수리 영역(가형)

1. $2A-B=\begin{pmatrix}2&6\\4&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-3\\-2&6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&9\\6&-8\end{pmatrix}$

따라서 구하는 값은 5이다.

답 ①

2. $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

답 ②

3. 한 개의 동전을 던져 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{16}$이다.

답 ⑤

4. 일차변환 f에 의하여 직선 $x+5y=2$ 위의 모든 점이 한 점으로 옮겨지므로 행렬

$\begin{pmatrix}3&a\\-2&-10\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

따라서 $-30+2a=0$에서

$a=15$

이때, 일차변환 f에 의하여 점 (p, q)가 점 (b, c)로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix}3&15\\-2&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$

에서

$3p+15q=b,\ -2p-10q=c$

이때, 점 (p, q)는 직선 $x+5y=2$ 위의 점이므로 $p+5q=2$이다.

$b=3(p+5q)=3\times2=6$

$c=-2(p+5q)=-2\times2=-4$

$\therefore a+b+c=15+6-4=17$

답 ③

5. $E(X)=100p,\ \sigma(X)=\sqrt{100p(1-p)}$이므로

$100p=\sqrt{100p(1-p)}$

양변을 제곱하면

$100^2p^2=100p(1-p)$

따라서 $100p=1-p$이므로

$p=\frac{1}{101}$

답 ④

6. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BC}|^2$

$=2+3^2=11$

답 ④

7. i) $x(x-2)(x+10)\le(x+10)^2$에서

$(x+10)\{x(x-2)-(x+10)\}\le0$

$(x+10)(x^2-3x-10)\le0$

$(x+10)(x+2)(x-5)\le0$

$\therefore x\le-10$ 또는 $-2\le x\le5$ ⋯ ㉠

ii) $\frac{x-1}{x+1}\ge\frac{x-5}{x-2}$에서

$\frac{x+1-2}{x+1}\ge\frac{x-2-3}{x-2},\ \frac{-2}{x+1}\ge\frac{-3}{x-2}$

$\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x-2}\le0,\ \frac{-x-7}{(x+1)(x-2)}\le0$

$\frac{x+7}{(x+1)(x-2)}\ge0$

$(x+1)(x-2)(x+7)\ge0,\ x\ne-1,\ x\ne2$

$\therefore -7\le x<-1$ 또는 $x>2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-2\le x<-1,\ 2<x\le5$

따라서 정수인 x는 -2, 3, 4, 5의 4개이다.

답 ①

8. 물의 검수량이 100(mL), 희석에 필요한 물의 양이 300(mL), 취기도 p일 때

$p=k\log\left(1+\frac{300}{100}\right)=2k\log2$ ⋯ ㉠

물의 검수량이 100(mL), 취기도 $3p$일 때, 희석에 필요한 물의 양을 x(mL)라 하면

$3p=k\log\left(1+\frac{x}{100}\right)$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$3=\frac{k\log\left(1+\frac{x}{100}\right)}{2k\log2}=\frac{\log\left(1+\frac{x}{100}\right)}{2\log2}$

$6\log2=\log2^6=\log\left(1+\frac{x}{100}\right)$

$\therefore 64=1+\frac{x}{100},\ x=6300$

답 ⑤

9. $n=25,\ \bar{x}=25.5,\ \sigma\fallingdotseq s=5$이므로 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[25.5-1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}},\ 25.5+1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}\right]$

$\therefore [23.54,\ 27.46]$

따라서 이 신뢰구간에 속하는 정수는 24, 25, 26, 27로 개수는 4이다.

답 ④

10. ㄱ. $p(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$\lim_{x\to1-0}p(x)=0\cdot1=0$

$\lim_{x\to1+0}p(x)=0\cdot(-1)=0,\ p(1)=0\cdot1=0$

이므로 $p(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $q(x)=f(x)+g(x)$라 하면

$\lim_{x\to1-0}q(x)=1+0=1$

$\lim_{x\to1+0}q(x)=(-1)+2=1,\ g(1)=1+0=1$

이므로 $q(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $r(x)=f(x)g(x)$라 하면

$\lim_{x\to1-0}r(x)=1\cdot0=0$

$\lim_{x\to1+0}r(x)=(-1)\cdot2=-2$

$\lim_{x\to1}r(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $r(x)$는 $x=1$에서 연속이 아니다.

답 ③

11. ㄱ. $X\in A$이면 $XP=PX$이므로

$X^2P=(XX)P=X(XP)=X(PX)$

$=(XP)X=(PX)X=P(XX)$

$=PX^2$

$\therefore X^2\in A$ (참)

ㄴ. $X\in A,\ Y\in A$이면

$XP=PX,\ YP=PY$

두 등식을 변끼리 더하면

$XP+YP=PX+PY$

$\therefore (X+Y)P=P(X+Y)$

$\therefore X+Y\in A$ (참)

ㄷ. 임의의 실수 x, y, z, w에 대하여

$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\in A$라 하면

$XP=PX$이므로

$\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2y&x\\2w&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z&w\\2x&2y\end{pmatrix}$

$\therefore 2y=z,\ x=w$

$\therefore X=\begin{pmatrix}x&y\\2y&x\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&y\\2y&0\end{pmatrix}$

$=xE+yP$

따라서 $X=aE+bP$를 만족시키는 실수 a, b가 존재한다. (참)

답 ⑤

12. $h=f\circ g^{-1}$라 하면 $h^{-1}=(f\circ g^{-1})^{-1}=g\circ f^{-1}$이므로 일차변환 h를 나타내는 행렬을 H라 하면 조건에 의해

$H\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\ H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠

$H^{-1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ H\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$H\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-1\end{pmatrix}$

이므로

$H=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-1\end{pmatrix}$

이때, $H\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$이므로

일차변환 $f\circ g^{-1}$에 의하여 점 (2, 3)이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-7, 1)$이다.

답 ①

13. $\angle POP'=2\theta,\ \angle QOP'=\theta$이므로

$\overline{OP'}=\cos2\theta=\frac{1}{3}$

$\overline{RQ}=\overline{OQ}-\overline{OR}=1-\overline{OR}$

$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OR}}=\cos\theta$이므로 $\overline{OR}=\frac{1}{3\cos\theta}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{2}{3},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

$\overline{OR}=\frac{\sqrt{6}}{6}$이므로

$\overline{RQ}=1-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

답 ③

14. 포물선 $y^2=8x$의 초점은 F(2, 0)이므로 점 A의 좌표는 (2, 4)이다.

$\therefore \overline{AF}=4$

점 B의 좌표는 (2+4, 0) 즉, (6, 0)이다.

이때, 두 점 F, B는 타원의 초점이고 점 O는 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의해

$\overline{PF}+\overline{PB}=\overline{OF}+\overline{OB}=2+6=8$

$\therefore \overline{PB}=8-\overline{PF}=8-\overline{AF}=8-4=4$

답 ②

15. $1 \le \log_{n+1} x < 2$

$n+1 \le x < (n+1)^2$

$n+1 \le x < n^2+2n+1$이므로

자연수 x는 $n+1,\ n+2,\ \cdots,\ n^2+2n$이다.

$a_n = \frac{\{n^2+2n+1-(n+1)\}\{(n+1)+(n^2+2n)\}}{2}$

$= \frac{(n^2+n)(n^2+3n+1)}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^4} = \frac{(n^2+n)(n^2+3n+1)}{2n^4} = \frac{1}{2}$

답 ⑤

16. $Y(30)$은 등식 $a_1+2a_2=30-3a_3$을 만족시키는 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$의 개수이므로,

$a_3=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$에 대하여

$Y(30)=\sum_{a_3=0}^{10} X(30-3a_3)=\sum_{k=0}^{10} X(3k)$

같은 방법으로

$Y(31)=\sum_{k=0}^{10} X(3k+1)$

$Y(32)=\sum_{k=0}^{10} X(3k+2)$

이므로

$Y(30)+Y(31)+Y(32)$

$=\sum_{k=0}^{10} X(3k)+\sum_{k=0}^{10} X(3k+1)+\sum_{k=0}^{10} X(3k+2)$

$=\sum_{i=0}^{32} X(i)$

$=\sum_{k=0}^{\boxed{16}} X(2k)+\sum_{k=1}^{\boxed{16}} X(2k-1)$

그런데 $a_1+2a_2=n$에서

$n=2k$일 때, a_2는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k$로 개수는 $k+1$

$\therefore X(2k)=\boxed{k+1}$

$n=2k-1$일 때, a_2는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$로 개수는 k

$\therefore X(2k-1)=\boxed{k}$

따라서

$\sum_{i=0}^{32} X(i)=\sum_{k=0}^{16}(k+1)+\sum_{k=1}^{16} k$

$=\frac{17\cdot18}{2}+\frac{16\cdot17}{2}$

$=\boxed{289}$

따라서 $Y(30)+Y(31)+Y(32)=289$

$a=16,\ f(k)=k+1,\ g(k)=k,\ b=289$

이므로

$a+b+f(10)+g(10)=16+289+11+10$

$=326$

답 ①

17. $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{a},\ \overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

한편, $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$이다.

$\therefore k=-2$

답 ③

18. 집합 $A=\left\{a \mid a\in N\text{이고 } \frac{500}{a}\in N\right\}$는 $500=2^2\cdot5^3$의 양의 약수의 집합이므로 집합 A의 원소의 개수는 $(2+1)(3+1)=12$

$500=2^2\cdot5^3$의 12개의 양의 약수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{12}$ 중 어느 두 수의 곱은 500이다.

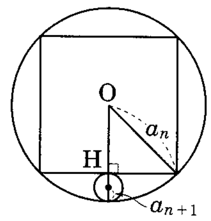
$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{12}$

$=\log_2(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{12})=\log_2(2^2\cdot5^3)^6$

$=\log_2(2^{12}\cdot5^{18})=12+18\log_2 5$

답 ②

19. [그림 n]에 그려진 원의 반지름의 길이를 a_n이라 하자.



위 그림과 같이 [그림 n]에 그려진 원의 중심을 O라 할 때 중심 O에서 원에 내접한 정사각형의 한 변에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OH}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$

$a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n+2a_{n+1},\ \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)a_n=2a_{n+1}$

$\therefore a_{n+1}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)a_n$

따라서 $(n+1)$번째 그려진 원의 넓이는 n번째 그려진 원의 넓이의 $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2$이다.

한편, 원의 개수는 4배씩 증가하므로 모든 원의 넓이의 합은 공비가

$4\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

인 무한등비급수가 된다.

$S_1=\pi\cdot1^2=\pi$이므로

$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\pi}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\pi}{2\sqrt{2}-1}$

$=\frac{2(2\sqrt{2}+1)\pi}{7}$

답 ④

20. $F(x)=\int_0^x \frac{|f(t)|+f(t)}{2}dt$에서

$F'(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}$

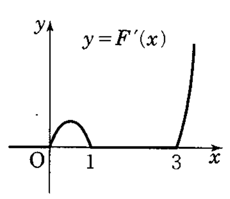
$=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}$

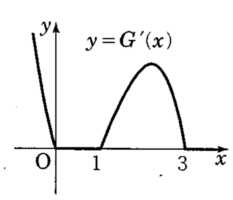
$G(x)=\int_0^x \frac{|f(t)|-f(t)}{2}dt$에서

$G'(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$

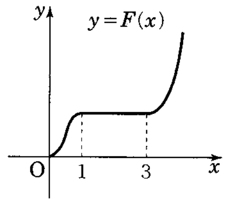
$=\begin{cases} 0 & (f(x)\ge0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$

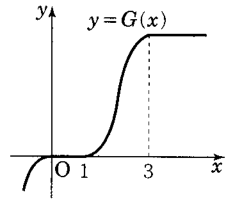
$y=F'(x)$와 $y=G'(x)$의 그래프는 다음과 같다.





$F(0)=0,\ G(0)=0$이므로 $y=F(x)$와 $y=G(x)$의 그래프는 다음과 같다.





ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $F'(x),\ G'(x)$의 값이 존재하므로 $F(x),\ G(x)$는 모두 미분가능하다. (참)

ㄴ. $F(1)=F(3)$ (거짓)

ㄷ. $F(x)-G(x)=\int_0^x f(t)dt$이고

$F(3)-G(3)=\int_0^3 f(t)dt<0$이므로

$F(3)<G(3)$ (참)

답 ④

21. 점 $P(t,\ t^2)$에서의 접선의 방정식은

$y=2tx-t^2\ \cdots$ ㉠

㉠과 곡선 $y=-x^2+1$의 교점 Q의 x좌표는

$2tx-t^2=-x^2+1,\ x^2+2tx-t^2-1=0$

$x>0$이므로 $x=-t+\sqrt{2t^2+1}$

㉠과 곡선 $y=-x^2$의 교점 R의 x좌표는

$2tx-t^2=-x^2,\ x^2+2tx-t^2=0$

$x>0$이므로 $x=-t+\sqrt{2t^2}$

두 교점 Q, R의 x좌표의 차를 d라 하면

$d=(-t+\sqrt{2t^2+1})-(-t+\sqrt{2t^2})$

$=\sqrt{2t^2+1}-\sqrt{2t^2}$

두 교점 Q, R의 y좌표의 차는 $2td$이므로

$L(t)=\sqrt{1+(2t)^2}d$

$=\sqrt{1+(2t)^2}(\sqrt{2t^2+1}-\sqrt{2t^2})$

$=\sqrt{1+4t^2}\frac{(2t^2+1)-2t^2}{\sqrt{2t^2+1}+\sqrt{2t^2}}$

$=\frac{\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}}{\sqrt{2+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{2}}$

$\therefore \lim_{t\to\infty} L(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ①

22. 단답형 $f'(x)=\frac{20(2x+6)}{x^2+6x+3}$이므로

$f'(1)=\frac{20(2+6)}{1^2+6+3}=20\times\frac{8}{10}=16$

답 16

23. 단답형 이 관광열차가 운행한 전체시간은

$\frac{2}{6}+\frac{13}{a}+\frac{15}{a-4}=3$

$\therefore \frac{13}{a}+\frac{15}{a-4}=\frac{8}{3}$

양변에 $3a(a-4)$를 곱하면

$39(a-4)+45a=8a(a-4)$

$\therefore 2a^2-29a+39=(a-13)(2a-3)=0$

$\therefore a=13\ (\because a>4)$

답 13

24. 단답형 앞면이 나온 동전의 개수가 1인 사건을 A, 주사위의 눈의 수가 1인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

$P(A)=\frac{1}{3}\times{}_3C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{2}{3}\times{}_2C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\times{}_2C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{11}{24}}=\frac{2}{11}$

$\therefore p+q=11+2=13$

답 13

25. 단답형 $\int 5x(x^2+1)^9dx$

$=\frac{5}{2}\int 2x(x^2+1)^9dx$

$=\frac{5}{2}\int(x^2+1)^9(x^2+1)'dx$

$=\frac{5}{2}\times\frac{1}{10}(x^2+1)^{10}+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $(x^2+1)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_5=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=4\times7\times9$

따라서 $\int 5x(x^2+1)^9dx$의 전개식에서 x^{10}의 계수는

$\frac{5}{2}\times\frac{1}{10}\times4\times7\times9=63$

답 63

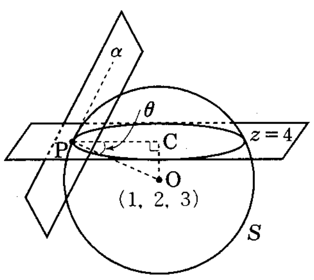
26. 단답형 구 S는

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

평면 $z=4$와 구 S가 만나서 생기는 도형 C는

C : $(x-1)^2+(y-2)^2=8,\ z=4$

도형 C는 중심이 $(1,\ 2,\ 4)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이다.



위 그림과 같이 구 S의 중심을 $\mathrm{O}(1,\ 2,\ 3)$, 도형 C의 중심을 $\mathrm{C}(1,\ 2,\ 4)$라 하자.

도형 C 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OP}}=3$이다. $\angle\mathrm{CPO}=\theta$라 하면 평면 α와 직선 $\overline{\mathrm{OP}}$는 수직이므로 평면 α와 평면 $z=4$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다. 따라서 도형 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$(2\sqrt{2})^2\pi\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=8\pi\times\sin\theta$

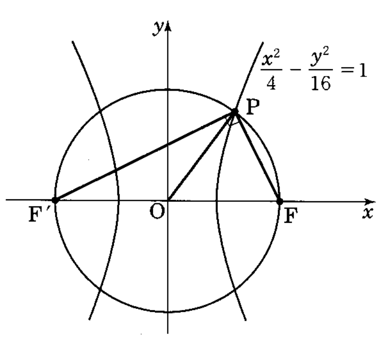
$=8\pi\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\pi$

$\therefore\ p=3,\ q=8$

$\therefore\ 10p+q=38$

답 38

27. 단답형



$2\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}$

따라서 점 P는 중심이 O이고 $\overline{\mathrm{F'F}}$를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\therefore\ \angle\mathrm{FPF'}=\frac{\pi}{2}$

$\overline{\mathrm{F'P}}=a,\ \overline{\mathrm{FP}}=b$라 하면 쌍곡선의 정의에 의해

$a-b=4$ … ㉠

$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{F'F}}=4\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{FPF'}$에서 $a^2+b^2=(4\sqrt{5})^2$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(b+4)^2+b^2=80,\ b^2+4b-32=0$

$(b-4)(b+8)=0$

$\therefore\ b=4,\ a=8$

$\triangle\mathrm{FPF'}$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'P}}\times\overline{\mathrm{FP}}$

$=\frac{1}{2}\times4\times8=16$

답 16

28. 단답형 $a_{m+n}=a_m+a_n$에서 $m=1$을 대입하면

$a_{n+1}=a_1+a_n=a_n+3$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n=3+3(n-1)=3n$

$b_{m+n}=b_mb_n$에서 $m=1$을 대입하면

$b_{n+1}=b_1b_n=16b_n$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 공비가 16인 등비수열이다.

$\therefore\ b_n=16\cdot16^{n-1}=16^n$

따라서

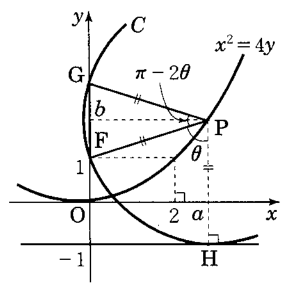
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log_2 b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\log_2 16^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4n}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ p^2+q^2=16+9=25$

답 25

29. 단답형



$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=b+1$

$\angle\mathrm{FPH}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\sin\theta=\frac{a}{b+1}$

$S(a)=\frac{1}{2}(b+1)^2\theta$

$T(a)=\frac{1}{2}(b+1)^2\sin(\pi-2\theta)$

$\therefore\ \frac{T(a)}{S(a)}=\frac{\sin2\theta}{\theta}$

$a^2=4b$이고 $a\to\infty$일 때

$\sin\theta=\frac{a}{b+1}=\frac{4a}{a^2+4}\to0,\ \theta\to0$

따라서 $\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin2\theta}{\theta}=2$

답 2

30. 단답형 집합 A의 원소의 개수는 곡선 $y=xe^x$과 직선 $y=m(x+2)-\frac{2}{e^2}$의 교점의 개수와 같다. $y=xe^x$에서

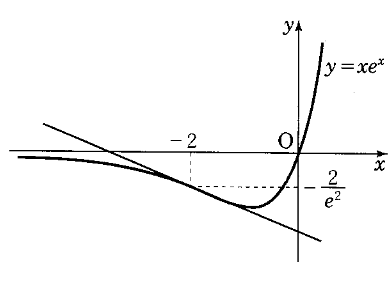
$y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$y''=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$y'=0$에서 $x=-1$, $y''=0$에서 $x=-2$

$\lim_{x\to\infty}xe^x=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

따라서 $y=xe^x$의 그래프는 그림과 같다.



한편, 직선 $y=m(x+2)-\frac{2}{e^2}$는 곡선의 변곡점 $\left(-2,\ -\frac{2}{e^2}\right)$를 지나는 직선이고, 이 점에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{e^2}$이다.

따라서 $-\frac{1}{e^2}<m<0$이면 곡선과 직선은 서로 다른 세 점에서 만난다.

$\therefore\ a=2,\ b=0$

$\therefore\ a^2+b^2=4$

답 4

수리 영역(나형)

1. ☞ 가형 풀이 **1**번을 보시오.

2. $\lim_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9}$

$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)}$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to5}(\sqrt{2x-1}+3)$

$=\frac{1}{2}\cdot6=3$

답 ③

3. $8^\alpha=27$에서 $27^{\frac{1}{\alpha}}=8$이므로 $3^{\frac{3}{\alpha}}=8$

$24^\beta=9$에서 $9^{\frac{1}{\beta}}=24$이므로 $3^{\frac{2}{\beta}}=24$

따라서 $3^{\frac{3}{\alpha}-\frac{2}{\beta}}=\frac{3^{\frac{3}{\alpha}}}{3^{\frac{2}{\beta}}}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}=3^{-1}$이므로

$\frac{3}{\alpha}-\frac{2}{\beta}=-1$

답 ②

4. $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로

$\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}$

이때 A와 B^C은 서로 독립이므로

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B^C)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$

답 ①

5. $\lim_{x\to1}f(x)=1$

$\lim_{x\to-2-0}(x+2)f(x)=0\cdot(-1)=0$이고

$\lim_{x\to-2+0}(x+2)f(x)=0\cdot1=0$이므로

$\lim_{x\to-2}(x+2)f(x)=0$

$\therefore\ \lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to-2}(x+2)f(x)$

$=1+0=1$

답 ④

6. 확률의 합은 1이므로

$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+a=1\quad\therefore\ a=\frac{2}{5}$

이때, $E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=2$

$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}-2^2$

$=\frac{4}{5}$

$\therefore\ V(5X+1)=25V(X)=25\times\frac{4}{5}=20$

답 ④

7. 두 곡선 $y=-8x^2+4$, $y=x^2$의 교점의 x좌표를 구하면 $-8x^2+4=x^2$에서 $x=\pm\frac{2}{3}$이다.

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\{(-8x^2+4)-x^2\}dx$

$=2\int_0^{\frac{2}{3}}(-9x^2+4)dx$

$=2\Big[-3x^3+4x\Big]_0^{\frac{2}{3}}$

$=2\Big[-3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{2}{3}\Big]$

$=\frac{32}{9}$

답 ②

8. ☞ 가형 풀이 **8**번을 보시오.

9. $a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n(n+1)}$에서 $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{n(n+1)}$

$\therefore\ a_8-a_6=(a_8-a_7)+(a_7-a_6)$

$=\frac{2}{7\cdot 8}+\frac{2}{6\cdot 7}=\frac{1}{12}$

답 ②

10. $f(x)-k=0$의 세 실근이 $x=-1,\ 1,\ 4$이므로

$f(x)-k=(x+1)(x-1)(x-4)$에서

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-4)+k$

위 식을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-4)+(x+1)(x-4)$
$+(x+1)(x-1)$

$\therefore\ f'(3)=(-2)+(-4)+8=2$

답 ①

11. ☞ 가형 풀이 **11**번을 보시오.

12. $A^2-2A-E=O$에서

$A(A-2E)=(A-2E)A=E$이므로

$A^{-1}=A-2E$이다.

또, $A^2=2A+E$이므로

$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2=(A-2E)^2$

$=A^2-4A+4E$

$=(2A+E)-4A+4E$

$=-2A+5E$

행렬 A의 모든 성분의 합은 -5이므로 행렬 $(A^2)^{-1}$의 모든 성분의 합은 20이다.

답 ⑤

13. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}$에서 $f(2)=3$, $f'(2)=3$

$\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}f(2+kh)-3n}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\{f(2+kh)-3\}}{2h}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(2+kh)-f(2)}{2h}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(2+kh)-f(2)}{kh}\cdot k\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}f'(2)\cdot k=\frac{3n(n+1)}{4}=180$

$n(n+1)=240$에서 $n=15$

답 ③

14. 제품 한 개의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(120,\ 8^2)$을 따른다.

제품 16개를 포장하여 한 세트로 만드는 것은 크기가 16인 표본을 추출하는 것이므로 그 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(120,\ 2^2)$을 따른다.

16개씩 한 세트의 무게가 1856g 이하이거나 1984g 이상인 것을 불량품으로 판정하므로 불량품으로 판정할 확률은

$P(16\overline{Y}\le 1856)+P(16\overline{Y}\ge 1984)$

$P(\overline{Y}\le 116)+P(\overline{Y}\ge 124)$

$=P\left(Z\le\frac{116-120}{2}\right)+P\left(Z\ge\frac{124-120}{2}\right)$

$=P(Z\le -2)+P(Z\ge 2)$

$=2P(Z\ge 2)$

$=2\{0.5-P(0\le Z\le 2)\}$

$=0.046$

따라서 500개의 포장세트 중 불량품으로 판정되는 세트의 개수 X는 이항분포 $B(500,\ 0.046)$을 따른다.

$\therefore\ E(X)=500\times 0.046=23$

답 ⑤

15~16. ☞ 가형 풀이 **15~16**번을 보시오.

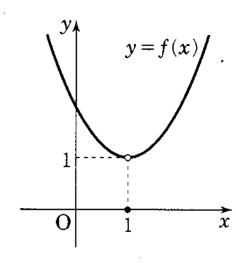
17. $x=1$일 때, $f(1)=0$

$x\ne 1$일 때, $0<\frac{1}{x^2-2x+2}<1$이므로

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2-2x+1}{(x^2-2x+2)^{n-1}}$

$=\frac{x^2-2x+1}{1-\frac{1}{x^2-2x+2}}=x^2-2x+2$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & (x\ne 1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$ ⋯ ㉠



ㄱ. ㉠에서 $f(3)=3^2-2\cdot 3+2=5$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1}f(x)=1$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0}(x^2-1)f(x)=0\cdot 1=0$

$\lim_{x\to 1-0}(x^2-1)f(x)=0\cdot 1=0$

$(1^2-1)f(1)=0\cdot 0=0$

이므로 $\lim_{x\to 1}(x^2-1)f(x)=(1^2-1)f(1)=0$

따라서 함수 $(x^2-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(참)

답 ③

18~19. ☞ 가형 풀이 **18~19**번을 보시오.

20. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=3$, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\cdot 2=2n+1$

그러므로 점 $A_n(0,\ 2n+1)$이고

$3^x=2n+1$, $x=\log_3(2n+1)$이므로

$B_n(\log_3(2n+1),\ 2n+1)$

$B_{n+1}(\log_3(2n+3),\ 2n+3)$

$C_n(\log_3(2n+1),\ 2n+3)$

따라서 삼각형 $B_nB_{n+1}C_n$의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}\cdot\overline{B_{n+1}C_n}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\{\log_3(2n+3)-\log_3(2n+1)\}$

$=\log_3\frac{2n+3}{2n+1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{39}S_n=\sum_{n=1}^{39}\log_3\frac{2n+3}{2n+1}$

$=\log_3\frac{5}{3}+\log_3\frac{7}{5}+\cdots+\log_3\frac{81}{79}$

$=\log_3\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{81}{79}\right)$

$=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

답 ①

21. $2x-1=a$일 때, $x=\frac{a+1}{2}$이므로 주어진 식에 $x=\frac{a+1}{2}$을 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-2\times\frac{a+1}{2}=0$

정리하면 $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

$2x-1=10$일 때, $x=\frac{11}{2}$이므로 주어진 식에 $x=\frac{11}{2}$을 대입하면

$\int_3^{10}f(t)dt=\left(\frac{11}{2}\right)^2-2\times\frac{11}{2}=\frac{77}{4}$ ⋯ ㉠

$2x-1=0$일 때, $x=\frac{1}{2}$이므로 주어진 식에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\int_3^0 f(t)dt=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$ ⋯ ㉡

㉠−㉡하면

$\int_3^{10}f(t)dt-\int_3^0 f(t)dt$

$=\int_3^{10}f(t)dt+\int_0^3 f(t)dt$

$=\int_0^{10}f(t)dt=20$

$\therefore\ a+\int_0^{10}f(x)dx=23$

답 ④

22. **단답형** 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r라 하면

$a_3=12$에서 $a_1\cdot r^2=12$ ⋯ ㉠

$a_6=96$에서 $a_1\cdot r^5=96$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$

공비 r는 실수이므로 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a_1=3$

$\therefore\ a_n=3\cdot 2^{n-1}\ (n\ge 1)$

$a_p\cdot a_q=288$에서 $(3\cdot 2^{p-1})\cdot(3\cdot 2^{q-1})=288$

$9\cdot 2^{p+q-2}=288$, $2^{p+q-2}=32=2^5$

$p+q-2=5$

$\therefore\ p+q=7$

답 7

23. **단답형** $\frac{8}{2n+1} < na_n < \frac{12}{3n-1}$

$$\frac{8}{2n^2+n} < a_n < \frac{12}{3n^2-n}$$

$$\frac{32n^2+16}{2n^2+n} < (4n^2+2)a_n < \frac{48n^2+24}{3n^2-n}$$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{32n^2+16}{2n^2+n}=16,\ \lim_{n\to\infty}\frac{48n^2+24}{3n^2-n}=16$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}(4n^2+2)a_n=16$$

답 16

24. **단답형** 행렬의 각 성분이 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 향하는 대각선에 대하여 대칭이므로 a는 주어진 행렬의 (1, 3) 성분인 1과 같고, b는 주어진 행렬의 (5, 4) 성분인 1과 같다.

또, 주어진 행렬의 행과 열의 수가 각각 5이므로 이 그래프의 꼭짓점의 개수는 5, 주어진 행렬의 모든 성분의 합이 16이므로 그래프 G의 변의 개수는 8이다.

$\therefore a+b+m+n=1+1+5+8=15$

답 15

25. **단답형** $y=f(x)\,(0\le x\le 3)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 3\times k=1 \quad \therefore k=\frac{2}{3}$

따라서 확률밀도함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x & (0\le x<1)\\ -\frac{1}{3}x+1 & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^3 xf(x)dx\\ &=\int_0^1 x\cdot\frac{2}{3}x\,dx+\int_1^3 x\left(-\frac{1}{3}x+1\right)dx\\ &=\left[\frac{2}{9}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^3\\ &=\frac{2}{9}+\left(-3+\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E(6X+2)&=6E(X)+2\\ &=6\times\frac{4}{3}+2=10\end{aligned}$$

답 10

26. **단답형** $(ax-1)^8$의 전개식에서 일반항은

$${}_8C_r(ax)^{8-r}(-1)^r={}_8C_r(-1)^r a^{8-r}x^{8-r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$$

$r=5$일 때, x^3의 계수는 -448이므로

${}_8C_5(-1)^5a^3=-448,\ -56a^3=-448$

$a^3=8 \quad \therefore a=2$

따라서 $r=6$일 때, x^2의 계수는

${}_8C_6(-1)^6a^2={}_8C_2\times 2^2=28\times 4=112$

답 112

27. **단답형** 대상자 중에서 임의로 뽑은 한 사람이 3G를 사용하던 사람인 사건을 A, 2012년에 4G를 구입한 사람일 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(B)&=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)\\ &=\frac{6}{25}+\frac{8}{25}=\frac{14}{25}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{14}{25}}=\frac{3}{7}$$

$\therefore p+q=7+3=10$

답 10

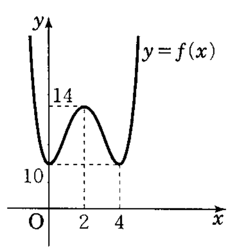
28. **단답형** ☞ 가형 풀이 **28**번을 보시오.

29. **단답형** $f'(x)=x^3-6x^2+8x$
$$=x(x-2)(x-4)=0$$

에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

$f(0)=10,\ f(2)=14,\ f(4)=10$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



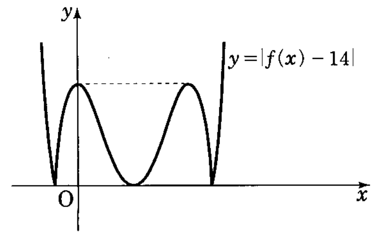
따라서 함수 $y=|f(x)-k|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않을 때, 서로 다른 실수 a의 개수는 다음과 같다.

i) $k\le 10$일 때, 0개

ii) $10<k<14$일 때, 4개

iii) $k\ge 14$일 때, 2개

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 14이다.



답 14

30. **단답형** ㈎에서 $1+a+b=9 \quad \therefore a+b=8$

㈏에서 $f(x)=x(x^2+ax+b)$의 그래프가 조건을 만족시키려면 $x^2+ax+b=0 \cdots$ ㉠이 $x=0$을 근으로 갖거나 허근 또는 $x=0$이 아닌 중근을 가질 때이다.

i) ㉠이 $x=0$을 근으로 가지면 $a=8,\ b=0$

ii) ㉠이 허근 또는 $x=0$이 아닌 중근을 가지면

$D=a^2-4b\le 0$

$$\begin{aligned}a^2-4(8-a)&=a^2+4a-32\\ &=(a+8)(a-4)\le 0\end{aligned}$$

$\therefore -8\le a\le 4$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$-8\le a\le 4,\ a=8$

한편,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\\ &=\frac{1}{12}(3+4a+6b)\\ &=\frac{1}{12}(51-2a)\end{aligned}$$

이므로

$a=-8$일 때, 최댓값 $M=\frac{1}{12}(51+16)=\frac{67}{12}$

$a=8$일 때, 최솟값 $m=\frac{1}{12}(51-16)=\frac{35}{12}$

$\therefore M+m=\frac{102}{12}=\frac{17}{2}$

$\therefore 10(M+m)=10\times\frac{17}{2}=85$

답 85