제 3교시

2021학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

나형

성명	

수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공　　　란

기출의 파급효과 수학

https://atom.ac/books/7241
기출의 파급효과 수학 시리즈

https://cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 수학은 기출로부터 얻을 수 있는 도구와 태도를 정리하고 체화하여 일관적으로 준킬러 이상 기출을 뚫어가는 교재입니다. 교재 내에 평가원분만 아니라 교육청, 사관학교, 경찰대 주요 기출 선별이 모두 되어 있습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.
교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

파급효과, 법사 님, 출기능수 님, 백건아 님 등등 **오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.**
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

이외에도 **검증된 우수한 컨설팅 팀 TWCG가 정리한 과거부터 현재까지 정시, 수시 입결을 확인할 수 있습니다.**
입시에 대한 질문은 가입하시기만 하면 TWCG 팀장 및 팀원분들께 하실 수 있습니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2^3 = 8$ ④

2. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ 일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

② $\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$

3. $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ 일 때, $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$ 의 값은? [2점]

① -4 ② $-\frac{11}{3}$ ③ $-\frac{10}{3}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{8}{3}$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{8}{9}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3}$$

5

4. 함수 $f(x) = (x^3 - 2x + 3)(ax + 3)$ 에 대하여 $f'(1) = 15$ 일 때, a 의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

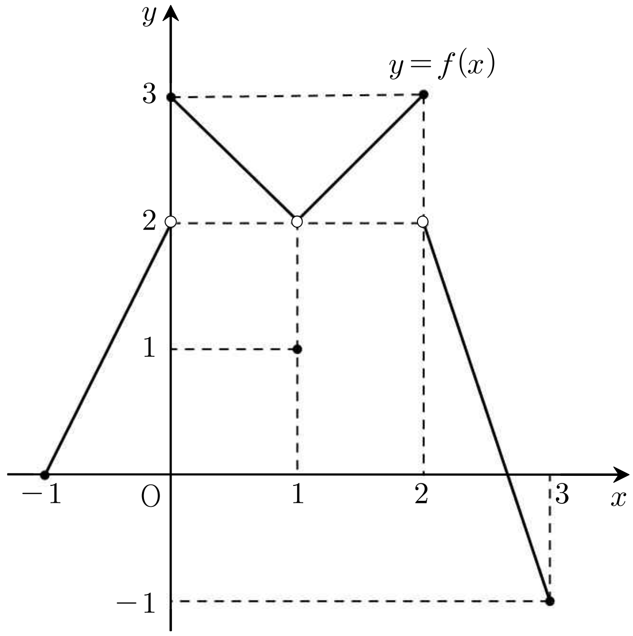
$$f'(x) = (3x^2 - 2)(ax + 3) + a(x^3 - 2x + 3)$$

$$15 = a + 3 + 2a$$

$a = 4$

2

5. 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2+2=4 ④

6. $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

$_5C_k \ (2x^2)^k \left(\dfrac{1}{x}\right)^{5-k}$

①

$2k+k-5=4$

$_5C_3 \times 2^3 = 80$

$k=3$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^3+ax-3$$

$f(x)=3x^2+2$

을 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$0=a-2$

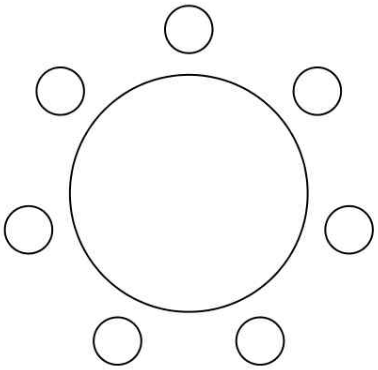
⑤

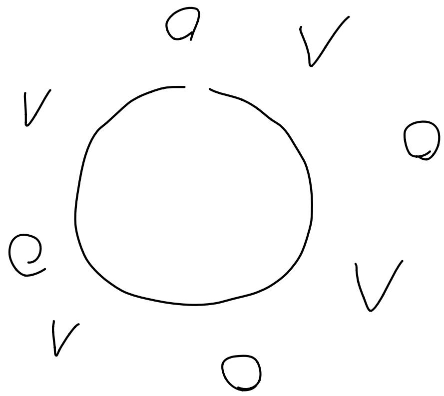
$f(2)=14$

8. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

$3! \times {}_4C_3 \times 3!$

$= 144$





① 120 ② 132 ③ 144 ④ 156 ⑤ 168

3

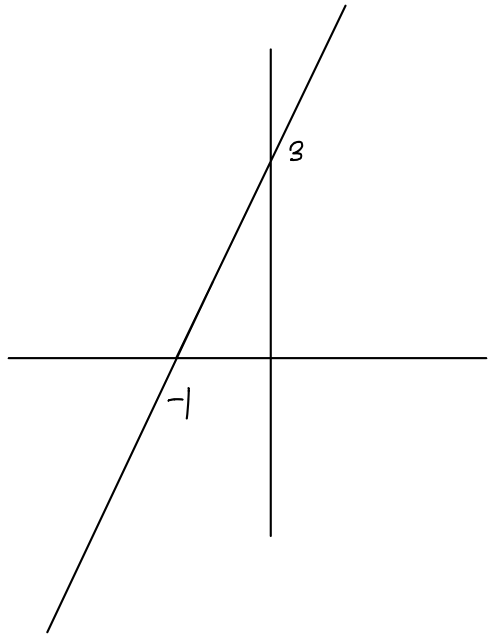
9. 곡선 $y=-x^3+3x^2+4$에 접하는 직선 중에서 기울기가 최대인 직선을 l이라 하자. 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

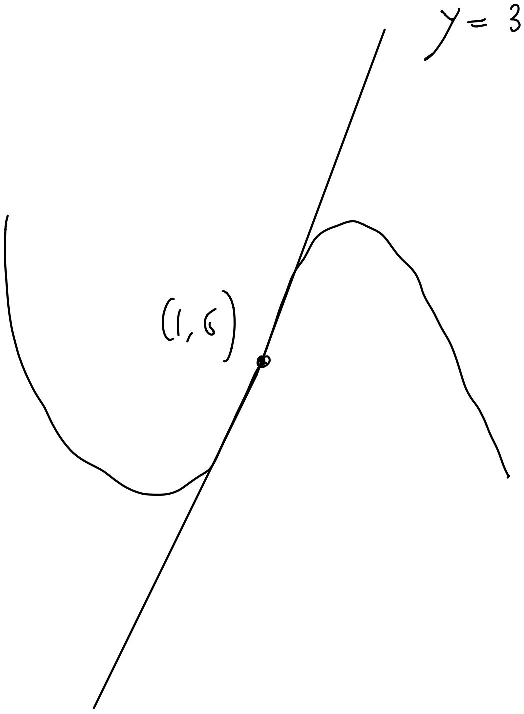
$y' = -3x^2+6x$

$y'' = -6x+6$

1



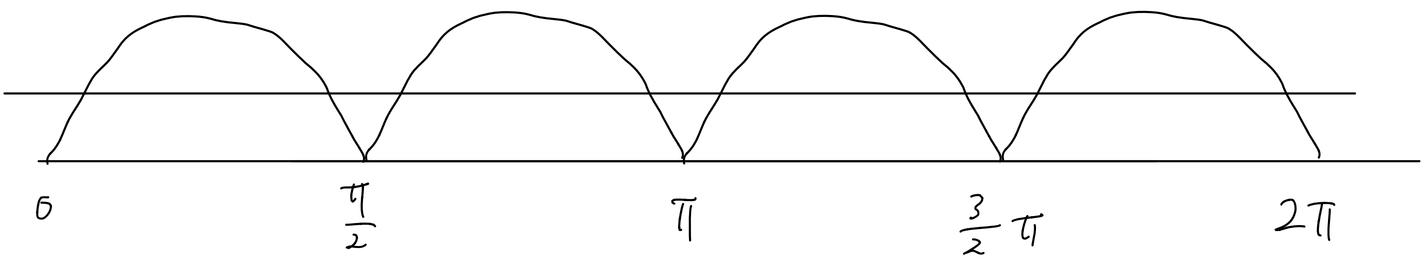
$y = 3x+3$



10. $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 10π ⑤ 12π

3



$$\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi + \frac{5}{2}\pi + \frac{7}{2}\pi = 8\pi$$

11. 어느 사관생도가 1회의 사격을 하여 표적에 명중시킬 확률이 $\frac{4}{5}$이다. 이 사관생도가 20회의 사격을 할 때, 표적에 명중시키는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}\left(\frac{1}{4}X+1\right)$의 값은? (단, 이 사관생도가 매회 사격을 하는 시행은 독립시행이다.) [3점]

$\frac{1}{16}V(X)$

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

①

$X \sim B\left(20, \frac{4}{5}\right)$

$V(X) = 20 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$

12. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2t+3,\quad v_2(t)=at(6-t)$$

이다. 시각 $t=3$에서 두 점 P, Q가 만날 때, a의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$P(t)=t^2+3t$

$Q(t)=-\frac{a}{3}t^3+3at^2$

$18=-9a+27a$

$a=1$

①

13. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = \frac{3}{2}$ 이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n-1} + a_{2n} = 2a_n$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [3점]

2

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

$16 \times \frac{3}{2} = 24$

$a_1 + a_2 = 2a_1$

$a_3 + a_4 = 2a_2$

$\vdots$

$a_{15} + a_{16} = 2a_8$

$4a_1$

$4a_4$

$8a_1$

$8a_2$

$16a_1$

14. 어느 방위산업체에서 생산하는 방독면 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 50인 정규분포를 따른다고 한다. 이 방위산업체에서 생산하는 방독면 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 방독면 무게의 표본평균이 1740이었다. 이 결과를 이용하여 이 방위산업체에서 생산하는 방독면 1개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $1720.4 \le m \le a$이다. $n+a$의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.) [4점]

① 1772.6 ② 1776.6 ③ 1780.6 ④ 1784.6 ⑤ 1788.6

$a + 1720.4 = 1740 \times 2$

$a - 1720.4 = 2 \times 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{n}}$

④

$a = 1759.6$

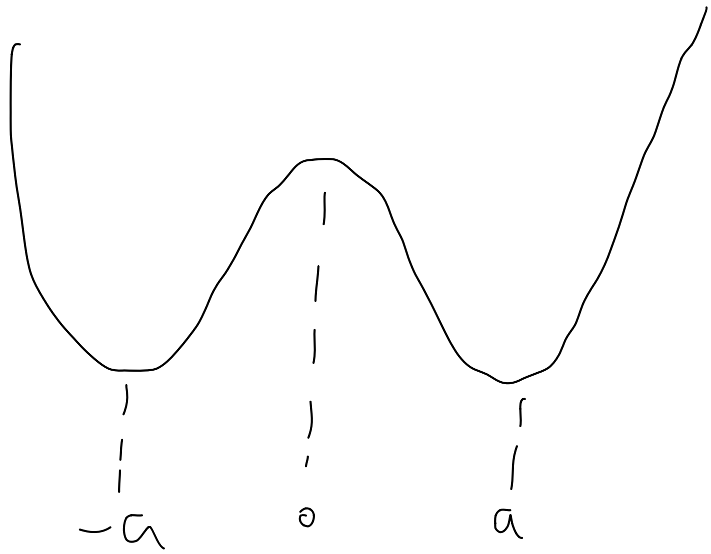
$n = 25$

15. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다. (나) 함수 $f(x)$는 극댓값 7을 갖는다.

$f(1)=2$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2



⑤

$f(x)=(x-a)^2(x+a)^2-a^4+7$

$f(a)=-a^4+7=-2$

$2=(1-a^2)^2-a^4+7$

$a^2=t$ $2=-2t+6$

$t=3$, $a=\sqrt{3}$

16. 두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(m+2)$개의 수

$a, \log_2 c_1, \log_2 c_2, \log_2 c_3, \cdots, \log_2 c_m, b$

가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$$\sum_{n=1}^{m} \log_2 C_n = 5$$

$$\frac{m}{2}(a+b) = 5$$

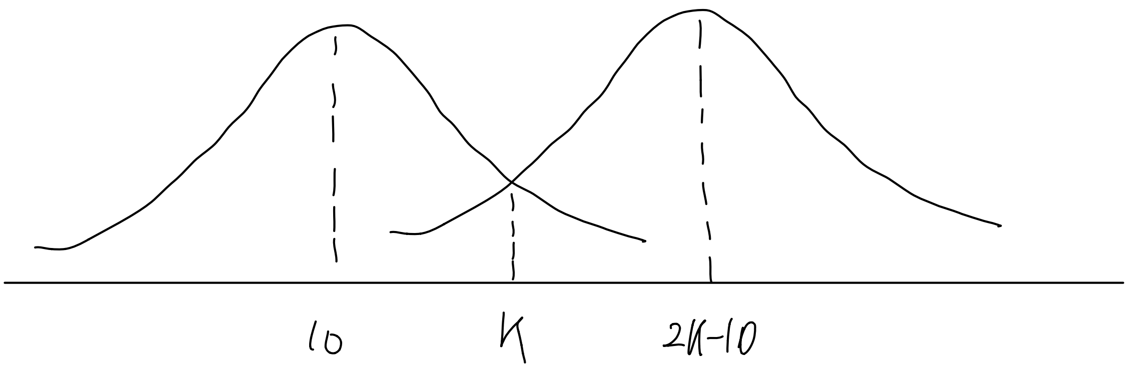
3

17. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10, 5^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 5^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. $\mathrm{P}(Y \le 2k)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m \ne 10$) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.9104 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

⑤



$P(Y \le 2k) = P(Z \le 2) = 0.9772$

18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, $\frac{2!}{2}=1$

(좌변)$=\frac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1}=1$이고, (우변)$=\boxed{(가)}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2m)!}{2^m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{\boxed{(나)}\ (2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$

$$\le \frac{(2m)!}{2^m} + \frac{\boxed{(나)}\ (2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$

$$= \frac{\overset{(2m+2)!}{\boxed{(나)}}}{2^{m+1}} \times \left\{ \frac{1}{\underset{(m+1)(2m+1)}{\boxed{(다)}}} + \frac{1}{(m+1)!} \right\}$$

$$< \frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n}$$

이다.

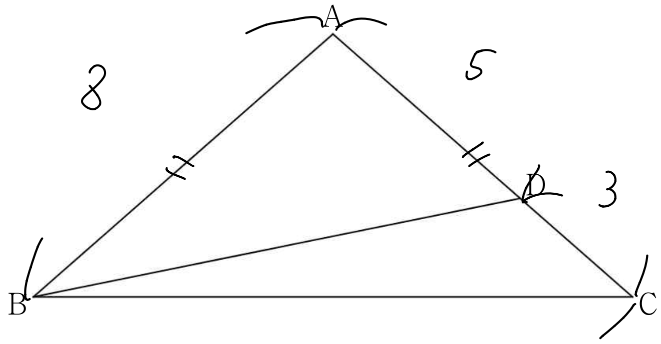
위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\frac{f(2)}{g(4)}$의 값은? [4점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

②

$1+\frac{6!}{5\times 9}=17$

19. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 5 : 3으로 내분하는 점을 D라 하자. $2\sin(\angle ABD) = 5\sin(\angle DBC)$일 때, $\dfrac{\sin C}{\sin A}$의 값은? [4점]



③

① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{7}{11}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{9}{13}$ ⑤ $\dfrac{5}{7}$

$$\frac{5}{\sin\angle ABD} = \frac{\overline{BD}}{\sin A}$$

$$\frac{5\sin\angle DBC}{3\sin\angle ABD} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\frac{3}{\sin\angle DBC} = \frac{\overline{BD}}{\sin C}$$

20. 0이 아닌 실수 k에 대하여 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=3(x-k)(x-2k)$$

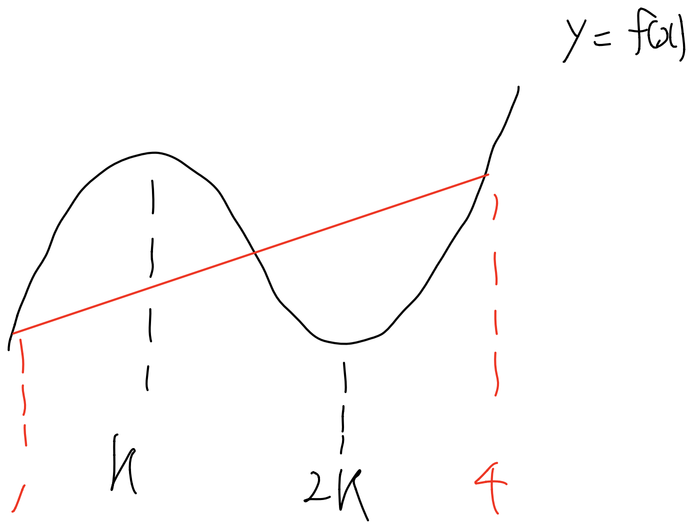
이다. 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1 \text{ 또는 } x \ge 4) \\ \dfrac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)+f(1) & (1<x<4) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha \le k < \beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

4



$1 \le k \le 2$

$f(1) < f(4)$

$\int_1^4 3x^2-9kx+6k^2 \, dx > 0$

$4k^2-15k+14 > 0$

$(k-2)(4k-7) < 0$

$k>2$ or $k<\frac{7}{4}$

$1 \le k < \frac{7}{4}$

$\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$

21. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2\ (x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1}) < 3$ $x_2-x_1 < \log_2 6-\log_2 3 = 1$

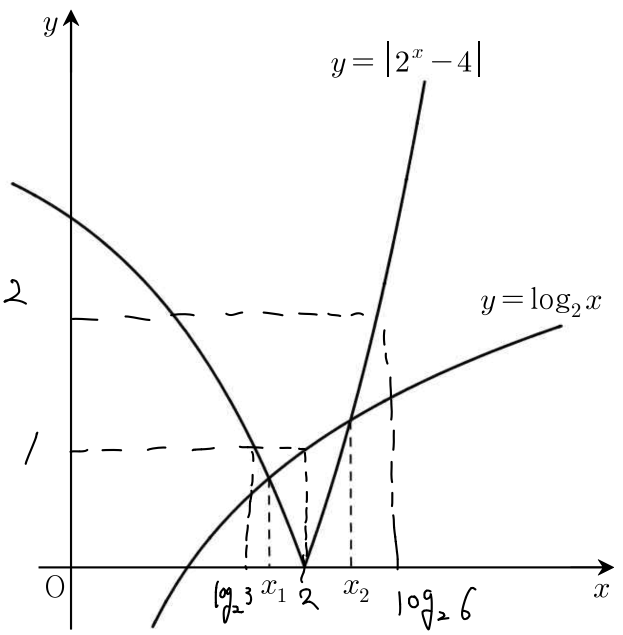
ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2} > 8+\log_2(\log_3 6)$ $\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} > \log_3 6$

$\log_2 \frac{x_2}{x_1}+8$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\frac{x_2}{x_1} < \log_3 6$

②



$\log_2 x_1 = 4-2^{x_1}$

$\log_2 x_2 = 2^{x_2}-4$

$2^{x_2}-2^{x_1} = \log_2 x_1$

$2^{x_2}-2^{x_1} = \log_2 x_1 x_2 < \log_2(\log_2 36) < 3$

$x_1 < 2 < x_2 < \log_2 6$ $x_1 x_1 < \log_2 36$

22. $\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+22x}-x\right)$의 값을 구하시오. [3점]

11

$$\lim_{x \to \infty} \frac{22x}{\sqrt{x^2+22x}+x} = 11$$

23. 함수 $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+1\right)+3$의 주기를 p, 최댓값을 M이라 할 때, $p+M$의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

12

$p=4$, $M=5+3=8$

24. 부등식 $2+\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오. [3점]

$2x-5>0 \Rightarrow x>\frac{5}{2}$

$2>\log_3(2x-5)$

4

$2x-5<9 \Rightarrow x<7$

$x: 3 \sim 6$

25. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. ab가 6의 배수일 때, a 또는 b가 홀수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

$$\frac{2 \times 5}{36 - 21} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

a 홀수 1, 3, 5

$b=6$ $\quad b=2,4,6$ $\quad b=6$

ab가 6의 배수 X

1, 2, 3, 4, 5, $\cancel{6}$

5

a, b 모두 3이 아님 $\quad 4^2$

a, b 중 하나만 3 $\quad 2 \times 2$

$a=b=3$ $\quad 1$

26. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10 & (x\le a) \\ \dfrac{x^2+ax+4a}{x-a} & (x>a) \end{cases}$$

$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

가 $x=a$에서 연속일 때, $f(2a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

$a^2-10=\lim_{x\to a}\dfrac{x^2+ax+4a}{x-a}$

6

$2a^2+4a=0$

$a=-2$

$2a(a+2)=0$

$f(-4)=16-10=6$

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=10$
(나) ab는 홀수이다. a, b 홀수

$a = 2a'-1 \quad (a' \geq 1)$

$b = 2b'-1 \quad (b' \geq 1)$

$2a'+2b'+c+d+e = 12$

$1 \times {}_7C_2 = 21$ $\quad a'=1, b'=1$ $\quad c+d+e=8$, $\geq 1\ \geq 1\ \geq 1$

$2 \times {}_5C_2 = 20$ $\quad \begin{cases} a'=1, b'=2 \\ a'=2, b'=1 \end{cases}$ $\quad c+d+e=6$, $\geq 1\ \geq 1\ \geq 1$

$3 \times {}_3C_2 = 9$ $\quad \begin{cases} a'=1, b'=3 \\ a'=2, b'=2 \\ a'=3, b'=1 \end{cases}$ $\quad c+d+e=4$, $\geq 1\ \geq 1\ \geq 1$

50

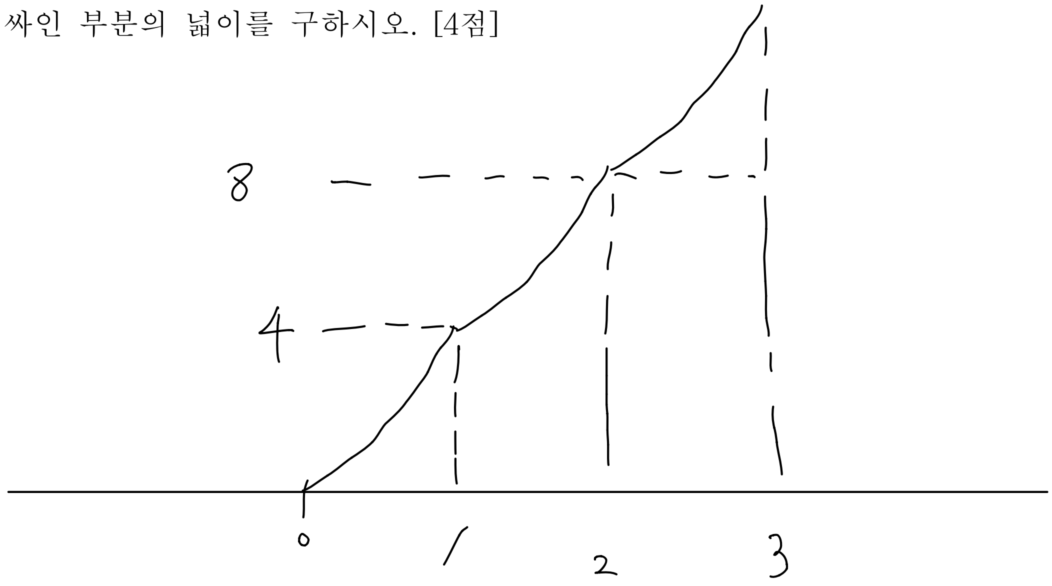
28. 양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = 2x^2 + ax$이다. $x(2x+a)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x) + a^2$이다.

$a+2 = a^2$

$f(x+1) = f(x) + 4$ $(a-2)(a+1) = 0$ $a=2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]



$$4+8+3\times\int_0^1 2x^2+2x\,dx$$

$$=12+3\times\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1=17$$

17

29. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + cn \quad (c\text{는 자연수})$$

$a_1 = c+1$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수가 아닌 수를 작은 것부터 크기순으로 모두 나열하여 얻은 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $b_{20} = 199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

$a_n = 2n - 1 + c$

$c = 3k \Rightarrow a_1, a_3, a_4 \cdots\cdots$

$c = 140 (\times)$ $b_{20} = a_{30} = c + 59$

$a_1 = c+1$

$a_2 = c+3$

$a_3 = c+5$

$a_4 = c+7$

$a_5 = c+9$

$\vdots$

$c = 3k-1 \Rightarrow a_2, a_3, a_5, a_6, \cdots$

$c = 140 (\circ)$ $b_{20} = a_{30} = c + 59$

$c = 3k-2 \Rightarrow a_1, a_2, a_4, a_5, \cdots$

$c = 142 (\circ)$ $b_{20} = a_{29} = c + 57$

$140 + 142 = 282$

282

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

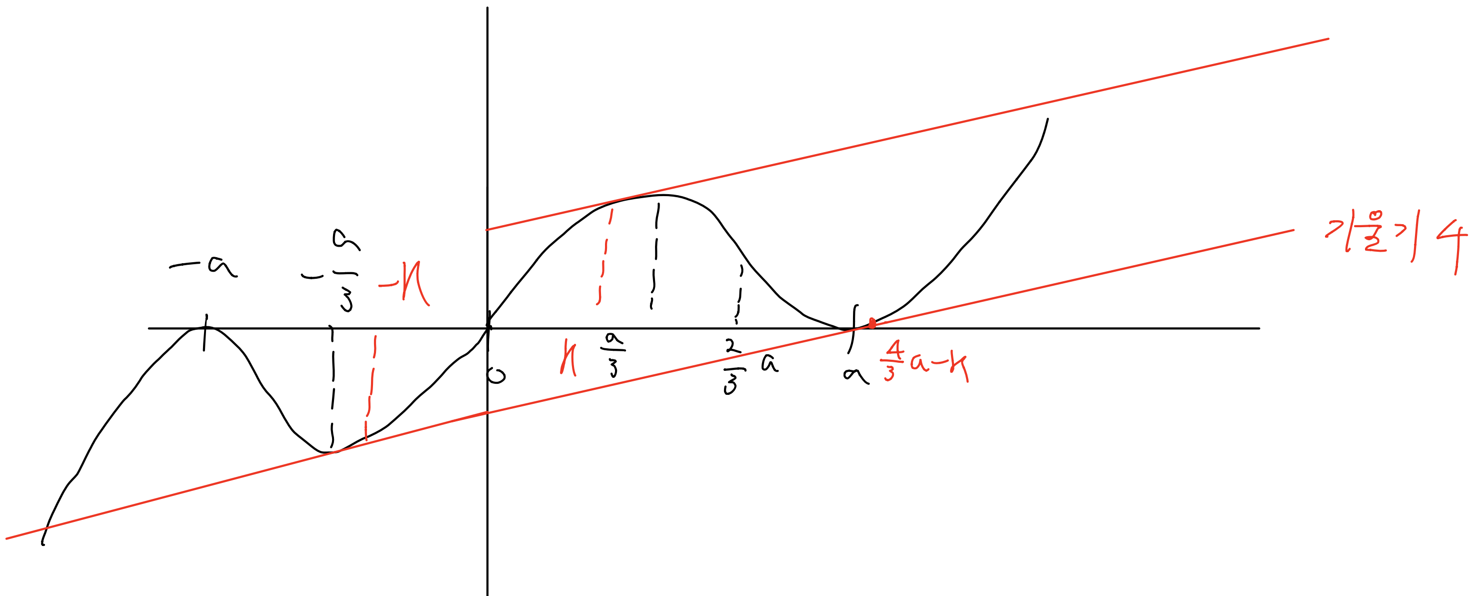
$$f'(x)=\begin{cases} 3(x+a)\left(x+\frac{a}{3}\right) \\ 3(x-a)\left(x-\frac{a}{3}\right) \end{cases}$$

$f'(0)=a^2$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]



$f'(k)=4$, $f'\left(\frac{4}{3}a-k\right)=4$

$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3$

$$\frac{f\left(\frac{4}{3}a-k\right)-f(-k)}{\left(\frac{4}{3}a-k\right)-(-k)}=\frac{\frac{4}{27}a^3}{\frac{4}{3}a}=\frac{a^2}{9}=4$$

36

$a=6$

공 란