[2013 수능대비 오답노트 08차]

연속확률변수 : 밑넓이1, 평균계산, 분산계산 방법
그래프행렬 : 작년미출제, 어렵게 참거짓판별, 최소비용거리
적분 시그마 : 기본0~1, p칸, a+p칸 변형 차이 이해하기
적분 시그마 : 최고 어려운 멱급수처럼 펼쳐서 알아보기

[2012.10 교육청]

11. 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<0) \\ a(x-1)^2+b & (x\ge 0) \end{cases}$$

에 대하여 $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

11. **[출제의도] 미분가능성을 이해한다.**

함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(0)=a+b=1$ ⋯ ㉠

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$$f'(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

그런데 $\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$,

$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=2a(0-1)=-2a$이므로

$-1=-2a$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 $b=\frac{1}{2}$ ∴ $f(1)=b=\frac{1}{2}$이다.

14. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n + 1$$

을 만족시킬 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> $n \geq 1$일 때,
>
> $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ ······ ㉠
>
> $a_{n+2} = 2a_{n+1} + \boxed{(가)}$ ······ ㉡
>
> 이고, ㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터
>
> $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$
>
> 을 얻는다. $b_n = a_{n+1} - a_n$이라 하면
>
> $b_{n+1} = 2b_n + 1$
>
> 이므로
>
> $b_n = 2^{n+1} - 1$
>
> $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1} - 1)\ (n \geq 2)$
>
> $= 2^{n+1} + \boxed{(나)}$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(5) - g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

14. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 일반항을 구하는 과정을 설명한다.

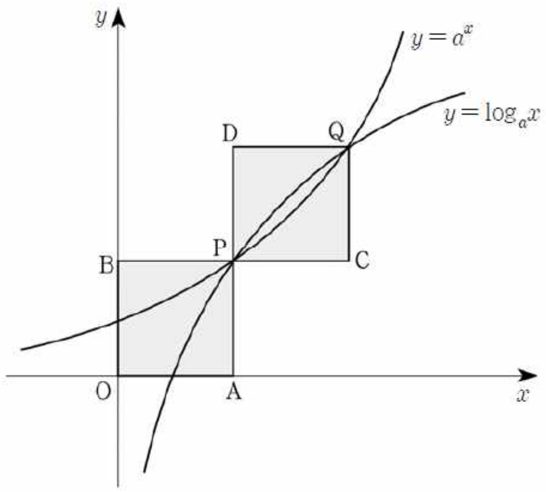
$a_{n+1} = 2a_n + n + 1$에서 n에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + n + 1 + 1$이므로 $f(n) = n + 2$

$a_n = 1 + \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n-1) = 2^{n+1} - n - 2$이므로

$g(n) = -n - 2$ $\therefore$ $f(5) - g(5) = 7 - (-7) = 14$

16. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.
점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 OAPB와 PCQD는 합동이다. a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

16. **[출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.**
두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $P(k,\ k)$, $Q(2k,\ 2k)$이다.
따라서 $a^k=k$, $a^{2k}=2k$이므로 $2k=a^{2k}=(a^k)^2=k^2$에서 $k=2$이다. $a^2=2$ $\therefore$ $a=\sqrt{2}$

17. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2B+AB^2=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)^{-1}$이 존재한다.

ㄴ. $A+B=E$이면 $A^3=E$이다.

ㄷ. $A^2B=BA^2$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

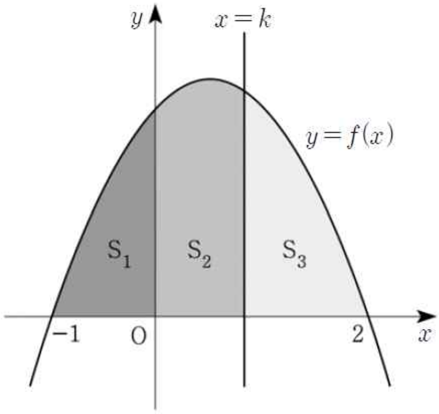
17. **[출제의도] 행렬의 성질을 추론한다.**

ㄱ. $A^2B+AB^2=A(A+B)B=E$에서 $B^{-1}=A(A+B)$
이므로 $BA(A+B)=E$
따라서 $(A+B)^{-1}=BA$로 존재한다. (참)

ㄴ. $A+B=E$이므로 $A(A+B)B=E$에서 $AB=E$
$A(E-A)=E$, $A^2=A-E$
$A^3=AA^2=A(A-E)=A^2-A=-E$ (거짓)

ㄷ. $BA(A+B)=E$에서 $BA^2+BAB=E$이므로
$BA^2+BAB=A^2B+AB^2$, $BAB=AB^2$
양변의 오른쪽에 B^{-1}을 곱하면 $AB=BA$ (참)

19. 함수 $f(x) = -x^2 + x + 2$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 y축과 직선 $x = k$ $(0 < k < 2)$로 나눈 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, S_2의 값은? [4점]



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

19. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 추론한다.

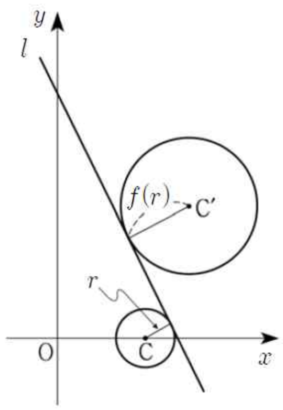
S_1, S_2, S_3이 등차수열을 이루므로 $2S_2 = S_1 + S_3$이다.

$$3S_2 = S_1 + S_2 + S_3 = \int_{-1}^{2} f(x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{9}{2} \qquad \therefore\ S_2 = \frac{3}{2}$$

20. 그림과 같이 중심이 C$(2, 0)$이고 반지름의 길이가 r $(r<\sqrt{5})$인 원 C가 있다. 기울기가 -2이고 원 C에 접하는 직선을 l이라 하자. 직선 l에 접하고 중심이 C$'(3, 3)$인 원 C$'$의 반지름을 $f(r)$라 할 때, $\lim_{r\to+0} f(r)$의 값은? [4점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

20. **[출제의도] 도형에서 함수의 극한을 이해한다.**

기울기가 -2인 직선 l의 y절편을 b라 하면

직선 l의 방정식은 $2x+y-b=0$

점 C$(2, 0)$에서 직선 l : $2x+y-b=0$에 이르는 거리

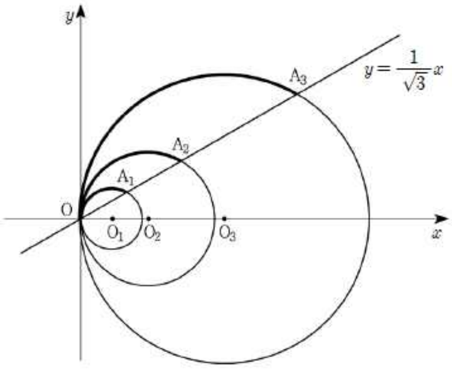
$r=\frac{|2\cdot2-b|}{\sqrt{5}}=\frac{|4-b|}{\sqrt{5}}$에서 $b=4\pm\sqrt{5}r$ … ㉠

점 C$'(3,3)$에서 직선 l : $2x+y-b=0$에 이르는 거리

$f(r)=\frac{|9-b|}{\sqrt{5}}$에 ㉠을 대입하여 극한을 취하면

$$\lim_{r\to+0} f(r)=\lim_{r\to+0}\frac{|5\pm\sqrt{5}r|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

21. 그림과 같이 중심이 $(1, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 있다. 원 O_1이 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_1이라 하고 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_1의 길이를 l_1이라 하자.
중심이 $(l_1, 0)$이고 반지름의 길이가 l_1인 원 O_2를 그린다. 원 O_2가 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_2라 하고 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_2의 길이를 l_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{\pi-3}$　② $\frac{2}{\pi-3}$　③ $\frac{1}{2\pi-3}$
④ $\frac{2}{2\pi-3}$　⑤ $\frac{3}{2\pi-3}$

21. [출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 이해한다.

직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 x축이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다. $\triangle OO_1A_1$은 이등변삼각형이므로 $\angle OO_1A_1=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_1=\frac{2}{3}\pi$

$\triangle OO_nA_n$은 이등변삼각형이므로 $\angle OO_nA_n=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_n=\frac{2}{3}\pi\cdot l_{n-1}$ $(n\geq 2)$

수열 $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2\pi}$이고 공비가 $\frac{3}{2\pi}$인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\frac{\frac{3}{2\pi}}{1-\frac{3}{2\pi}}=\frac{3}{2\pi-3}$

25. $\sum_{n=2}^{6}[\log_n 64]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

25. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수열의 합에 관한 문제를 해결한다.

$64=2^6$ 이므로 $[\log_2 64]=6$

$3^3=27<64<3^4=81$ 이므로 $[\log_3 64]=3$

$4^3=64$이므로 $[\log_4 64]=3$

$5^2=25<64<5^3=125$ 이므로 $[\log_5 64]=2$

$6^2=36<64<6^3=216$ 이므로 $[\log_6 64]=2$

그러므로 $\sum_{n=2}^{6}[\log_n 64]=16$

26. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x (t^2+3t-2)\,dt$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. **[출제의도] 정적분의 성질을 이해한다.**

$F(x) = \int_2^x (t^2+3t-2)\,dt$ 라 하면 $F'(x) = x^2+3x-2$

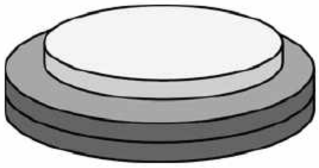
$$(\text{준식}) = \lim_{x \to 2} \frac{F(x)-F(2)}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} \cdot \frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$

$$= \frac{1}{4}F'(2) = \frac{1}{4}(2^2+3 \cdot 2-2) = 2$$

27. 반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개가 있다. 원판을 다음과 같은 규칙으로 쌓으려고 한다.

> (가) 원판 3개를 택하여 원판의 중심이 일치하도록 쌓는다.
> (나) 반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다.
> (다) 반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

그림은 반지름의 길이가 같은 두 개의 원판과 반지름의 길이가 작은 한 개의 원판을 규칙에 따라 쌓은 예이다.



이와 같이 쌓는 방법의 수를 구하시오. [4점]

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 규칙을 추론한다.

쌓는 순서가 정해져 있으므로 세 개의 원판을 택하면 쌓는 방법은 한가지로 정해진다. 그러므로 구하는 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로 ${}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3 = 56$

29. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다. (나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

29. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 극값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $a=0$

따라서 $f'(x)=3x^2+b$이고, 조건 (나)에서 $f'(1)=0$이고 $f(1)=0$이므로 $b=-3$, $c=2$

따라서 $f(x)$의 극댓값 $f(-1)=4$

[2011.10 서울]

10. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $AB=BA$이면 $A^2B=BA^2$이다.

ㄴ. $AB=O$이면 $AB=BA$이다.

ㄷ. $A^2B=E$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10) 정답 ③

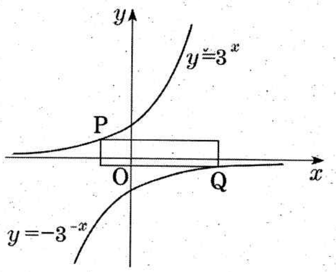
[출제의도] 행렬의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $AB=BA$이면 $A^2B=ABA=BA^2$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. $A(AB)=(AB)A=E$이므로 $AAB=ABA$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면 $AB=BA$ (참)

15. 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점 $P(\alpha,\ 3^\alpha)$과 함수 $y=-3^{-x}$의 그래프 위의 점 $Q(\beta,\ -3^{-\beta})$에 대하여 $\beta-\alpha=4$가 성립한다. 그림과 같이 두 점 P, Q를 지나고 x축, y축과 평행한 직선을 그려 만들어지는 직사각형의 넓이의 최솟값은? [4점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

15) 정답 ⑤

[출제의도] 지수함수에서 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$이고, 세로의 길이는 $3^\alpha-(-3^{-\beta})$이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면

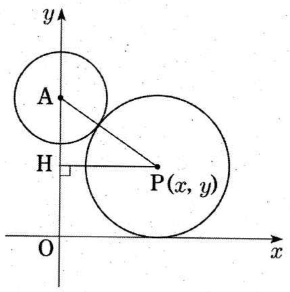
$S=(\beta-\alpha)(3^\alpha+3^{-\beta})=4(3^\alpha+3^{-\alpha-4})$

$\geq 4\times 2\sqrt{3^\alpha\cdot 3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$

(단, 등호는 $\alpha=-2$, $\beta=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

16. 그림과 같이 중심이 $A(0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 x축에 접하는 원의 중심을 $P(x,\ y)$라 하자. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}$의 값은? [4점]



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

16) 정답 ④

[출제의도] 도형에서 함수의 극한값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

중심이 $P(x,\ y)$이므로 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 y이다. 두 원이 외접하므로 $\overline{PA}=y+1$

즉, $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=y+1$이다.

$x^2+(y-3)^2=(y+1)^2$에서 $x^2=8y-8$

이때, $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이므로

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{y+1}=\lim_{y\to\infty}\frac{8y-8}{y+1}=8$$

17. 삼차함수 $f(x)=3x^3+4x^2-2x-1$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)$$

의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{3}$　② $-\frac{1}{6}$　③ 0　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{3}$

17) 정답 ⑤
[출제의도] 무한급수와 정적분의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3x^3+4x^2-2x-1)\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}(4x^2-1)\,dx=\frac{1}{3}$$

18. 다음은 6개의 꼭짓점 A, B, C, D, E, F로 이루어진 그래프를 나타내는 행렬이다.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

이 그래프에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

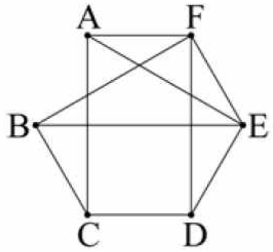
ㄱ. 두 꼭짓점 A와 F를 연결하는 변이 존재한다.

ㄴ. 모든 꼭짓점에는 3개 이상의 변이 연결되어 있다.

ㄷ. 꼭짓점 B에서 출발하여 두 개의 변을 지나 꼭짓점 E로 가는 경로가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18) 정답 ⑤
[출제의도] 그래프의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.
주어진 행렬이 나타내는 그래프는 그림과 같다.



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

19. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P는 점 A(5)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 $3t^2-2$이고, 점 Q는 점 B(k)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 1이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 2번 만나도록 하는 정수 k의 값은? (단, $k \neq 5$) [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

19) 정답 ②

[출제의도] 속도와 거리의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_P, x_Q라 하면

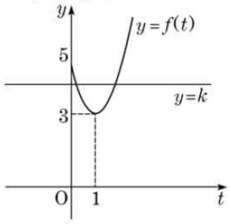
$x_P = 5+\int_0^t (3t^2-2)\,dt = t^3-2t+5$,

$x_Q = k+\int_0^t 1\,dt = t+k$

이때, 두 점 P, Q가 만나려면 $t^3-2t+5=t+k$ 즉, $t^3-3t+5=k$이어야 한다.

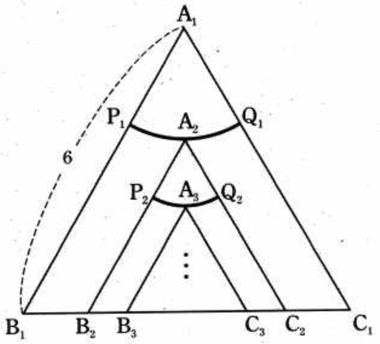
$f(t)=t^3-3t+5$라 하면

$f'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$이므로 $t>0$에서 함수 $f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=k$와 곡선 $y=f(t)$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은 $3<k<5$이므로 정수 k는 4이다.

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 꼭짓점 A_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_1B_1}$인 원이 삼각형 $A_1B_1C_1$과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부에 있는 호 P_1Q_1을 이등분하는 점을 A_2라 하자. 점 A_2를 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_2, C_2가 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다.
꼭짓점 A_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_2B_2}$인 원이 삼각형 $A_2B_2C_2$와 만나는 점을 각각 P_2, Q_2라 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에 있는 호 P_2Q_2를 이등분하는 점을 A_3이라 하자. 점 A_3을 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_3, C_3이 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_3B_3C_3$을 그린다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 P_nQ_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]

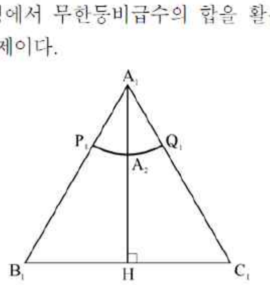


① $\sqrt{3}\pi$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}\pi$

21) 정답 ①

[출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 활용할 수 있는지 묻는 문제이다.



$\overline{A_1P_1} = \overline{A_1A_2} = 2$이므로 $l_1 = \frac{2}{3}\pi$이다.

한편, 꼭짓점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H로 놓으면 $\overline{A_1H} = 3\sqrt{3}$

$\overline{A_2H} = \overline{A_1H} - \overline{A_1A_2} = 3\sqrt{3} - 2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)} = \sqrt{3}\pi$$

26. x에 대한 로그방정식

$$(\log x+\log 2)(\log x+\log 4)=-(\log k)^2$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $10(\alpha^2+\beta^2)$의 값을 구하시오. [4점]

26) 정답 25

[출제의도] 로그방정식을 이용하여 실근의 개수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\log x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+(\log 2+\log 4)X+(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2=0$

주어진 조건을 만족하려면 X에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D는

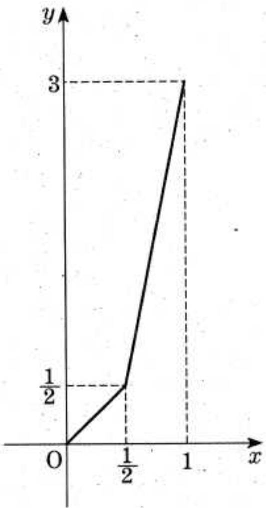
$D=(\log 2+\log 4)^2-4(\log 2)(\log 4)-4(\log k)^2>0$

$-\dfrac{1}{2}\log 2<\log k<\dfrac{1}{2}\log 2$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}<k<\sqrt{2}$

$\therefore\ 10(\alpha^2+\beta^2)=10\left(\dfrac{1}{2}+2\right)=25$

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 1$이고 확률밀도 함수의 그래프는 그림과 같다. 확률변수 X의 평균이 $\mathrm{E}(X) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28) 정답 7

[출제의도] 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (5x^2 - 2x)\,dx = \frac{3}{4}$$

$\therefore\ p+q=7$

30. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=3,\ a_n=8n-4\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

를 만족시키고, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30) 정답 31

[출제의도] 수열의 합을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(8k-4)-1=4n^2-1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

$\therefore\ p+q=31$

[2011.10 대전]

8. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $0<a_n<b_n$이고 수열 $\{b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$, $a_n-b_n=c_n$이라 하면

$b_n=a_n-c_n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} c_n$

$=\alpha-\beta$ (참)

ㄴ. (반례) $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $b_n=2^n$이면

$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$이지만

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} 2^n=\infty$으로 발산한다. (거짓)

ㄷ. (반례) $a_n=(-1)^n+2$, $b_n=4$ 이면,

$0<a_n<b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=4$(수렴) 이지만

a_n은 발산한다. (거짓)

13. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 세 로그함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_4 x$, $h(x)=\log_{16} x$와 만나는 세 점을 각각 A, B, C라 하자. $\overline{AB}=a_n$, $\overline{BC}=b_n$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10}(a_n+2b_n)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}\log_2 10!$ ② $\frac{3}{4}\log_2 10!$ ③ $\log_2 10!$

④ $2\log_2 10!$ ⑤ $\frac{5}{2}\log_2 10!$

$$a_n = \log_2 n - \log_4 n = \frac{1}{2} log_2 n$$

$$b_n = \log_4 n - \log_{16} n = \frac{1}{2} log_4 n = \frac{1}{4} log_2 n$$

$$\therefore\ a_n = 2b_n$$

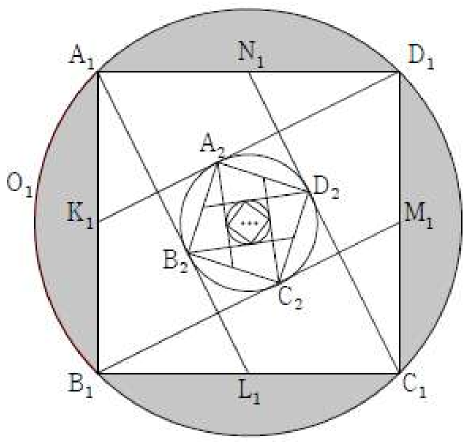
$$\therefore\ \sum_{n=2}^{10}(a_n+2b_n) = 4\sum_{n=2}^{10} b_n = \log_2 2\cdot 3 \cdots\ 10 = \log_2 10!$$

14. 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 있다.

그림과 같이 원 O_1과 원 O_1에 내접하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1B_1의 각각의 중점 L_1, M_1, N_1, K_1에 대하여, 네 개의 선분 A_1L_1, B_1M_1, C_1N_1, D_1K_1의 교점을 꼭짓점으로 하는 사각형에 내접하는 원을 O_2라 하자.

원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

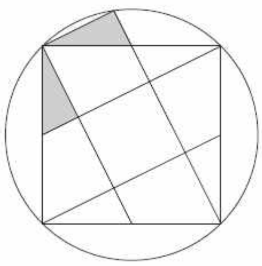


① $\frac{3(\pi-2)}{2}$ ② $\frac{4(\pi-2)}{3}$ ③ $\frac{5(\pi-2)}{4}$

④ $\frac{7(\pi-2)}{6}$ ⑤ $\frac{10(\pi-2)}{9}$

원 O_1에 외접하는 정사각형의 한 변의 길이는 2이다.
원 O_1에 내접하는 정사각형의 넓이는 2이다.

그림에서 두 삼각형의 넓이는 같으므로 원 O_2에 외접하는 정사각형의 넓이는 원 O_1에 내접하는 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{5}$이다. 원 O_2에 외접하는 정사각형의 넓이는 $\frac{2}{5}$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{2}{5}}$이다. 길이의 비는 $\frac{1}{\sqrt{10}}$이므로 공비인 넓이의 비는 $\frac{1}{10}$이다. 따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10\pi-20}{9}$이다.



15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(2+x)=f'(2-x)$이다.
(나) $f(3)=-12$는 함수 $f(x)$의 극솟값이다.

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

15. [출제의도] 도함수를 활용하여 극값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x=3$에서 극소이므로 $f'(3)=0$이다.

또한, $f'(2+x)=f'(2-x)$에서 $x=1$을 대입하면

$f'(3)=f'(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1, 3$에서 극값을 갖는다. 따라서, $f'(x)=3(x-1)(x-3)$이고,

적분하여 (나) 조건으로 적분 상수를 결정하면

$f(x)=x^3-6x^2+9x+12$이다. 따라서, $f(1)=-8$이다.

19. 직선 $x=2$ 와 두 곡선 $y=3\log_2 x$, $y=2^{3-x}$ 과의 교점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단, O 는 원점이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ 3

19. [출제의도] 지수와 로그의 간단한 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x=2$ 일 때 $y=3\log_2 2=3$ 이므로 $\mathrm{A}=(2,3)$

$y=2^{3-2}=2^1=2$ 이므로 $\mathrm{B}=(2,2)$

따라서 삼각형 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(2,2)$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$ 이다.

20. 실수 x에 대한 3차 방정식 $x^3-3x=t-2$의 실수 t의 값에 따른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 실수 t에 대한 방정식 $f(t)=a^t$이 실근을 갖게 하는 양의 실수 a의 최솟값은? (단, $a\neq 1$) [4점]

① $2^{\frac{1}{4}}$ ② $3^{\frac{1}{4}}$ ③ $2^{\frac{1}{2}}$ ④ $3^{\frac{1}{2}}$ ⑤ 3

20. **[출제의도] 삼차함수와 지수함수의 그래프의 개형을 그려 실근의 개수를 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

방정식 $x^3-3x=t-2$ 의 실근의 개수는

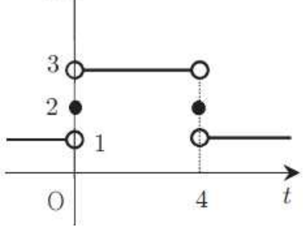
삼차함수 $y=x^3-3x+2$ 의 그래프와 $y=t$ 와의 교점의 개수가 되므로

$t<0, t>4$ 일 때, 실근의 개수=1

$0<t<4$ 일 때, 실근의 개수 = 3

$t=0, 4$ 일 때, 실근의 개수 = 2개 이므로

함수 $y=f(t)$ 그래프는 다음과 같다.



지수함수 $y=a^t$ 는 $(0,1)$ 을 지나므로

i) $0<a<1$ 이면 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.

ii) $a>1$ 이면 $(4, 2)$ 지날 때 주어진 방정식은 처음으로 실근을 가진다.

따라서 a 의 최솟값은 $2^{\frac{1}{4}}$ 이다.

21. 어느 놀이 공원에서는 입장객에게 A, B, C 세 종류의 사은품을 다음과 같은 방법으로 지급한다.

> (가) 1회 입장할 때마다 A, B, C를 각각 1개의 면, 2개의 면, 3개의 면에 적은 정육면체 모양의 상자를 던졌을 때, 상자의 윗면에 적힌 문자에 해당하는 사은품 쿠폰 한 장을 준다.
> (나) 같은 종류의 사은품 쿠폰이 3장 모이면 해당 사은품을 즉시 지급한다.

어떤 사람이 5회 입장하고 사은품을 받았을 때, 사은품 A를 받았을 확률은? [4점]

① $\frac{7}{132}$ ② $\frac{2}{33}$ ③ $\frac{17}{273}$ ④ $\frac{25}{396}$ ⑤ $\frac{11}{128}$

5회 입장 후 A,B,C 사은품을 받을 확률을 각각 P(A),P(B),P(C)라고 하면

$$P(A) = {}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6} = \frac{25}{6^4}$$

$$P(B) = {}_4C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^2\frac{2}{6} = \frac{128}{6^4}$$

$$P(C) = {}_4C_2\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2\frac{3}{6} = \frac{243}{6^4}$$

따라서

$$P(A|A \cup B \cup C) = \frac{\frac{25}{6^4}}{\frac{25}{6^4}+\frac{128}{6^4}+\frac{243}{6^4}} = \frac{25}{396}$$

23. 세 수 2, 3, 5에서 중복을 허락하여 다섯 개의 수를 선택하고, 이들 선택된 다섯 개의 수를 곱하여 만들어지는 수 중에서 9의 배수가 아닌 것의 개수를 구하시오. [3점]

3이 0개 1개 포함되는 경우이므로

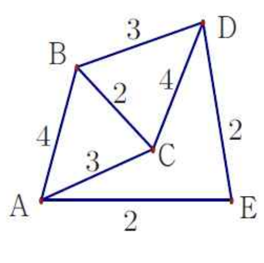
${}_2H_5 + {}_2H_4 = {}_6C_5 + {}_5C_4 = 11$이다.

26. 아래의 표는 5개의 도시 A, B, C, D, E 사이의 비행기 요금표이다. 도시 A에서 출발하여 모든 도시를 한 번씩만 관광하고 돌아오는 여행 계획을 세우려고 한다. 도시 사이를 비행기로만 이동할 때, 소요되는 비행기 요금의 최솟값은 $a \times 10^5$(원)이다. a의 값을 구하시오. (단, *는 항공 노선이 없음을 나타낸다.) [3점]

(단위: 10만 원)

출발 \ 도착	A	B	C	D	E
A		4	3	*	2
B	4		2	3	*
C	3	2		4	*
D	*	3	4		2
E	2	*	*	2	

아래 그림과 같이 그래프로 나타내고 요금을 표시하면 최소비용이 소요되는 회로 중 하나는 ACBDEA이며, 비용은 $3+2+3+2+2=12$ (10만원)



$\therefore$ 12×10^5 에서 $a=12$

27. p가 소수일 때, $\left(x+\dfrac{p}{x}\right)^n$의 x에 대한 전개식에서 상수항이 160이다. 두 수 n, p의 곱 np의 값을 구하시오.
(단, n은 자연수이다.) [4점]

${}_nC_r(x)^n\left(\dfrac{p}{x}\right)^{n-r}={}_nC_r p^{n-r}x^{2r-n}$에서 $n=2r$

${}_nC_{\frac{n}{2}}\mathrm{p}^{\frac{n}{2}}=160=2^5\cdot5$

n은 짝수이므로 n대신에 2, 4를 대입하여 계산하면 성립하지 않고, $n=6$일 때,

${}_6C_3p^3=5\cdot2^2p^3=2^5\cdot5$이므로 $p=3$이다.

$\therefore np=6\cdot2=12$

28. 한 변의 길이가 1cm 인 정육면체의 각 모서리의 길이가 2(cm/초)의 일정한 속력으로 증가할 때, 정육면체의 한 면의 넓이가 25(cm^2)가 되는 순간의 시간에 대한 부피의 변화율(cm^3/초)을 구하시오. [4점]

28. [출제의도] 도함수를 활용하여 넓이의 시간에 대한 변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

한 변의 길이를 l, 한 면의 넓이를 S, 직육면체의 부피를 V라 하면

$$\frac{dl}{dt}=2(cm/\text{초}),\ S=l^2,\ V=l^3,$$

$$S=l^2=25,\ \therefore l=5$$

$$\frac{dV}{dt}=3l^2\cdot\frac{dl}{dt}=3\cdot5^2\cdot2=150$$

29. 11개의 연속하는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2 = \sum_{k=7}^{11} {a_k}^2$$

을 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오. [4점]

$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2 + \cdots + a_{11}^2$

$a_6 = x$라 놓고 연속하는 자연수를 Σ로 표시하면

$$\sum_{k=1}^{5} (x-k)^2 + x^2 = \sum_{k=1}^{5} (x+k)^2$$

$$x^2 = \sum_{k-1}^{5} (x+k)^2 - \sum_{k=1}^{5} (x-k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{5} 4kx = 4x \sum_{k=1}^{5} = 4x \frac{5 \cdot 6}{2} = 60x$$

따라서 $x = 60$이고 a_1은 60에서 5만큼 작은 수이므로 $60 - 5 = 55$이다.

<참고> $55^2 + 56^2 + \cdots + 60^2 = 61^2 + 62^2 + \cdots + 65^2$

30. 함수 $f(x)=ax+2\,(a>0)$가 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k-1}{n} = 5$$

을 만족시킬 때, $10a$의 값을 구하시오. [4점]

30. [출제의도] 구분구적법을 이해하고 정적분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a\frac{k}{n}+2\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left((a\frac{k}{n}+2)-(a\frac{k-1}{n}+2)\right)\frac{k-1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a\frac{k}{n}+2\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)\frac{k-1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}=x_k$로 놓으면 $a=0,\ b=1,\ \Delta x=\frac{1}{n}$

준식$=\int_0^1(ax+2)\,dx+\int_0^1 ax\,dx$

$$=\int_0^1(2ax+2)\,dx=\left[ax^2+2x\right]_0^1=a+2=5$$

$a=3$ 따라서 $10a=30$

[오답노트 08차 ~]

2012.10 교육청	11 14 16 17 19
	20 21 25 26 27
	29
2011.10 서울	10 15 16 17 18
	19 21 26 28 30
2011.10 대전	8 13 14 15 19
	20 21 23 26 27
	28 29 30