기 쉬울 것이다. 이제 14학년도 사관 문제가 19학년도 수능과 20학년도 6월 평가원에서 어떻게 진화하는지 보러 가자.

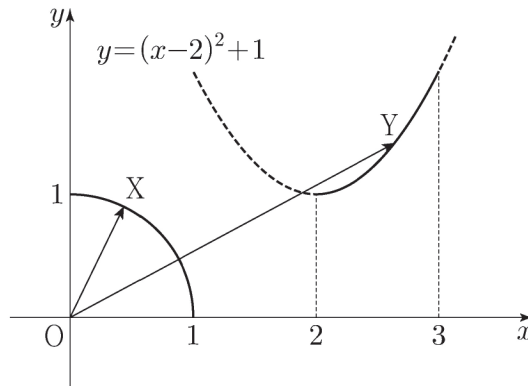


좌표평면 위에 두 점  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ 이 있다. 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴  $OAB$ 의 호  $AB$  위를 움직이는 점  $X$ 와 함수  $y = (x-2)^2 + 1$  ( $2 \leq x \leq 3$ )의 그래프 위를 움직이는 점  $Y$ 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$$

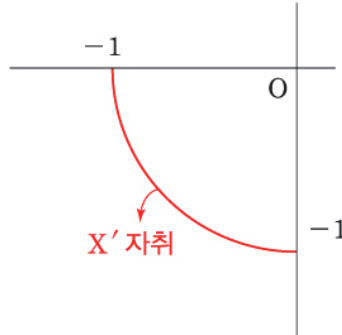
를 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 영역을  $R$ 라 하자. 점  $O$ 로부터 영역  $R$ 에 있는 점까지의 거리의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M^2 + m^2$ 의 값은? (단,  $O$ 는 원점이다.) [4점]

- ①  $16 - 2\sqrt{5}$       ②  $16 - \sqrt{5}$       ③  $16$       ④  $16 + \sqrt{5}$       ⑤  $16 + 2\sqrt{5}$

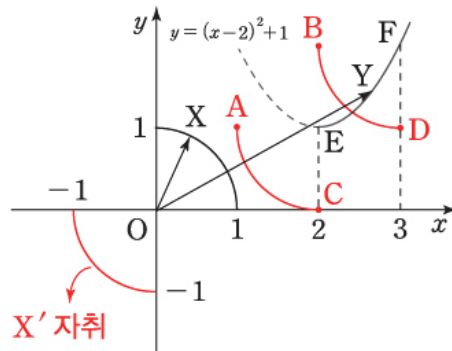




1.  $-\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX'}$ 라고 하자.  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX'}$ 이고 점 X'의 자취를 그리면 다음과 같다.



이를 토대로 점 P가 나타내는 자취의 영역을 그려보자.



그림과 같이 동점 Y를 점 E, 점 F에 각각 고정하고 점 P가 나타내는 자취의 '테두리'를 그려주자.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX'}$ 에서  $\overrightarrow{OY}$ 의 종점인 점 Y를 점 E에 고정하고  $\overrightarrow{OX'}$ 를 그리면  $\widehat{AC}$ 가 그려진다.

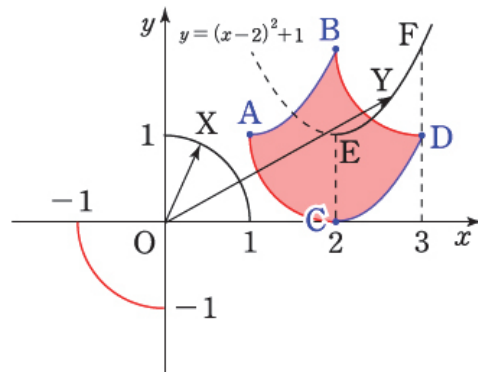
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX'}$ 에서  $\overrightarrow{OY}$ 의 종점인 점 Y를 점 F에 고정하고  $\overrightarrow{OX'}$ 를 그리면  $\widehat{BD}$ 가 그려진다.

2. 테두리의 꼭짓점 A, B, C, D는 어떻게 이을까?

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX'}$ 에서  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{BD}$ 는 점 X'의 자취를 따왔으니 점 Y의 자취를 이용할 차례이다.

점 A와 점 B, 점 C와 점 D를 이을 때, 점 Y의 자취를 이용하면 된다.

따라서 점 P가 나타내는 자취의 영역은 오른쪽 그림과 같다.



3.  $\overrightarrow{OP}$ 의 최솟값  $m = \overline{OE} - 1 = \sqrt{5} - 1$ 이므로  $m^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ 이다.

$\overrightarrow{OP}$ 의 최댓값  $M = \overline{OD} = \sqrt{10}$ 이므로  $M^2 = 10$ 이다.

따라서  $m^2 + M^2 = 16 - 2\sqrt{5}$ 이다. 답은 ①!!

19학년도 수능 29번

좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1. 당황스럽다. 우리는  $\vec{OA} + \vec{OB}$  처럼 동점이 2개일 때만 다뤄보고  $\frac{1}{4}(\vec{AP} + \vec{AR}) + \frac{1}{2}\vec{AQ}$  처럼 동점이 3개일 때는 다뤄보지 못했다. 하지만 상관없다. 두 개의 벡터의 합의 중점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 마저 고려해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다. 따라서  $\vec{AS} = \frac{1}{4}(\vec{AP} + \vec{AR})$ 에서 점 S의 자취의 영역을 먼저 구하고  $\vec{AX} = \vec{AS} + \frac{1}{2}\vec{AQ}$ 에서 점 X의 자취의 영역을 구해보자.

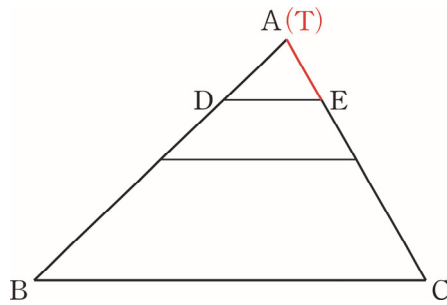
$\vec{AS} = \frac{1}{4}(\vec{AP} + \vec{AR})$ 로 두고 점 S의 자취의 영역을 구해보자.

$\vec{AB}$ 를 1:3으로 내분하는 점을 점 D라고 하자. 점 P는  $\vec{AB}$  위를 움직이므로  $\vec{AT} = \frac{1}{4}\vec{AP}$ 로 두면 점 T는  $\vec{AD}$  위를 움직인다.

$\vec{AC}$ 를 1:3으로 내분하는 점을 점 E라고 하자. 점 R는  $\vec{CA}$  위를 움직이므로  $\vec{AU} = \frac{1}{4}\vec{AR}$ 로 두면 점 U는  $\vec{AE}$  위를 움직인다.

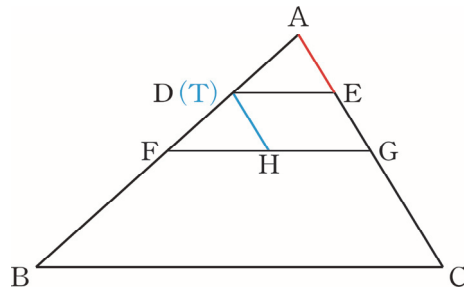
$\vec{AS} = \frac{1}{4}(\vec{AP} + \vec{AR}) = \vec{AT} + \vec{AU}$ 로 표현할 수 있다.

$\vec{AT}$ 의 중점인 점 T를 점 A에 고정하자.



$\vec{AS} = \vec{AT} + \vec{AU}$ 에서  $\vec{AT}$ 의 중점인 점 T를 점 A에 고정하고  $\vec{AU}$ 를 그리면  $\vec{AE}$ 가 그려진다.

$\vec{AT}$ 의 중점인 점 T를 점 D에 고정하자.



$\vec{AS} = \vec{AT} + \vec{AU}$ 에서  $\vec{AT}$ 의 중점인 점 T를 점 D에 고정하고  $\vec{AU}$ 를 그리면  $\vec{DH}$ 가 그려진다.

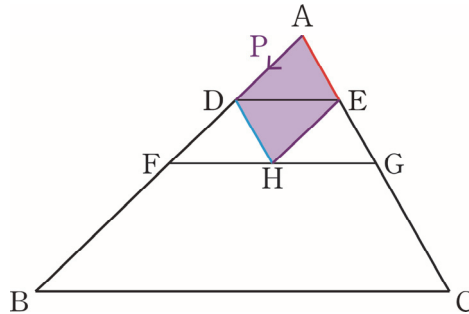
그 이유는 다음과 같다.  $\overrightarrow{AU}$ 를 평행이동하여 시점 A를  $\overrightarrow{AT}$ 의 중점 D에 맞추면 중점 U는 점 S에 맞춰져  $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{DS}$ 이다.  $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{DS}$ 이므로  $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS}$ 이다.

**점 S의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.**

테두리의 꼭짓점 A, D, E, H는 어떻게 이동까?

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AU}$ 에서  $\overline{AE}$ ,  $\overline{DH}$ 는 점 U의 자취인  $\overline{AE}$ 를 따왔으니

점 T의 자취인  $\overline{AD}$ 를 써먹을 차례이다.



점 A와 점 D, 점 E와 점 H를 이을 때, 점 T의 자취인  $\overline{AD}$ 을 이용하면 된다.

점 T가  $\overline{AD}$  위를 움직일 때 점 S의 자취의 영역은 위와 같다.

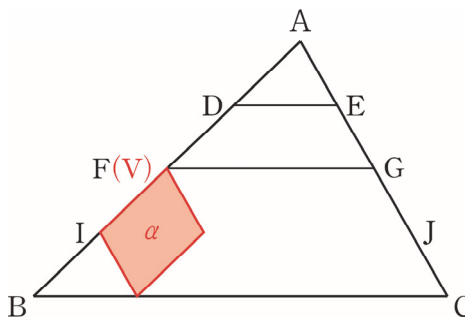
2. 점 S의 자취의 영역을 구했으니  $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 에서 점 X의 자취의 영역을 구해보자.

점 A와 점 B의 중점은 점 F이고 점 A와 점 C의 중점은 점 G이다. 점 Q는  $\overline{BC}$  위를 움직이므로

$\overrightarrow{AV} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 로 두면 점 V는  $\overline{FG}$  위를 움직인다.

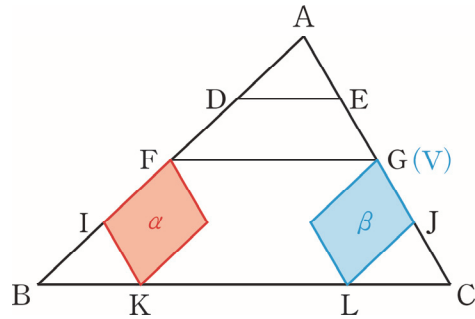
$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$ 로 표현할 수 있다.

$\overrightarrow{AV}$ 의 종점인 점 V를 점 F에 고정하자.



$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$ 에서  $\overrightarrow{AV}$ 의 종점인 점 V를 점 F에 고정하고  $\overrightarrow{AS}$ 를 그리면 영역  $\alpha$ 가 그려진다.

$\overrightarrow{AV}$ 의 중점인 점 V를 점 G에 고정하자.



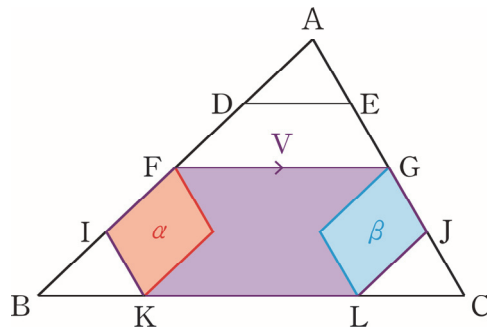
$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$ 에서  $\overrightarrow{AV}$ 의 중점인 점 V를 점 G에 고정하고  $\overrightarrow{AS}$ 를 그리면 영역  $\beta$ 가 그려진다.

점 X의 자취의 영역의 '일부'가 만들어졌다.

테두리의 꼭짓점 F, G, K, L는 어떻게 이동까?

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$ 에서 영역  $\alpha$ , 영역  $\beta$ 는 점 S의 자취의 영역을 따왔으니

점 V의 자취인  $\overline{FG}$ 를 써먹을 차례이다.



점 F와 점 G, 점 K와 점 L을 이을 때, 점 T의 자취인  $\overline{FG}$ 를 이용하면 된다.

점 V가  $\overline{FG}$  위를 움직일 때 점 X의 자취의 영역의 '테두리'는 육각형 FIKLJG임을 알 수 있다.

점 X의 자취의 영역은 위와 같이 육각형 FIKLJG의 테두리와 그 내부이다.

$\triangle ADE$ ,  $\triangle ABC$ 는 서로 닮음이다. 따라서  $\triangle ADE = \frac{1}{16} \times \triangle ABC = \frac{9}{16}$ 이다.

육각형 FIKLJG의 넓이는  $10 \times \triangle ADE$ 이므로  $\frac{9}{16} \times 10 = \frac{45}{8}$ 이다.

따라서  $p = 8$ ,  $q = 45$ 이고  $p + q = 53$ 이다. 답은 53!!

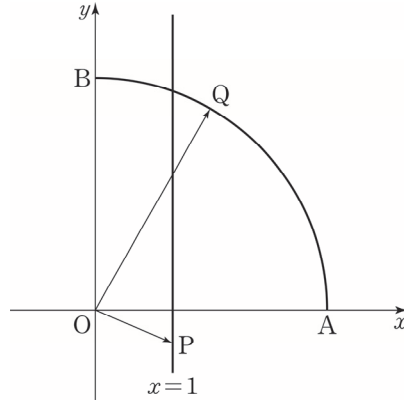
comment

동점이 3개일 때는 두 개의 벡터의 합의 중점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 마저 고려해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다. 동점 2개일 때 자취의 영역 그리기를 2번 반복한다고 생각하면 된다.

동점 2개일 때, 자취의 영역을 그릴 때는 동점 하나를 경계점에 고정한 후에 자취의 영역의 '테두리'부터 그리자. 이후에 동점을 경계점 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠한다. '테두리'의 존재로 색칠되는 영역을 예측하기 쉬울 것이다.

자취의 영역을 직접 그리는 문제는 많이 출제된 편은 아니었다. 기존에는 '벡터 쪼개기', '벡터 회전'이 평면 벡터, 공간벡터에서 큰 축을 담당하고 있다. 하지만 19학년도 수능을 기점으로 동점이 그리는 자취의 영역 관련 문제가 등장하였고 이는 많은 수험생들에게 큰 충격으로 다가왔다. 20학년도 6월 평가원에서도 자취의 영역 관련 문제가 2개나 등장하여 평면벡터의 트렌드가 크게 바뀌었다. 일시적인 트렌드인지 앞으로 이어질 트렌드인지 판단이 확실치 않지만 얼마 없는 기출로 확실히 연습하자. 예시에 나온 기출이 거의 전부라고 보면 된다.

좌표평면 위에 두 점  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 3)$ 과 직선  $x = 1$  위의 점  $P(1, a)$ 가 있다. 점  $Q$ 가 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴  $OAB$ 의 호  $AB$  위를 움직일 때  $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값을  $f(a)$ 라 하자.  $f(a) = 5$ 가 되도록 하는 모든 실수  $a$ 의 값의 곱은? (단,  $O$ 는 원점이다.) [4점]



- ①  $-5\sqrt{3}$       ②  $-4\sqrt{3}$       ③  $-3\sqrt{3}$       ④  $-2\sqrt{3}$       ⑤  $-\sqrt{3}$





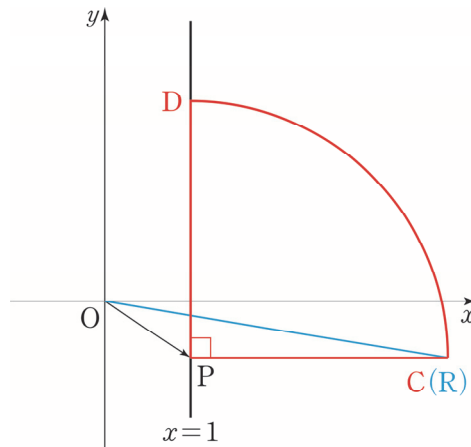
1. '벡터 회전'의 관점으로도 풀 수 있지만 19학년도 수능 29번 트렌드에 맞춰 벡터의 **평행이동**으로 먼저 풀어보겠다.

$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ 에서 점 R의 자취의 영역을 구해보자.

점 O, 점 P는 정점이고 점 Q는 동점이다. 점 Q는 호 AB 위를 움직인다.

점 P가 왜 정점일까?  $f(a) = 5$ 는 항등식이 아닌 방정식이다.  $f(a) = 5$ 를 만족하는  $a$ 는 변수가 아닌 **미지수**이다. **미지수는 모르는 수일 뿐이지 이미 정해져 있다.** 따라서 점 P는 동점이 아닌 정점이다.

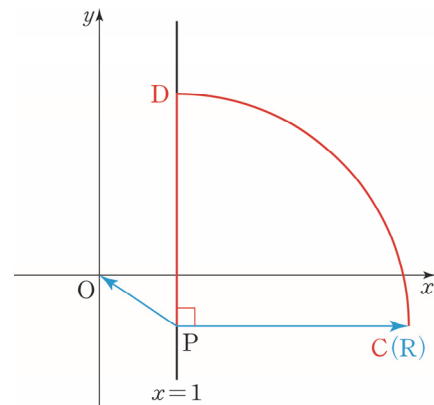
(1)  $a < 0$ 일 때



$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ 에서  $\vec{OQ}$ 의 시점인 점 O를 점 P에 고정하고  $\vec{OQ}$ 를 그리면  $\widehat{CD}$ 가 그려진다.

$|\vec{OP} + \vec{OQ}|$ 는  $|\vec{OR}|$ 이고  $|\vec{OR}|$ 의 최댓값은 직관적으로 점 R이 점 C에 있을 때이다.

$|\vec{OR}|$ 의 최댓값은 왜 점 R이 점 C에 있을 때 생길까?



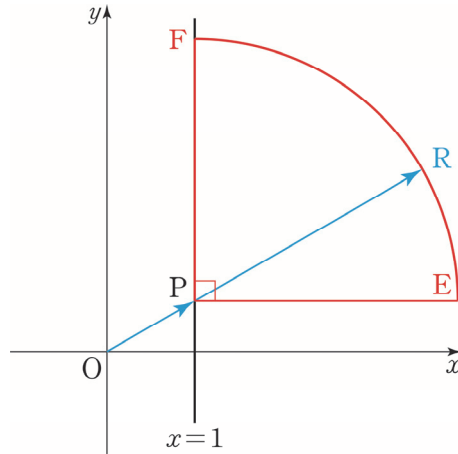
$$|\vec{OP} + \vec{OQ}|^2 = |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 + 2\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$$

$|\vec{OP}|^2 = a^2 + 1$ ,  $|\vec{OQ}|^2 = 9$ 로 일정하므로  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ 가 최대일 때  $|\vec{OP} + \vec{OQ}|^2$ 가 최대이다.

$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \vec{OP} \cdot \vec{PR} = -\vec{PO} \cdot \vec{PR}$ 가 최대이기 위해서는  $\vec{PO}$ ,  $\vec{PR}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$  이상  $180^\circ$  이하에서 최대여야 한다. 이때 점 R의 위치는 점 C이다.

점 C(4, a)이고  $|\vec{OR}| = \sqrt{a^2 + 16} = 5$ 이므로  $a = -3$ 이다.

(2)  $a > 0$ 일 때



$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ 에서  $\vec{OQ}$ 의 시점인 점 O를 점 P에 고정하고  $\vec{OQ}$ 를 그리면  $\widehat{EF}$ 가 그려진다.

$|\vec{OP} + \vec{OQ}|$ 는 곧  $|\vec{OR}|$ 이고  $|\vec{OR}|$ 의 최댓값은 점 O, 점 P, 점 R가 일직선 위에 있을 때이다.

$|\vec{OR}| = \sqrt{a^2 + 1} + 3 = 5$ 이므로  $a = \sqrt{3}$ 이다.

$f(a) = 5$ 가 되도록 하는 모든  $a$ 의 곱은  $-3 \times \sqrt{3} = -3\sqrt{3}$ 이다. 답은 ③!!

2. '벡터 회전'의 관점으로 풀어보겠다. 점 O, 점 P는 정점이고 점 Q는 동점이다.

$|\vec{OP} + \vec{OQ}|$ 가 최댓값을 가질 때는 곧  $|\vec{OP} + \vec{OQ}|^2$ 가 최댓값을 가질 때와 같다.

$$|\vec{OP} + \vec{OQ}|^2 = |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 + 2\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$$

$|\vec{OP}|^2 = a^2 + 1$ ,  $|\vec{OQ}|^2 = 9$ 로 일정하므로  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ 가 최대일 때  $|\vec{OP} + \vec{OQ}|^2$ 가 최대이다.

(1)  $a < 0$ 일 때

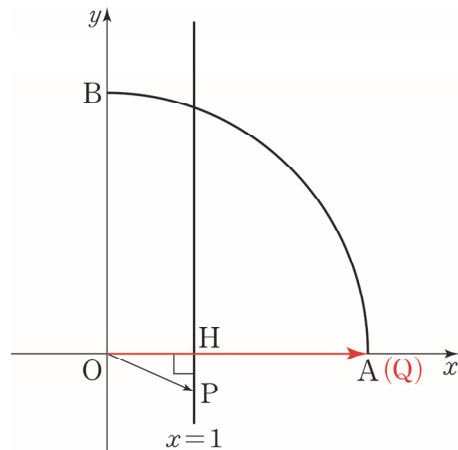
$\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ 가 최대이기 위해서는  $\vec{OP}$ ,  $\vec{OQ}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$  이상  $180^\circ$  이하에서 최소여야 한다.

점 O, 점 P, 점 Q가 일직선 위에 존재할 수 없으므로  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ 가 최대이기 위한 점 Q의 위치는 점 A이다.

점 P(1, a)이고 점 A(3, 0)이므로  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 3$ 이다.

점 P에서 x축 위로 정사영을 내려

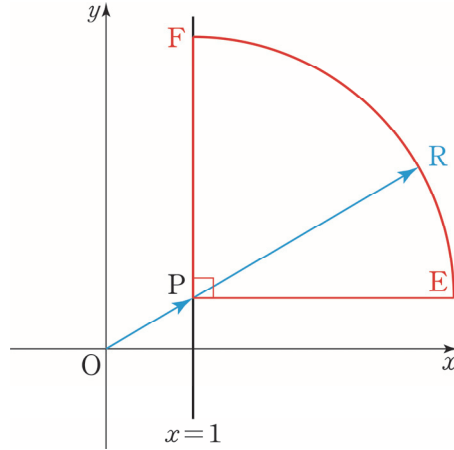
$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \vec{OH} \cdot \vec{OQ} = 3 \text{을 구해도 좋다.}$$



$$|\vec{OP} + \vec{OQ}|^2 = |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 + 2\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = a^2 + 1 + 9 + 2 \times 3 = a^2 + 16 = 25$$

따라서  $a = -3$ 이다.

(2)  $a > 0$  일 때



$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 가 최대이기 위해서는  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$  이상  $180^\circ$  이하에서 최소여야 한다.  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$ 가 가능하여 점 O, 점 P, 점 Q가 일직선 위에 존재할 수 있다.

점 Q의 위치는 그림과 같다.

$$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{a^2 + 1} + 3 = 5$$

따라서  $a = \sqrt{3}$ 이다.

$f(a) = 5$ 가 되도록 하는 모든  $a$ 의 곱은  $-3 \times \sqrt{3} = -3\sqrt{3}$ 이다. 답은 ③!!

※  $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 만 보고 무작정  $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| = 2 \times \left| \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} \right| = 2 \times |\overrightarrow{OM}|$ 으로 ‘벡터 쪼개기’를 하는 경우가 있다. 결코 좋은 선택이 아니다. 정점 P와 동점 Q의 중점인 동점 M의 자취를 그리는 것이 어렵기 때문이다.

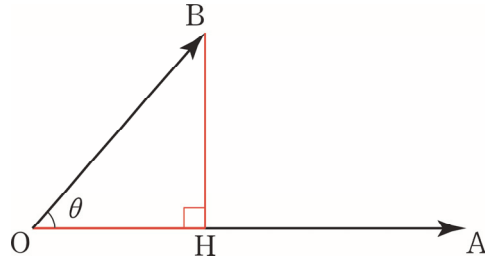
이 문제에서는  $|\overrightarrow{OP}|, |\overrightarrow{OQ}|$ 가 일정하기에  $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|^2$ 로 다루는 것이 훨씬 낫다. 이후에 ‘벡터 쪼개기’의 기준을 확실히 세우고 ‘벡터 회전’도 자세히 다루도록 하겠다.

**comment**

동점이 하나밖에 없어 벡터의 평행이동을 이용한 자취를 그리기 어렵지 않았다. 보통 동점이 하나밖에 없을 땐 ‘벡터 쪼개기’, ‘벡터 회전’을 쓰는 것이 더 편하다. **각 점이 동점이나 정점이나에 따라 어떻게 ‘벡터 쪼개기’, ‘벡터 회전’을 써야 하는지가 달라진다.** 이와 같은 ‘벡터 쪼개기’, ‘벡터 회전’의 기준이 뚜렷하지 않다면 이를 이용하여 문제 풀기가 힘들 것이다.

### ◇ 3. 벡터 정사영

수선의 발을 내리기 쉬울 때 쓰면 매우 유용하다. 하지만 수선의 발의 자취를 파악하기 어려운 경우는 이 대신 이후에 배울 ‘벡터 쪼개기’나 ‘벡터 회전’을 이용하는 것이 좋다.

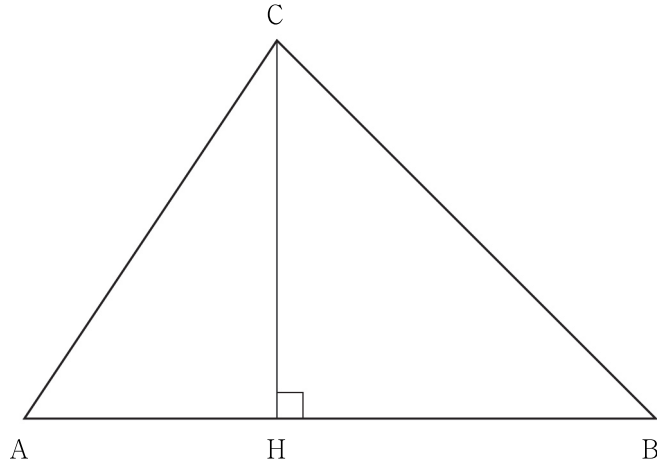


점 B의 직선 OA 위로의 수선의 발은 점 H이다.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ 이다.

이를 이용할 때의 장점은 평면벡터의 내적을 선분의 길이의 곱으로 볼 수 있다는 점이다. 평면을 다루는 것보다 한 차원 낮은 직선을 다루는 것이 훨씬 편리하다.

16년 7월 교육청 19번

그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.  
삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때,  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}$ 의 값은? [4점]



- (가) 점 H가 선분 AB를 2 : 3으로 내분한다.  
 (나)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$   
 (다) 삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

① 36

② 37

③ 38

④ 39

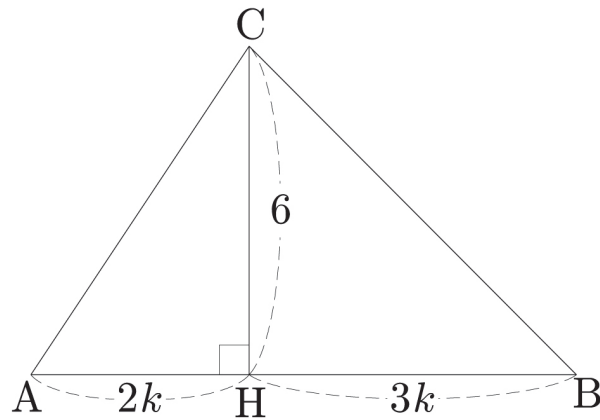
⑤ 40



1. 문제에서 구하고자 하는 값을 먼저 살펴보자.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{CH}|^2$ 이다.

$\triangle ABC$ 의 넓이가 30이므로  $\overline{AB}$ 를 구하고  $\overline{CH}$ 를 구하자.

2.  $\overline{AB} = 5k$ 라 하면 조건 (가)에 의하여  $\overline{AH} = 2k$ ,  $\overline{BH} = 3k$ 이다.



$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AH}| = 10k^2 = 40$ 에서  $k = 2$ 이다. 따라서  $\overline{AB} = 10$ ,  $\overline{CH} = 6$ 이다.

따라서  $\overline{CA} \cdot \overline{CH} = |\overline{CH}|^2 = 36$ 이다. 답은 ㉑!!

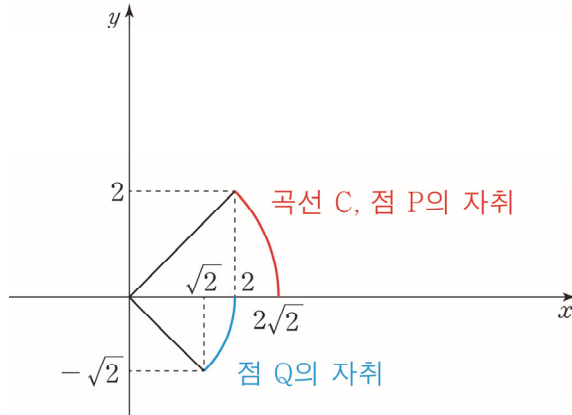
좌표평면에서 곡선  $C: y = \sqrt{8-x^2}$  ( $2 \leq x \leq 2\sqrt{2}$ ) 위의 점 P에 대하여  $\overline{OQ} = 2$ ,  $\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자. 점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$

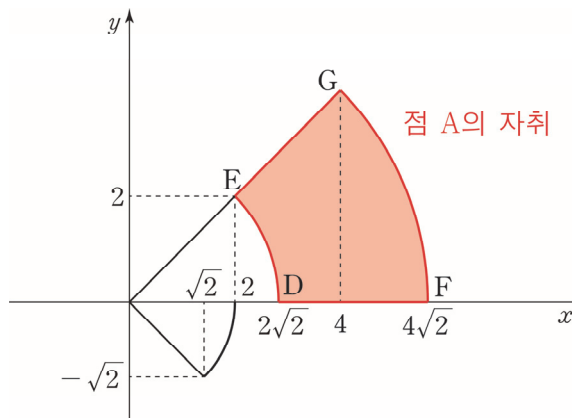
를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자. 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여  $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합이  $a+b\sqrt{2}$ 이다.  $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고,  $a$ 와  $b$ 는 유리수이다.) [4점]



1. 문제가 길어 조건 파악이 한 번에 되지 않는다. **한 줄씩 끊어가며 조건을 파악**하자.  
좌표평면에서 곡선 C와 점 Q가 나타내는 곡선은 그림과 같다.



이제  $\vec{OZ} = \vec{OP} + \vec{OX} + \vec{OY}$ 를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역 D를 그려야 한다. 점 O는 원점으로 정점이고 점 P, 점 X, 점 Y는 동점이다. 동점이 3개인 상황에서는 두 개의 벡터의 합의 종점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 마저 고려해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다. 따라서  $\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{OX}$ 에서 점 A의 자취의 영역을 먼저 구하고  $\vec{OZ} = \vec{OA} + \vec{OY}$ 에서 점 Z의 자취의 영역을 구해보자.



$\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{OX}$ 로 두고 점 A의 자취의 영역을 구해보자.

점 P는 호 DE 위를 움직인다. 점 X가 선분 OP 위를 움직이므로 점 O, 점 P, 점 X는 일직선 위에 있다. 따라서 점 A의 자취의 영역은 위와 같이 그려진다.  $\widehat{GF}$ 는 중심이 원점 O이고 반지름이  $4\sqrt{2}$ 인 원 위에 있다.  $\widehat{GF}$ 의 중심각은  $\frac{\pi}{4}$ 이다.

2. 점 A의 자취를 구했으므로  $\vec{OZ} = \vec{OA} + \vec{OY}$ 에서 점 Z의 자취의 영역을 구해보자.

점 A는  $\widehat{DE}$ ,  $\widehat{GF}$ ,  $\widehat{EG}$ ,  $\widehat{DF}$ 로 둘러싸인 영역의 테두리와 그 내부를 움직인다.

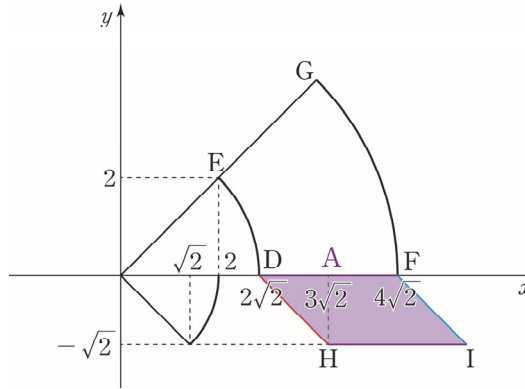
점 Y가  $\widehat{OQ}$  위를 움직이므로 점 O, 점 Q, 점 Y는 일직선 위에 있다.

$\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키려면  $\angle AOY = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키며 점 Y가 움직여야 한다.



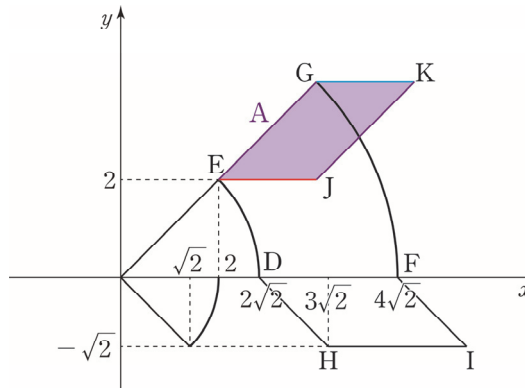
먼저 점 A가  $\overline{EG}$  위를 움직일 때와 점 A가  $\overline{DF}$  위를 움직일 때로 각각 나누어 점 Z가 나타내는 자취의 영역 일부를 구해보자. 미안하지만 동점을 경계점에 고정하여 자취를 그리는 방법을 충분히 알려 줬으므로 설명을 생략하고 바로 자취의 영역을 그리도록 하겠다.

점 A가  $\overline{DF}$  위를 움직일 때 점 Z가 나타내는 자취의 영역은 아래와 같다.



평행사변형 DFIH가 그려진다.

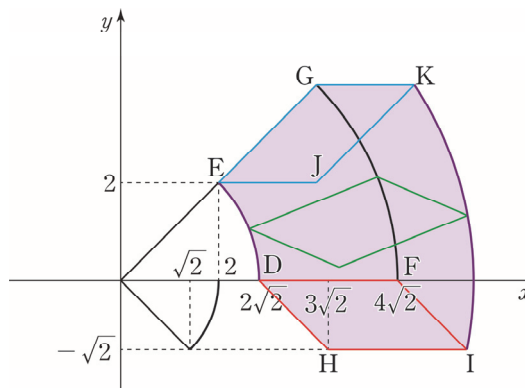
점 A가  $\overline{EG}$  위를 움직일 때 점 Z가 나타내는 자취의 영역은 아래와 같다.



평행사변형 EGKJ가 그려진다.

점 A의 자취는 길이가  $2\sqrt{2}$ 인 선분이  $\overline{DF}$ 에서  $\overline{EG}$ 까지  $\widehat{DE}$ 를 따라 회전하는 형태이다.

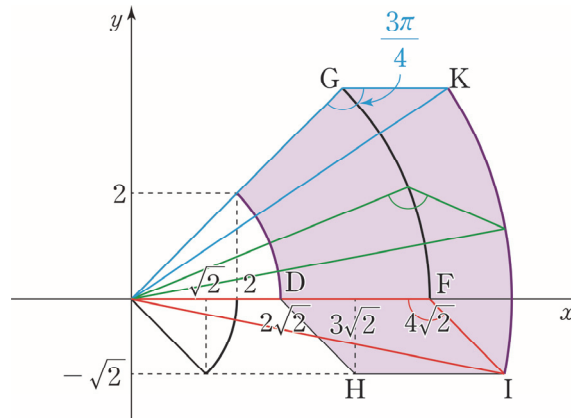
따라서 점 Z가 나타내는 자취의 영역의 ‘테두리’는 평행사변형 DFIH를 평행사변형 EGKJ까지 회전시켜 구할 수 있다.



따라서 점  $Z$ 가 나타내는 자취의 영역의 '테두리'는  $\widehat{DE}$ ,  $\widehat{IK}$ ,  $\overline{EG}$ ,  $\overline{GK}$ ,  $\overline{HI}$ ,  $\overline{DH}$ 이다.

$\widehat{IK}$ 가 중심이 원점  $O$ 이고 반지름이  $2\sqrt{13}$ 인 원 위에 있다.  $\widehat{IK}$ 의 중심각은  $\frac{\pi}{4}$ 이다.

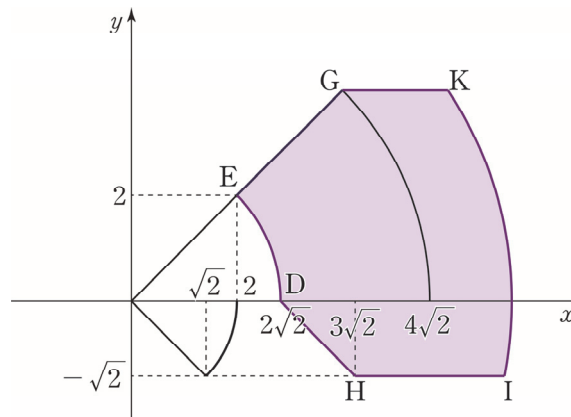
※  $\widehat{IK}$ 가 중심이 원점  $O$ 이고 반지름이  $2\sqrt{13}$ 인 원 위에 있으면서 중심각이  $\frac{\pi}{4}$ 인 호라는 것을 어떻게 알 수 있을까?



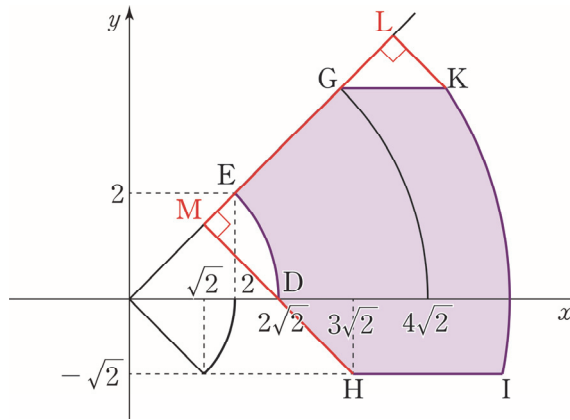
한 변의 길이가  $4\sqrt{2}$ , 다른 한변의 길이가 2이고 그사이 끼인 각이  $\frac{3}{4}\pi$ 인 삼각형이 회전하는 형태이다.

끼인 각의 대변의 길이가 일정하므로  $\widehat{IK}$ 가 중심이 원점  $O$ 인 원 위에 있으면서 중심각이  $\frac{\pi}{4}$ 인 호라는 것을 알 수 있다. 이 원의 반지름의 길이는 점  $K(6, 4)$ 이고  $\overline{OK} = 2\sqrt{13}$ 이므로  $2\sqrt{13}$ 이다.

3. 점  $Z$ 가 나타내는 자취의 영역  $D$ 는  $\widehat{DE}$ ,  $\widehat{IK}$ ,  $\overline{EG}$ ,  $\overline{GK}$ ,  $\overline{HI}$ ,  $\overline{DH}$ 로 둘러싸인 영역의 테두리와 그 내부이다.



영역  $D$ 에 속하는 점 중에서  $y$ 축과의 거리가 최소인 점은 점  $E$ 이므로 점  $R$ 은 점  $E$ 와 일치한다. 따라서 점  $R(2, 2)$ 이다.



점 R은 직선  $y = x$  위에 있다.  $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최대, 최소를 알기 위해서  $\overrightarrow{OR}$ 에 평행한 직선  $y = x$  위에 영역  $D$ 에 속하는 점들의 정사영을 내려보자. 영역  $D$ 에 속하는 점들의 직선  $y = x$  위로의 정사영은  $\overline{LM}$ 이다.

$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최댓값은  $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OL}$ 일 때이다. 이때 점 Z은 점 K(6, 4)이다.  
따라서 최댓값  $M = (2, 2) \cdot (6, 4) = 2 \times 6 + 2 \times 4 = 20$ 이다.

$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최솟값은  $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OM}$ 일 때이다. 이때 점 Z은 점 D( $2\sqrt{2}$ , 0), 점 H( $3\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$ )을  
있는 선분  $\overline{DH}$  위의 점 중 하나이다.

따라서 최솟값  $m = (2, 2) \cdot (2\sqrt{2}, 0) = 2 \times 2\sqrt{2} + 2 \times 0 = 4\sqrt{2}$ 이다.

결론적으로  $M + m = 20 + 4\sqrt{2}$  이고  $a = 20$ ,  $b = 4$ 이다.  $a + b = 24$ 이므로 답은 24!!

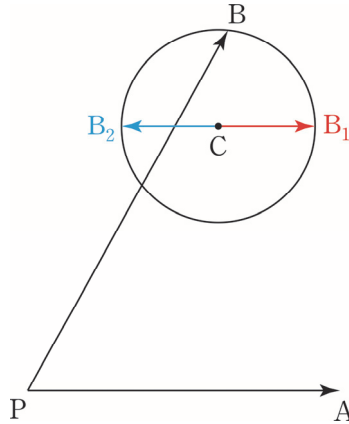
**comment**

벡터 평행이동을 이용한 자취의 영역을 구하고 벡터의 정사영을 이용하여 내적의 최대, 최소를 구하는 문제였다. 가히 평면벡터의 최종진화 형태라 할 수 있겠다.

## ◇ 벡터 쪼개기

### ◇ 1. 원이나 구의 중심을 거쳐 쪼개기

좌표평면에 점  $C(2, 4)$ 를 중심으로 하고 반지름이 5인 원 위를 움직이는 점  $B$ 가 존재한다. 점  $P(0, 0)$ , 점  $A(1, 3)$ 일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값, 최솟값을 구해보자.



점  $P$ , 점  $A$ 는 정점이고 점  $B$ 는 동점이다. 따라서  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대, 최소를 구하기 위해서는 원의 중심인 점  $C$ 를 거쳐  $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB})$ 로 쪼개는 것이 유리하다. 더 복잡해지지 않았냐고? 아니다.

점  $P$ , 점  $A$ , 점  $C$ 는 정점이므로  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 는 고정값  $(1, 3) \cdot (2, 4) = 14$ 을 갖는다. 따라서  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 가 최대일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 도 최대이고  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 가 최소일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 도 최소이다.

$|\overrightarrow{CB}|$ 는 원의 반지름의 길이로 일정하다.  $\overrightarrow{CB}$ 는 자유로운 방향을 지니는 벡터이기에  $\overrightarrow{PA}$ 와 어떤 각이든 이룰 수 있다. 따라서  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 가 최대가 되기 위해서는  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$ 이면 되므로 점  $B$ 가 점  $B_1$  위치에 있으면 된다.  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 가 최소가 되기 위해서는  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ 가 이루는 각이  $180^\circ$ 이면 되므로 점  $B$ 가 점  $B_2$  위치에 있으면 된다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 5\sqrt{10}$ 이므로  $14 + 5\sqrt{10}$ 이고  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB_2} = -5\sqrt{10}$ 이므로  $14 - 5\sqrt{10}$ 이다.

결론적으로 원의 중심을 거쳐 쪼개면 크기가 일정하고 자유로운 방향을 지니는 벡터를 얻을 수 있기에 내적의 최대, 최소를 구할 때 유리하다.

## ◇ 2. 중점을 거쳐 쪼개기

좌표평면에 점  $C(2, 4)$ 를 중심으로 하고 반지름이 1인 원 위를 움직이는 점  $P$ 가 존재한다. 점  $A(1, 3)$ , 점  $B(5, 1)$ 일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값, 최솟값을 구해보자.

점  $P$ 가 구 위에 있으니 무작정 구의 중심  $C$ 를 거쳐  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 를  $(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB})$ 로 쪼개는 경우가 있다.  $(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}) = |\overrightarrow{PC}|^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CB}$ 에서  $|\overrightarrow{PC}|^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 는 고정값을 가지며  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CB}$ 는 점  $P$ 의 위치에 따라 변하는 값을 가진다.

$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CB}$ 이 최대일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 가 최대이고,

$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CB}$ 이 최소일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 가 최소이다.

아쉽게도  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CB}$ 가 동시에 최대가 되거나 동시에 최소가 될 수 없다.

따라서  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CB}$ 의 최대, 최소를 구하기 만만치 않다.

무작정 원의 중심  $C$ 를 거쳐  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 를 쪼개  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대, 최소를 구하기 힘들다.

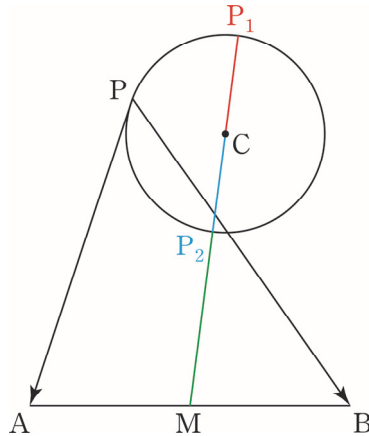
여기선 원의 중심을 거쳐 벡터를 쪼개는 방식이 왜 잘 안 통하는 것일까? 그리고  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 를 어떻게 쪼개야 할까?

원의 중심을 거쳐 벡터를 쪼개는 방식이 왜 잘 안 통하는 이유는 다음과 같다.

겉으로 보기에 이 문제가 바로 전에 푼 문제와 매우 유사해 보인다. 하지만 다른 점이 있다.

바로 전에 풀었던 문제에서는  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대 최소를 구해야 하는데 점  $P$ , 점  $A$ 는 정점이고 점  $B$ 는 동점이 었다. 하지만 이 문제에서는  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대 최소를 구해야 하는데 점  $A$ , 점  $B$ 가 정점이고 점  $P$ 가 동점이다!

어떤 점이 정점이고 어떤 점이 동점이나에 따라  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대, 최소를 쉽게 구하기 위한 벡터 쪼개기 기준이 달라진다.



$\overline{AB}$ 의 중점  $M(3, 2)$ 을 거쳐  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 를 쪼개보자.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}) = |\overrightarrow{PM}|^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PM} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \text{이므로 } \overrightarrow{PM} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 \text{이고 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -|\overrightarrow{MB}|^2 \text{이다.}$$

따라서  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2$ 로 간단히 표현할 수 있다.  $|\overrightarrow{MA}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2$ 이므로

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 \text{로 표현할 수도 있다.}$$

점 B, 점 M은 정점이므로  $|\overrightarrow{MB}|^2$ 은 고정값  $(5-3)^2 + (1-2)^2 = 5$ 를 갖는다.

따라서  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 가 최대일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 도 최대이고  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 가 최소일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 도 최소이다.

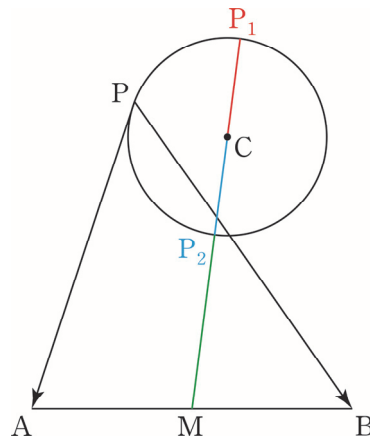
점 M, 점 C, 점 P가 일직선 위에 있을 때  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 이 최댓값이나 최솟값을 갖는다.

$|\overrightarrow{PM}|^2$ 이 최대일 때는 점 P가 점  $P_1$  위치에 있다.  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 이 최소일 때는 점 P가 점  $P_2$  위치에 있다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값은  $|\overrightarrow{PM}|^2 = |\overrightarrow{P_1M}|^2 = (\sqrt{5}+1)^2$ 이므로  $(\sqrt{5}+1)^2 - 5 = 1+2\sqrt{5}$ 이고

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값은  $|\overrightarrow{PM}|^2 = |\overrightarrow{P_2M}|^2 = (\sqrt{5}-1)^2$ 이므로  $(\sqrt{5}-1)^2 - 5 = 1-2\sqrt{5}$ 이다.

$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최대, 최소도 한 번 구해보자.



$\overline{AB}$ 의 중점  $M(3,2)$ 를 거쳐  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 를 쪼개면  $2 \times \left| \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} \right| = 2 \times |\overrightarrow{PM}|$ 이다.

$|\overrightarrow{PM}|$ 가 최대일 때  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 도 최대이고  $|\overrightarrow{PM}|$ 가 최소일 때  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 도 최소이다.

점 M, 점 C, 점 P가 일직선 위에 있을 때  $|\overrightarrow{PM}|$ 이 최댓값이나 최솟값을 갖는다.

$|\overrightarrow{PM}|$ 이 최대일 때는 점 P가 점  $P_1$  위치에 있다.  $|\overrightarrow{PM}|$ 이 최소일 때는 점 P가 점  $P_2$  위치에 있다.

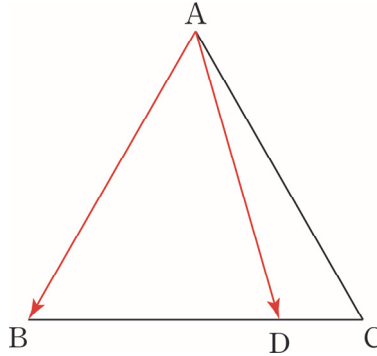
$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은  $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{P_1M}| = \sqrt{5}+1$ 이므로  $2 \times (\sqrt{5}+1)$ 이고

$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최솟값은  $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{P_2M}| = \sqrt{5}-1$ 이므로  $2 \times (\sqrt{5}-1)$ 이다.

결론적으로 점 A, 점 B가 정점이고 점 P가 동점일 때  $\overline{AB}$ 의 중점 M을 거쳐 벡터를 쪼개면  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 이나  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최대, 최소를 구할 때 유리하다.

### ◆ 3. 꼭짓점을 거쳐 쪼개기

정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 4이고 점 D가 BC의 3:1 내분점일 때  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 의 값은?



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  그렇다면  $\overrightarrow{AD}$ 를 정삼각형 ABC의 꼭짓점 중 하나인 점 B를 거쳐  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ 로 쪼개보는 것은 어떨까?

$|\overrightarrow{BD}|$ 를 알고  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ 가 이루는 각이 특수각이므로 계산하기 훨씬 수월하다.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = |\overrightarrow{AB}|^2 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$$

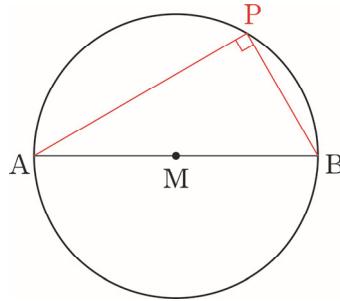
$|\overrightarrow{AB}|^2 = 16$ ,  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times 3 \times \cos 60^\circ = 6$ 이므로  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 10$ 이다.

이처럼 다각형이나 공간도형의 꼭짓점을 거쳐 벡터를 쪼갤 수도 있다.

◇ 평면벡터 내적 조건 해석

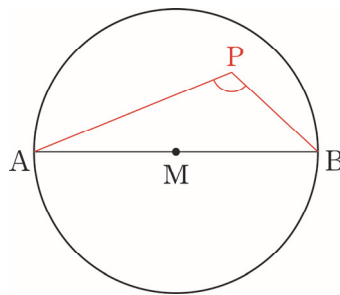
◇ 1. 점 A, 점 B가 정점이고 점 P가 동점

(1)  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$  일 때



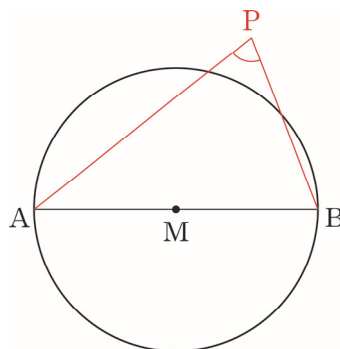
좌표평면에서 점 P의 자취는  $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원이다.

(2)  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 0$  일 때



좌표평면에서 점 P의 자취는  $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원의 테두리와 그 내부이다.

(3)  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \geq 0$  일 때

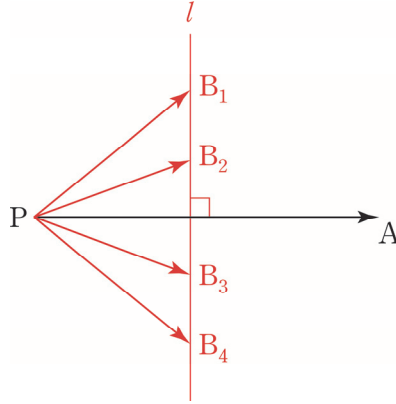


좌표평면에서 점 P의 자취는  $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원의 테두리와 그 외부이다.



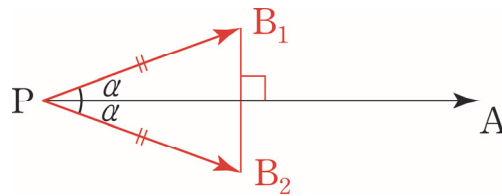
◇ 2. 점 P, 점 A가 정점이고 점 B가 동점

(1)  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = k$  일 때 (단,  $k$ 는 상수이다.)



좌표평면에서 점 B의 자취는 직선  $l$ 이다. 직선  $l$ 은  $\overrightarrow{PA}$ 와 수직이다. 점 B가 직선  $l$ 위의 임의의 점의 위치에 있어도  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 가 일정하다는 것을 알 수 있다.

(2)  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = k$ 이고  $|\overrightarrow{PB}|$ 가 일정할 때 (단,  $k$ 는 상수이다.)



좌표평면에서 점 B는 점  $B_1$ 나 점  $B_2$ 의 위치에 있을 수 있다.

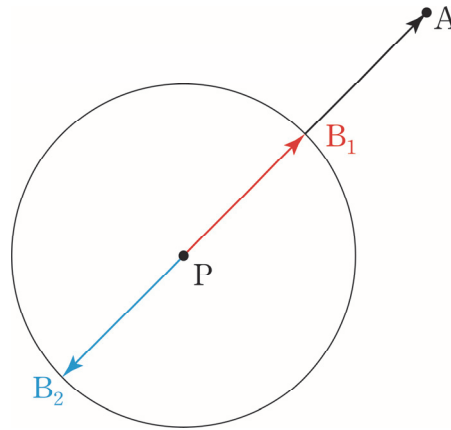
## ◇ 벡터 회전

평가원 기하 준킬러, 킬러에 제일 많이 나오는 소재이다. 벡터 회전을 더 잘 이용하기 위해서는 벡터의 기본적인 도구와 벡터 쪼개기가 잘 학습되어 있어야 한다.

### ◇ 1. 좌표평면에서의 원과 호

#### (1) 원

좌표평면에 점  $P(0, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름이  $\sqrt{2}$ 인 원  $x^2 + y^2 = 2$ 위를 움직이는 점  $B$ 가 존재한다. 점  $P(0, 0)$ , 점  $A(2, 2)$ 일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값, 최솟값을 구해보자.



점  $P$ , 점  $A$ 는 정점이고 점  $B$ 는 동점이다.  $|\overrightarrow{PB}|$ 는 원의 반지름의 길이  $\sqrt{2}$ 로 일정하다.  $\overrightarrow{PB}$ 는 자유로운 방향을 지니는 벡터이기에  $\overrightarrow{PA}$ 와 어떤 각이든 이룰 수 있다.

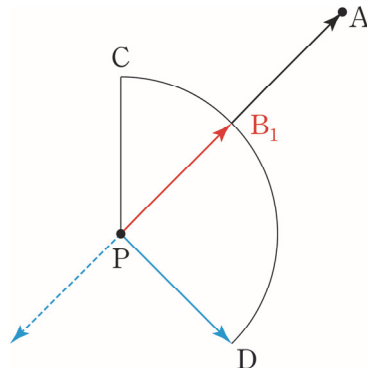
따라서  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 가 최대가 되기 위해서는  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$  이면 되므로 점  $B$ 가 점  $B_1$  위치에 있으면 된다.  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 가 최소가 되기 위해서는  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각이  $180^\circ$  이면 되므로 점  $B$ 가 점  $B_2$  위치에 있으면 된다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}| \times |\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ 이고  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -|\overrightarrow{PA}| \times |\overrightarrow{PB}| = -2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -4$ 이다.

$\overrightarrow{PB}$ 는 자유로운 방향을 지니는 벡터이기에  $\overrightarrow{PA}$ 와 어떤 각이든 이룰 수 있으므로  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}| \times |\overrightarrow{PB}|$ ,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -|\overrightarrow{PA}| \times |\overrightarrow{PB}|$ 이다.

(2) 호

좌표평면에 점  $P(0,0)$ 를 중심으로 하고 반지름이  $\sqrt{2}$ 인 원  $x^2 + y^2 = 2$ 위에 점  $C(0, \sqrt{2})$ , 점  $D(1, -1)$ 이 존재한다. 점  $B$ 가 중심각이  $135^\circ$ 인  $\widehat{CD}$  위를 움직인다. 점  $P(0,0)$ , 점  $A(2,2)$ 일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값, 최솟값을 구해보자.



점  $P$ , 점  $A$ 는 정점이고 점  $B$ 는 동점이고,  $|\overrightarrow{PB}|$ 는 원의 반지름의 길이  $\sqrt{2}$ 로 일정하다.  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 가 최대이기 위해서는  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$  이상  $180^\circ$  이하에서 최소여야 한다. 점  $B$ 가 점  $B_1$  위치에 있을 때  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$ 가 가능하다.

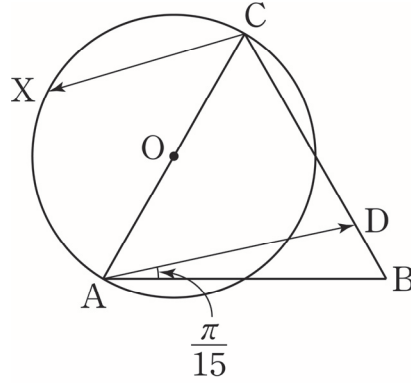
따라서  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}| \times |\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ 이다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 가 최소이기 위해서는  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$  이상  $180^\circ$  이하에서 최대여야 한다.  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각이  $180^\circ$ 가 가능하지 않다.  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각의 최댓값은 점  $B$ 가 점  $D$  위치에 있을 때로  $90^\circ$ 이다.  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}| \times |\overrightarrow{PB}| \times \cos 90^\circ = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 0 = 0$ 이다.

좌표평면에서 점  $P$ , 점  $A$ 는 정점이고 점  $B$ 가 호 위를 움직이는 동점이라면  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대, 최소를 구할 때  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각이  $0^\circ, 180^\circ$ 가 될 수 있는지 꼭 확인하자. 점  $B$ 가 호 위를 움직일 때는 점  $B$ 가 원 위를 움직일 때와 달리 제한된 범위에서만  $\overrightarrow{PB}$ 가 자유로운 방향을 지니는 벡터이기 때문이다.

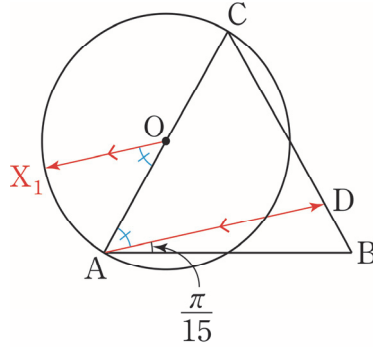
11학년도 수능 22번

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를  $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$ 가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CX}$ 의 내적  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자.  $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



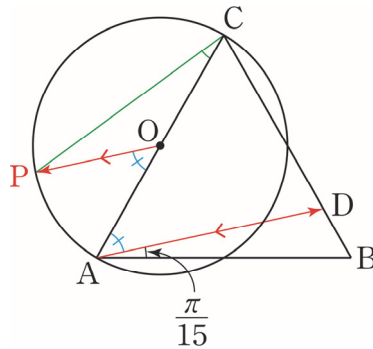


1. 점 A, 점 C, 점 D는 정점이고 점 X는 원 O를 움직이는 동점이다. 원의 중심 O를 거쳐  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$ 를 쪼개면  $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OX})$ 이다. 점 O도 정점이므로  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CO}$ 는 고정값을 갖는다. 따라서  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OX}$ 가 최소일 때  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$ 가 최소이다.



$|\overrightarrow{OX}|$ 는 원의 반지름의 길이로 일정하다.  $\overrightarrow{OX}$ 는 자유로운 방향을 지니는 벡터이기에  $\overrightarrow{AD}$ 와 어떤 각이든 이룰 수 있다. 따라서  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OX}$ 가 최소가 되기 위해서는  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{OX}$ 가 이루는 각이  $180^\circ$  이면 되므로 점 X가 점  $X_1$  위치에 있으면 된다. 직선  $OX_1$ 과 직선 AD가 평행하다는 표시를 꼭 하자.

2. 점  $X_1$ 은 곧 점 P이다.



직선  $OX_1$ 과 직선 AD가 평행하므로  $\angle AOP = \frac{4}{15}\pi$ 이다.  $\widehat{AP}$ 에 대한 중심각은  $\angle AOP$ 이고 원주각은  $\angle ACP$ 이다. 어떤 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이다.

따라서  $\angle ACP = \frac{2}{15}\pi$ 이고  $p = 15, q = 2$ 다.  $p + q = 17$ 이므로 답은 17!!

#### comment

평면벡터 회전의 기원이 되는 문제이다. 벡터 쪼개기, 벡터 내적 조건 해석, 벡터 회전에서 정점, 동점 구분은 매우 중요하므로 꼭 각 점이 정점인지 동점인지 따져주자.

벡터 정사영을 이용해도 되지만 벡터 회전을 이용하는 것이 훨씬 수월하다. 원의 중심을 거쳐 벡터를 쪼개  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OX}$ 를 얻어내고 직선 AD 위로 점 X의 정사영을 내릴 수 있으나 상대적으로 필요한 각을 찾기 어렵다.

좌표평면 위에  $\overline{AB}=5$ 인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각  $O_1, O_2$ 라 하자. 원  $O_1$  위의 점 C와 원  $O_2$  위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

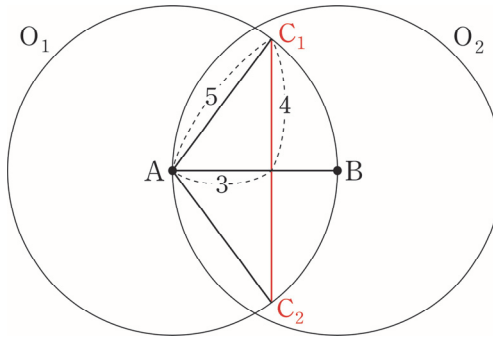
$$(가) \cos(\angle CAB) = \frac{3}{5}$$

$$(나) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 30 \text{ 이고 } |\overrightarrow{CD}| < 9 \text{ 이다.}$$

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값이  $a+b\sqrt{74}$ 이다.  $a+b$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 유리수이다.) [4점]



1. 조건 파악이 한 번에 되지 않는다. 한 줄씩 끊어가며 조건을 파악하자.  
조건 (가)까지 고려한 그림은 아래와 같다.



$\cos(\angle CAB) = \frac{3}{5}$ 를 만족하는 원  $O_1$  위의 점  $C$ 의 후보는 점  $C_1$ , 점  $C_2$ 이다.

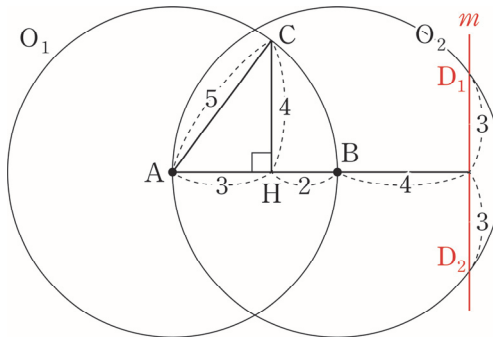
하지만 점  $C_1$ , 점  $C_2$ 는  $\overline{AB}$ 에 대해 대칭이기에 점  $C$ 를 둘 중 어디에 고정해도 문제 상황이 크게 달라질 것 같지 않다. 따라서 점  $C$ 를 점  $C_1$  위치에 고정하겠다.

후에 의심스러우면 점  $C$ 를 점  $C_2$  위치에 고정할 때 문제의 답이 똑같이 나오는지 확인하면 된다.

2. 조건 (나)를 살펴보자. 점  $A$ , 점  $B$ , 점  $C$ 는 정점이다.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = 30$ 에서  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -15$ 이므로  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 45$ 이다.

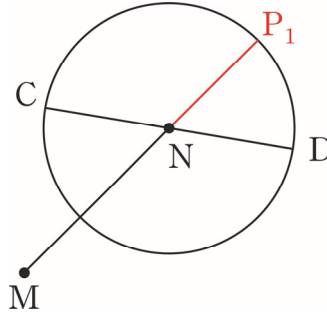
점  $A$ , 점  $B$ 는 정점이고 점  $D$ 는 동점이므로  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 45$ 는 점  $D$ 가 직선 위에 존재함을 뜻한다.



점  $C$ 의 직선  $AB$  위로의 정사영은 점  $H$ 이고  $\overline{AB} = 5$ 이므로 점  $D$ 는 점  $H$ 로부터 거리가 6인 직선  $m$  위에 존재한다. 점  $D$ 는 원  $O_2$  위의 점이기도 하니 점  $D$ 의 후보는 직선  $m$ 과 원  $O_2$ 의 교점인 점  $D_1$ , 점  $D_2$ 이다.

$|\overline{CD}| < 9$ 까지 고려하면 원  $O_2$ 의 지름이 10이므로 직관적으로 점  $D$ 는 점  $D_1$  위치에 있을 듯하다. 확실히 하기 위해서는 점  $A$ 를 원점으로 잡고 직선  $AB$ 를  $x$ 축으로 잡아 각 점의 좌표를 구하면 된다. 점  $A(0,0)$ , 점  $B(5,0)$ , 점  $C(3,4)$ , 점  $D_1(9,3)$ , 점  $D_2(9,-3)$ 이다.  $|\overline{CD_1}| = \sqrt{37} < 9$ ,  $|\overline{CD_2}| = \sqrt{85} > 9$ 이므로 점  $D$ 의 위치는 점  $D_1$ 이 맞다.

3.  $\overline{CD}$ 를 지름으로 하는 원을 새로 그려주자. 이 원의 중심은  $\overline{CD}$ 의 중점인 점 N이다. 기존에 있던 그림을 계속 사용하면 그림이 너무 더러워져 실수하기 쉽다.



$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값을 구해야 한다. 점 A, 점 B는 정점이고 점 P는 동점이다. 이럴 땐 이전에 배운 내용을 떠올리면  $\overline{AB}$ 의 중점 M을 거쳐  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2$ 로 쪼개면  $|\overrightarrow{MB}|^2$ 는 고정값을 가져  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 만 고려하면 되기에  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값을 구할 때 유리하다.

점 M, 점 N, 점 P가 일직선 위에 있을 때  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 이 최댓값이나 최솟값을 갖는다.  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 이 최대일 때는 점 P가 점 P<sub>1</sub> 위치에 있다.

이제 좌표를 이용하여 필요한 길이들을 구해보자. 점 A(0,0), 점 B(5,0), 점 M( $\frac{5}{2}, 0$ ), 점 C(3,4), 점 D(9,3), 점 N( $6, \frac{7}{2}$ )이다. 따라서  $\overline{CD}$ 를 지름으로 하는 원의 반지름은  $\frac{\sqrt{37}}{2}$ 이고  $|\overrightarrow{MB}|^2 = \frac{25}{4}$ ,  $|\overrightarrow{MN}| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$|\overrightarrow{PM}|$ 의 최댓값은  $|\overrightarrow{MN}|$ 와  $\overline{CD}$ 를 지름으로 하는 원의 반지름을 더한 값이다. 따라서  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 의 최댓값은  $|\overrightarrow{P_1M}|^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$ 이다.

따라서  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값은  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{P_1M}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 = \frac{55}{2} + \frac{7\sqrt{74}}{2}$ 이다.  
 $a = \frac{55}{2}$ ,  $b = \frac{7}{2}$ 이고  $a + b = \frac{55}{2} + \frac{7}{2} = 31$ 으로 답은 31!!

**comment**

중점을 거친 벡터 쪼개기와 벡터 내적 조건 해석을 적절히 이용한 아름다운 문제였다. 벡터 쪼개기, 벡터 내적 조건 해석, 벡터 회전에서 정점, 동점 구분은 매우 중요하므로 꼭 각 점이 정점인지 동점인지 따져주자. 최종 계산 처리는 가능하면 머리를 싸매며 기하로 하지 말고 좌표를 이용하자.



좌표평면 위의 두 점  $A(6, 0)$ ,  $B(8, 6)$ 에 대하여 점  $P$ 가  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = \sqrt{10}$ 을 만족시킨다.

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 값이 최대가 되도록 하는 점  $P$ 를  $Q$ 라 하고, 선분  $AB$ 의 중점을  $M$ 이라 할 때,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ}$ 의 값은? (단,  $O$ 는 원점이다.) [4점]

①  $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

②  $\frac{9\sqrt{10}}{5}$

③  $\frac{12\sqrt{10}}{5}$

④  $3\sqrt{10}$

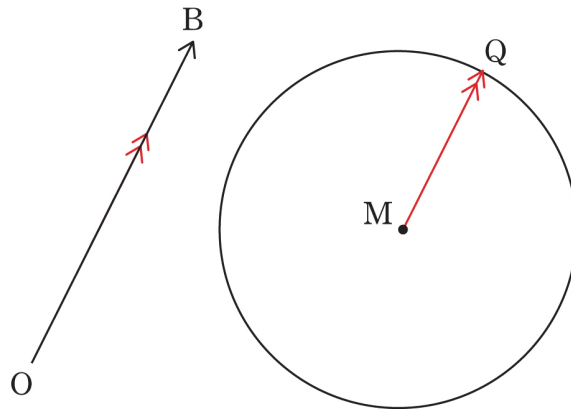
⑤  $\frac{18\sqrt{10}}{5}$



1. 점 A, 점 B는 정점이고 점 P는 동점이다.  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 를 간소화하기 위해 Chapter 2에서 배운 대로  $\overline{AB}$ 의 중점 M을 이용하자.  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 2 \times |\overrightarrow{PM}|$ 이므로  $|\overrightarrow{PM}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 이다. 점 P의 자취는 중심이 점 M이고 반지름이  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 인 원이다.

점 O, 점 B, 점 M은 정점이고 점 P는 동점이다. 원의 중심 M을 거쳐  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 를 쪼개면  $\overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP})$ 이다.  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}$ 은 고정값을 갖는다.

따라서  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{MP}$ 가 최대일 때  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 도 최대이다.



$|\overrightarrow{MP}|$ 는 원의 반지름의 길이로 일정하다.  $\overrightarrow{MP}$ 는 자유로운 방향을 지닌 벡터이기에  $\overrightarrow{OB}$ 와 어떤 각이든 이룰 수 있다. 따라서  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{MP}$ 가 최대이기 위해서는  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MP}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$ 이면 되므로 점 P가 점 Q 위치에 있으면 된다.

※ 그림을 그릴 때 애써 좌표축을 그릴 필요가 없다. 우리가 필요한 것은 점들의 위치 관계뿐이기 때문이다.

2.  $\overrightarrow{MQ} = k\overrightarrow{OB}$  ( $k > 0$ )여야 한다.  $|\overrightarrow{MQ}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = 10$ 이므로  $k = \frac{1}{2\sqrt{10}}$ 이다.

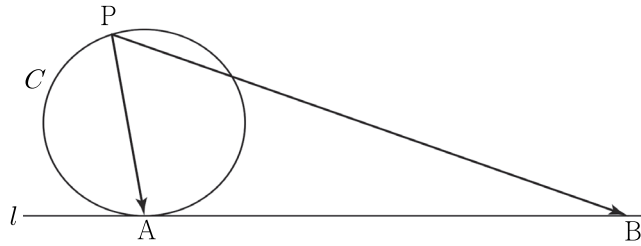
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{OA} \cdot k\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2\sqrt{10}} \times 48 = \frac{24}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{5} \text{이다. 답은 ㉓!!}$$

※  $\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{OB}$ 가 평행이고,  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ 가 이루는 각  $\theta$ 에 대하여  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 이므로

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ} = 6 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{4}{5} \text{이다.}$$

17학년도 사관학교 28번

그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원  $C$ 와 원  $C$  위의 점  $A$ 에서의 접선  $l$ 이 있다. 원  $C$  위의 점  $P$ 와  $\overline{AB}=24$ 를 만족시키는 직선  $l$  위의 점  $B$ 에 대하여  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]





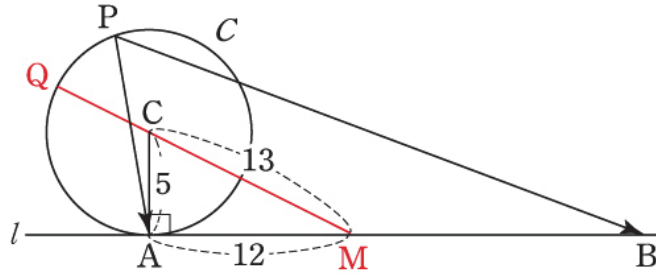
1. 점 A, 점 B는 정점이고 점 P는 동점이다.  $\overline{AB}$  중점 M을 거쳐  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 를 쪼개면

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}) = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 \text{이다.}$$

$|\overrightarrow{MB}|^2$ 은 고정값을 가지므로  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 가 최대일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 도 최대이다.

$$|\overrightarrow{MB}|^2 = 12^2 = 144 \text{이므로 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 - 144 \text{이다.}$$

2. 원의 중심 C와 접점을 이어주고 직각 표시를 하자.



직각삼각형 CAM에서  $\overline{CA} = 5$ ,  $\overline{AM} = 12$ 이므로  $\overline{CM} = 13$ 이다.

$|\overrightarrow{PM}|$ 이 최대일 때는 점 P가 점 Q 위치에 있을 때이다.

$$|\overrightarrow{PM}| \leq |\overrightarrow{QM}| = |\overrightarrow{QC}| + |\overrightarrow{CM}| = 5 + 13 = 18 \text{이므로}$$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값은  $18^2 - 12^2 = (18 + 12) \times (18 - 12) = 30 \times 6 = 180$ 이다. **답은 180!!**

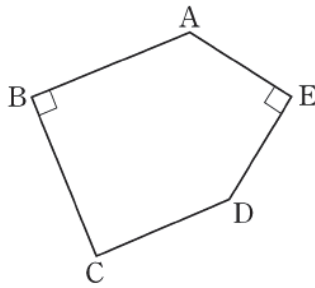
CHAPTER  
02 문제

01 10학년도 수능 14번

평면에서 그림의 오각형 ABCDE가  $\overline{AB} = \overline{BC}$ ,  $\overline{AE} = \overline{ED}$ ,  $\angle B = \angle E = 90^\circ$  를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 선분 BE의 중점 M에 대하여  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$  와  $\overrightarrow{AM}$ 은 서로 평행하다.  
 ㄴ.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED}$   
 ㄷ.  $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{BE}|$



- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ                      ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**02** 17학년도 9월 평가원 16번

직사각형 ABCD의 내부의 점 P가  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CA}$ 를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ.  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{CP}$

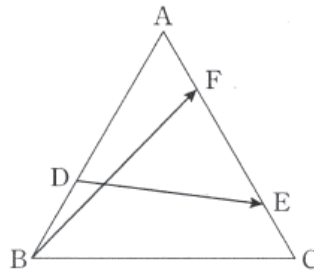
ㄴ.  $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ                      ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**03** 14학년도 9월 평가원 11번

한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2:1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3:1과 1:3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때,  $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$ 의 값은? [3점]



- ① 17                      ② 18                      ③ 19                      ④ 20                      ⑤ 21

#### 04 07학년도 수능 20번

타원  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 두 초점을  $F, F'$ 이라 하자. 이 타원 위의 점  $P$ 가  $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 1$ 을 만족시킬 때, 선분  $PF$ 의 길이는  $k$ 이다.  $5k$ 의 값을 구하시오. (단,  $O$ 는 원점이다.) [3점]

#### 05 17년 10월 교육청 10번

타원  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  위의 점  $P$ 와 두 초점  $F, F'$ 에 대하여  $|\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'}|$ 의 최댓값은? [3점]

① 5

② 6

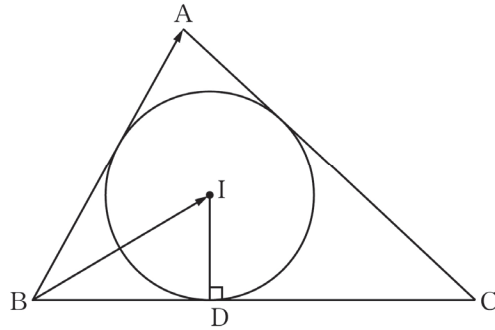
③ 7

④ 8

⑤ 9

**06** 16년 10월 교육청 25번

그림과 같이  $\overline{AB} = 15$  인 삼각형  $ABC$  에 내접하는 원의 중심을  $I$  라 하고, 점  $I$  에서 변  $BC$  에 내린 수선의 발을  $D$  라 하자.  $\overline{BD} = 8$  일 때,  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$  의 값을 구하시오. [3점]



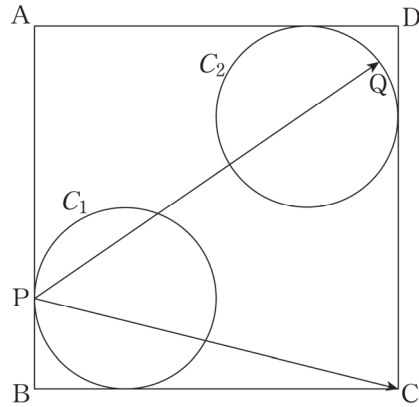
**07** 13학년도 수능 26번

한 변의 길이가 2 인 정삼각형  $ABC$  의 꼭짓점  $A$  에서 변  $BC$  에 내린 수선의 발을  $H$  라 하자. 점  $P$  가 선분  $AH$  위를 움직일 때,  $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$  의 최댓값은  $\frac{q}{p}$  이다.  $p+q$  의 값을 구하시오. (단,  $p$  와  $q$  는 서로소인 자연수이다.) [4점]



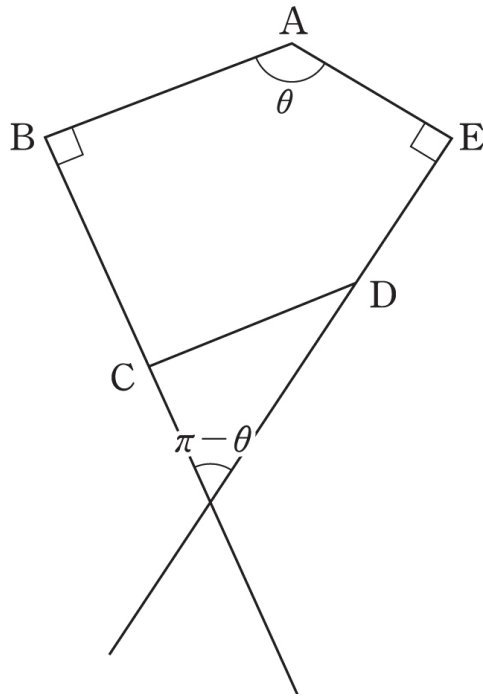
**08** 17년 10월 교육청 28번

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 선분 AB와 선분 BC에 접하고 반지름의 길이가 1인 원  $C_1$ 과 선분 AD와 선분 CD에 접하고 반지름의 길이가 1인 원  $C_2$ 가 있다. 원  $C_1$ 과 선분 AB의 접점을 P라 하고, 원  $C_2$  위의 한 점을 Q라 하자.  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 의 최댓값을  $a + \sqrt{b}$ 라 할 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 와  $b$ 는 유리수이다.) [4점]



01 10학년도 수능 14번

답 : ㉔



1.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}$ 이므로  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ 와  $\overrightarrow{AM}$ 은 평행하다. 선지 (㉑)은 참.
2.  $\overrightarrow{AB}$ 와  $\overrightarrow{AE}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면,  $\overrightarrow{BC}$ 와  $\overrightarrow{ED}$ 가 이루는 각의 크기는  $\pi - \theta$ 이다. 따라서  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED}$  이다. 선지 (㉒)은 참.
3.  $\nabla \perp \square$  flow에 따라 선지 (㉑), 선지 (㉒)에서 알아낸 정보를 최대한 적극적으로 이용하자. 이를 활용하기 위해서  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$ 로 두자.

$|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{BE}|$ 임을 보이기 위해서는  $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}|^2$ 을 보이면 된다.

$$|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{ED}|^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED}$$

$$|\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AE}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ 이다.}$$

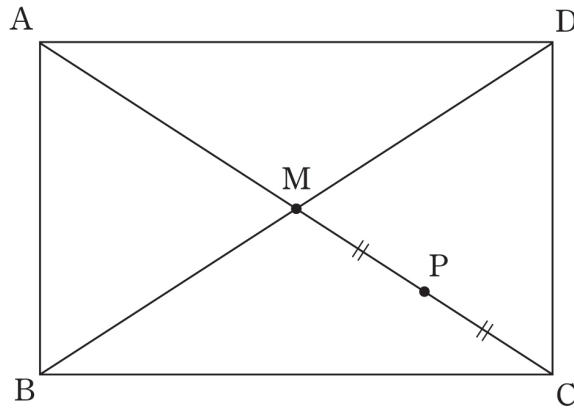
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$ 이고, 선지 (㉒)의  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED}$ 을 활용하면

$|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}|^2 = |\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}|^2$ 임을 알 수 있다. 선지 (㉔)은 참.

02 17학년도 9월 평가원 16번

답 : ㉔

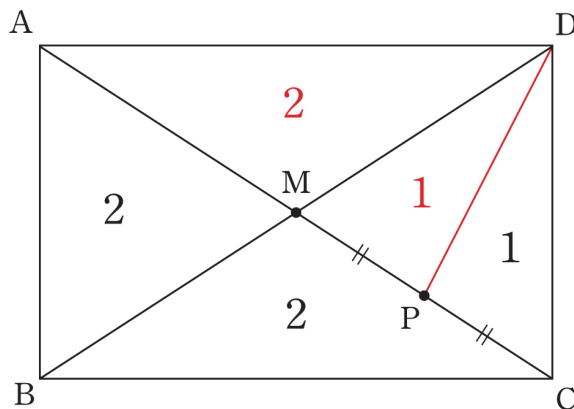
1.  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CA}$  에서  $\overrightarrow{CA}$  의 시점을 점 P로 맞춰주자.  
 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}$ 로 바꿔주고 식을 정리하면  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{CP}$ 이다. 선지 (ㄱ)은 참.
2. 직사각형의 대각선의 교점을 점 M이라 하자. 점 M은  $\overline{AC}$ 의 중점이고, 동시에  $\overline{BD}$ 의 중점이다.  
 따라서 선지 (ㄱ)에 의해  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{CP}$ 이므로  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CP}$ 이므로 점 P는  $\overline{CM}$ 의 중점이다.  
 그림을 그려보면 다음과 같다.



따라서  $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ 이다. 선지 (ㄴ)은 참.

※  $\overline{AC}, \overline{BD}$ 의 중점이 점 M으로 같으므로  
 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) = 4\overrightarrow{PM}$ 이다.  
 $4\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CP}$ 이므로 점 P는  $\overline{AC}$ 를 3:1로 내분하는 점이다.

3.  $\overline{AM} = 2\overline{MP}$ 이므로 직사각형 ABCD의 넓이는 다음과 같다.



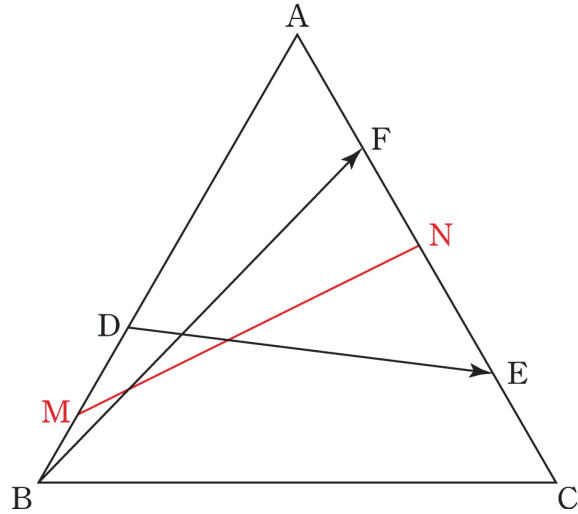
따라서 넓이가 8이므로 선지 (ㄷ)은 참.

03 14학년도 9월 평가원 11번

답 : ③

1. 점 B, 점 D, 점 E, 점 F는 모두 정점이다.

중점을 거쳐  $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$ 을 쪼개보자.



$\overline{BD}$ 의 중점을 M,  $\overline{EF}$ 의 중점을 N이라 하면  $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{MN}$ 이다.

따라서  $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = 4 \times |\overrightarrow{MN}|^2$ 이다.

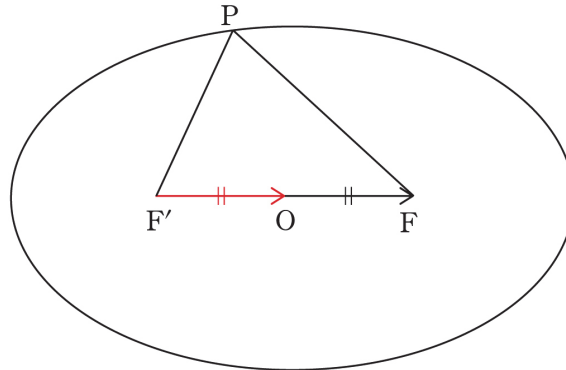
2.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 이고,  $\overrightarrow{BA}$ 와  $\overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기는  $\frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$4 \times |\overrightarrow{MN}|^2 = 4 \times \left| \frac{5}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right|^2 = \left| \frac{5}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \right|^2 = \left| 25 + 9 + \frac{10}{3}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) \right|$$

$$= \left| 34 + \frac{10}{3} \times 3 \times 3 \times \cos \frac{2\pi}{3} \right| = 34 - 15 = 19 \text{이다.}$$

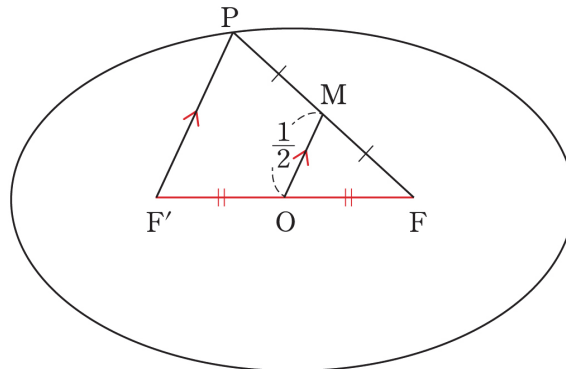
04 07학년도 수능 20번

답 : 15



1. 벡터 평행이동을 이용하면  $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{F'O}$ 이다.  
따라서  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{F'O} = \overrightarrow{F'P}$ 이므로  $|\overrightarrow{F'P}| = 1$ 이다.
2. 타원의 장축의 길이는 4이므로  $\overline{PF} = 4 - 1 = 3$ 이다. 따라서  $k = 3$ 이므로  $5k = 15$ 이다.

※ 중점연결정리 이용한 풀이



1. 점 O, 점 P, 점 F는 정점이다.  $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 1$ 를 간소화하기 위해 Chapter 2에서 배운 대로 점 A와 점 B의 중점 M을 이용하자.  $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 2 \times |\overrightarrow{OM}|$ 이므로  $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}$ 이다.
2.  $\triangle PFF'$ 에서  $\overline{OF} = \overline{OF'}$ ,  $\overline{MF} = \overline{PM}$ 이므로  $\overline{MO} \parallel \overline{PF'}$ ,  $\overline{MO} = \frac{1}{2} \overline{PF'}$ 이다. ( $\because$  중점연결정리)  
 $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}$ 이므로  $\overline{PF'} = 1$ 이다. 타원의 장축의 길이는 4이므로  $\overline{PF} = 4 - 1 = 3$ 이다.  
따라서  $k = 3$ 이므로  $5k = 15$ 이다.

**05** 17년 10월 교육청 10번

답 : ②

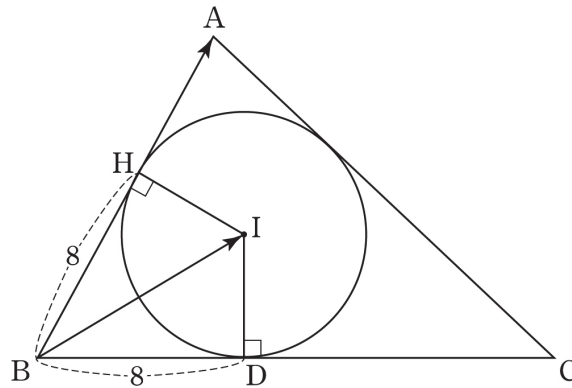
1. 점 F, 점 F'는 정점이고 점 P는 동점이다.  $|\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'}|$ 를 간소화하기 위해 Chapter 2에서 배운 대로 점 F와 점 F'의 중점인 원점 O를 이용하자.

$\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'} = 2\overrightarrow{PO}$ 이다.  $|\overrightarrow{PO}|$ 가 최댓값을 가지려면 점 P는 타원의 장축 위에 존재하면 된다. 장축의 길이는 6이므로  $2|\overrightarrow{PO}| = 6$ 이다.

**06** 16년 10월 교육청 25번

답 : 120

1. 원의 중심과 접점을 잇고 직각 표시를 해주자.



점 I에서  $\overline{BA}$ 에 내린 수선의 발을 점 H라 하면  $\overline{BH} = \overline{BD} = 8$ 이다.

벡터 정사영을 이용하면  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$ 이다.

따라서  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = |\overrightarrow{BA}| \times |\overrightarrow{BH}| = 15 \times 8 = 120$ 이다.

**07** 13학년도 수능 26번

답 : 7

1. 점 A, 점 B는 정점이고 점 P는 동점이다.  $\overline{AB}$  중점 M을 거쳐  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 를 쪼개면

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}) = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 \text{이다.}$$

$|\overrightarrow{MB}|^2$ 은 고정값을 가지므로  $|\overrightarrow{PM}|^2$ 가 최대일 때  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 도 최대이다.

하지만  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대가  $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 의 최대가 아니다.

2. 점 B에서  $\overline{AH}$ 에 내린 수선의 발은 점 H이므로  $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH}|$ 이다.

$$|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH}| = \overline{PA} \times \overline{PH} \text{에서 } \overline{AH} = \sqrt{3} \text{이므로 } \overline{PA} = a \text{라 하면 } \overline{PH} = \sqrt{3} - a \text{이다.}$$

따라서  $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH}| = \overline{PA} \times \overline{PH} = a \times (\sqrt{3} - a)$  에서  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$  일 때 최댓값  $\frac{3}{4}$ 을 얻는다.

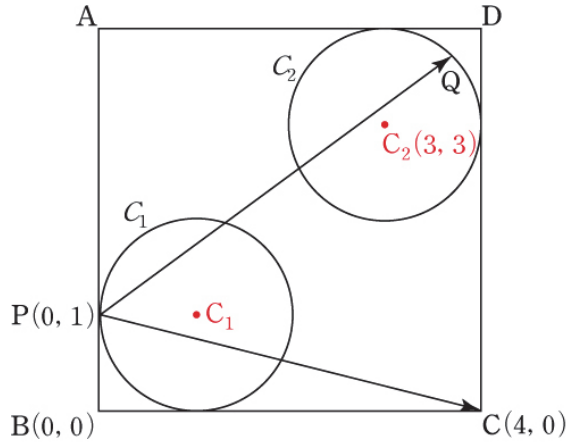
$p = 4, q = 3$ 이다.

※  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대가  $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 의 최대가 아님에 유의하자.

08 17년 10월 교육청 28번

답 : 27

1. 점 P, 점 C는 정점이고 점 Q는 동점이다. 원  $C_2$ 의 중심  $C_2$ 를 거쳐  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 를 쪼개면  $\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PC_2} + \overrightarrow{C_2Q})$ 이다.  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC_2}$ 는 고정값을 갖는다.  
따라서  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{C_2Q}$ 가 최대일 때  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 도 최대이다.



$|\overrightarrow{C_2Q}|$ 는 원의 반지름의 길이로 일정하다.  $\overrightarrow{C_2Q}$ 는 자유로운 방향을 지닌 벡터이기에  $\overrightarrow{PC}$ 와 어떤 각이든 이룰 수 있다. 따라서  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{C_2Q}$ 가 최대이기 위해서는  $\overrightarrow{PC}$ ,  $\overrightarrow{C_2Q}$ 가 이루는 각이  $0^\circ$ 이면 된다.  
따라서  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PC_2} + \overrightarrow{C_2Q}) \leq \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC_2} + |\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{C_2Q}|$ 이다.

2.  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC_2}$ 에서 점 P, 점 C, 점  $C_2$ 는 모두 정점이므로 좌표를 잡고 계산하는 것이 편리하다.  
점 B를 원점으로 잡고, 점 P의 좌표를 (0, 1), 점 C의 좌표를 (4, 0)으로 설정하면 점  $C_2$ 의 좌표는 (3, 3)이다.

$\overrightarrow{PC} = (4, -1)$ ,  $\overrightarrow{PC_2} = (3, 2)$ 이므로  
 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC_2} + |\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{C_2Q}| = (4, -1) \cdot (3, 2) + \sqrt{17} = 10 + \sqrt{17}$ 이다.  
 $a = 10$ ,  $b = 17$ 이다.