11. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n \le 1) \\ \log_{a_n}\sqrt{2} & (a_n > 1) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_{12}\times a_{13}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

12. $x>1$인 모든 실수 $x$의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\sqrt{x-1}\,f'(x)=3x-4$$

를 만족시킬 때, $f(5)-f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

① 조건은 $f'(x)$와 관련된 식

② 구하는 값은 $f(x)$와 관련된 값

⇒ "도함수와 원함수의 관계"를 찾아야 한다

도함수의 활용

미적분학의 기본정리 √

$$\therefore f(5)-f(2)=\int_2^5 f'(x)\,dx=\int_2^5 \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}\,dx$$ → 이후 계산

13. 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=2^{x+1}$의 그래프가 점 P에서 만난다. 서로 다른 두 실수 $a$, $b$에 대하여 두 점 A$(a, f(a))$, B$(b, g(b))$의 중점이 P일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $4$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

14. 확률변수 $X$는 정규분포 $N(m, 2^2)$, 확률변수 $Y$는 정규분포 $N(2m, \sigma^2)$을 따른다.

$$P(X \le 8)+P(Y \le 8)=1$$

①

을 만족시키는 $m$과 $\sigma$에 대하여 $P(Y \le m+4)=0.3085$일 때, $P(X \le \sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

| $z$ | $P(0 \le Z \le z)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.1915 |
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1359 ④ 0.1587 ⑤ 0.2857

2012학년도 9월 평가원 수리 나형 16번

16. 어느 공장에서 생산되는 제품 A의 무게는 정규분포 $N(m, 1)$을 따르고, 제품 B의 무게는 정규분포 $N(2m, 4)$를 따른다. 이 공장에서 생산된 제품 A와 제품 B에서 임의로 제품을 1개씩 선택할 때, 선택된 제품 A의 무게가 $k$ 이상일 확률과 선택된 제품 B의 무게가 $k$ 이하일 확률이 같다. $\frac{k}{m}$의 값은? [4점]

②

① $\frac{11}{9}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{23}{18}$ ④ $\frac{47}{36}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

조건 ①과 ②는 같은 조건이다.

⇒ 상황도 비슷하니 비슷하게 계산하면 끝

15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 ① 갖고 $g(x)$가 증가함수일 ② 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=(f \circ g)(x)$$

라 하자. 조건 ① 점 $(2,\ 2)$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고 $\dfrac{h''(2)}{f''(2)}=4$이다. ② $f'(2)=4$일 ③ 때, $h'(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

① : 이계도함수를 구해야 하는 상황이 나올 수 있겠다고 예측하며 읽기

② : g가 연속이므로 $g'(x) \geq 0$ 이겠거니... 생각

③ : 아하 $h'(2)$ 구할 때 쓸 값이 아닐까.. 추측 (뒷문장에 나오니까..? 아님 말고)

조건 ① : $g(2)=2$, $g'(2)=2$

② : $h''(2)$와 $f''(2)$를 구하기 위해 $h(x)=f(g(x))$ 2번 미분 후

2 대입 + 위에서 구한 정보 이용하면 끝

17번 문제

☆ 생각 ②

2019학년도 수능 나형 29번

**29.** 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7+b_7$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

16. 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 $a$, $b$, $c$라 하자. $a+b+c$의 값을 확률변수 $X$라 할 때, 다음은 확률변수 $X$의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

> $3 \leq a+b+c \leq 18$이므로 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 $3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 18$이다.
> $a$, $b$, $c$가 각각 6 이하의 자연수이므로
> $7-a$, $7-b$, $7-c$는 각각 6 이하의 자연수이다.
> $3 \leq k \leq 18$인 자연수 $k$에 대하여
> $a+b+c=k$일 확률 $\mathrm{P}(X=k)$와
> $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률
> $\mathrm{P}(X=3\times\boxed{(가)}-k)$는 서로 같다.
> 이 부분 체크
> 그러므로 확률변수 $X$의 평균 $\mathrm{E}(X)$는
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=3}^{18}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$
> $$=3\times\mathrm{P}(X=3)+4\times\mathrm{P}(X=4)+5\times\mathrm{P}(X=5)$$
> $$+\cdots+17\times\mathrm{P}(X=17)+18\times\mathrm{P}(X=18)$$
> $$=\boxed{(나)}\times\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)$$
> 이때, 확률질량함수의 성질에 의하여 $\displaystyle\sum_{k=3}^{18}\mathrm{P}(X=k)=1$이므로
> $$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\boxed{(다)}$$ 이다.
> 따라서 $\mathrm{E}(X)=\boxed{(나)}\times\boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p$, $q$, $r$라 할 때, $\dfrac{p+q}{r}$의 값은? [4점]

① 49 ② $\dfrac{105}{2}$ ③ 56 ④ $\dfrac{119}{2}$ ⑤ 63

유사 문제 : 2020학년도 3월 가형 18번 (시행년: 2019)

2021학년도 4월 가형 29번 (시행년: 2020)

17. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, $S_n$, $T_n$은 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $S_7 = T_7$<br>(나) 6 이상의 모든 자연수 $n$에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다. |

$T_{15}$의 값은? [4점]

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

(가) 해석

$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{7} |a_k|$ → 위꼴 아래꼴 같으니 뭔가 빼고싶다 → 생각 ①

$\sum_{k=1}^{7} |a_k| - a_k = 0$ → $|a_k| \geq a_k$ 이니 $|a_k| - a_k \geq 0$ 이네..? → 생각 ②

$\therefore |a_k| = a_k \Rightarrow a_n \geq 0 \ (n \leq 7)$

(나) 해석 (당연히 $S_7 = T_7 = 42$ 쳐주는 할 수 있겠죠?)

① 뭔소린지 모르겠으니 $n = 6, 7, 8, \cdots$ 대입해보기

$S_6 + T_6 = 84$ $\quad S_7 + T_7 = S_6 + T_6 = 84 \Rightarrow a_7 + |a_7| = 0 \rightarrow a_7 \leq 0$

$S_8 + T_8 = S_7 + T_7 = 84 \Rightarrow a_8 + |a_8| = 0 \rightarrow a_8 \leq 0$

⋮

$\Rightarrow a_n \leq 0 \ (n \geq 7)$

② ①을 좀 더 깔끔하게

$S_{n+1} + T_{n+1} = S_n + T_n = 84 \Rightarrow |a_{n+1}| + a_{n+1} = 0 \rightarrow n \geq 6$에서 $a_{n+1} \leq 0$

$\Rightarrow a_n \leq 0 \ (n \geq 7)$

종합: $a_n = \begin{cases} + & (n \leq 6) \\ 0 & (n = 7) \\ - & (n \geq 8) \end{cases}$ $+ \ S_7 = 42 \Rightarrow$ 계산

★ 생각 ①

2015학년도 10월 A형 30번 (시행년: 2014)

30. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

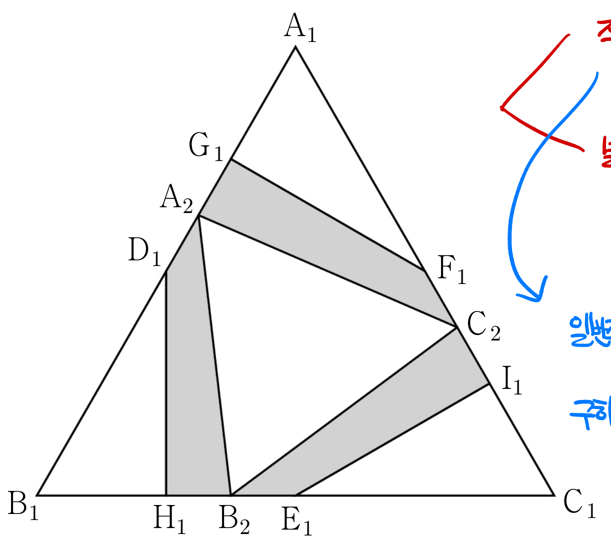
| |
|---|
| (가) $\lvert a_n \rvert + a_{n+1} = n + 6 \ (n \geq 1)$<br>(나) $\sum_{n=1}^{40} a_n = 520$ |

$\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

공간부족으로 유사기출 2는 옆쪽에..

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 선분 $A_1B_1$, $B_1C_1$, $C_1A_1$의 중점을 각각 $D_1$, $E_1$, $F_1$이라 하고, 세 선분 $A_1D_1$, $B_1E_1$, $C_1F_1$의 중점을 각각 $G_1$, $H_1$, $I_1$이라 하고, 세 선분 $G_1D_1$, $H_1E_1$, $I_1F_1$의 중점을 각각 $A_2$, $B_2$, $C_2$라 하자. 세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.
그림 $R_1$에서 삼각형 $A_2B_2C_2$에 그림 $R_1$을 얻은 것과 같은 방법으로 세 사각형 $A_3C_3F_2G_2$, $B_3A_3D_2H_2$, $C_3B_3E_2I_2$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 $R_2$라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

$R_1$



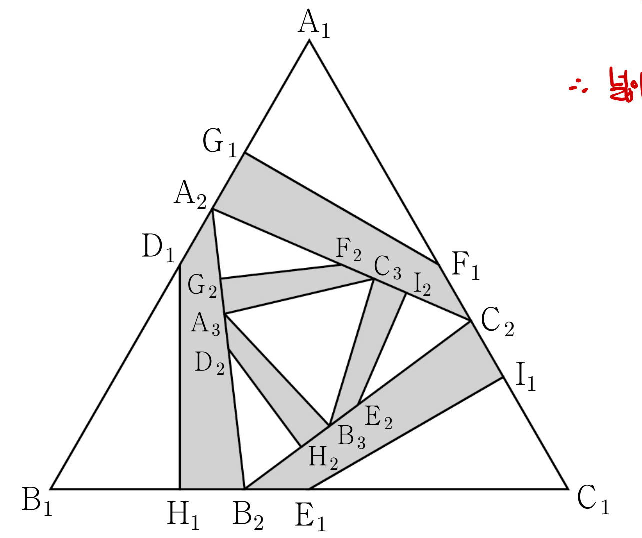

직접 구하기

넓이의 합·차 이용하기 ✓

일반적인 사각형이므로 구하려면 대각선 공식 / 삼각형 2개로 나누기 가 기본인데, 둘 다 바람직지 않다.

$\therefore$ 넓이의 합, 차로 접근

$R_2$




⋮ ⋮

① $\frac{109\sqrt{3}}{15}$ ② $\frac{112\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{23\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{118\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{121\sqrt{3}}{15}$

19. 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt$$

일 때, 함수 $g(x)$와 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖는다. |
| (나) 모든 실수 $x$에 대하여 $g'(-x)=g'(x)$이다. |

목표

$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{xf'(x)}{f(x)}dx}$의 값은? [4점]

① $-4$ ② $-2$ ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

① : 아마 $\ln f(t)$ 정의하려고 쓴 거 아닐까..

② : 도함수 구하기 + 연속성 이용하기.. 인데 아마 구하는 적분값 때문이 아닐까.. (적분 → 연속함수!)

③ : 바로 [ $x=0$ 대입 → $\boxed{g(0)=0}$ / 미분 → $\boxed{g'(x)=\ln f(x)}$

(가) : $\boxed{g(1)=2}$, $\boxed{g'(1)=0}$

(나) : $g'(x)$는 짝함수 (우함수)

* 목표를 보고 드는 생각 정리

① 적분 구간이 대칭적 ($-1 \sim 1$)

② 우리가 아는 정보는 다 함수 $g$와 연관 → 근데 물어보는건 $f$니까 "$g$랑 $f$를 연관시키자"

$\Rightarrow g''(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 관찰 가능

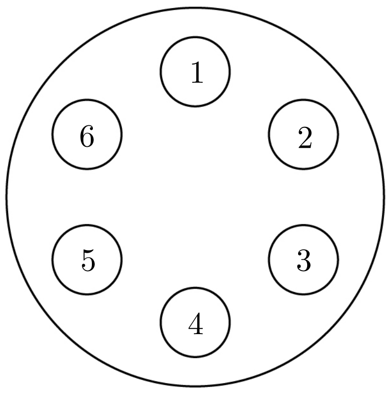
이후 계산에서도

① 바로 $g''$이 적분 가능, $x$가 미분 가능 함수임을 이용해 부분적분 후 계산

② $xg''(x)$가 짝함수임을 이용해 $2\int_0^1 \sim$ 으로 바꿔 부분적분

이 가능하나, ②가 더 필연적이지 않나 싶음 (적분 구간의 대칭성은 중요하니까!)

20. 그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 9개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3개의 쿠키를 각각 1개씩 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 경우 6, 1, 2가 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1개씩 담는다. 이 시행을 3번 반복하여 9개의 쿠키를 모두 접시 위에 담을 때, 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은? [4점]




① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{17}{36}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{23}{36}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

풀이 1 (기준 : 시행 순서대로)

1st : 1~6 중 어느 것이 나와도 후상황이 같으므로 확률은 1

⇒ 1로 고정 후 계산하기

2nd : 1 기준으로 구성이 대칭적이니 1 / 2.6 / 3.5 / 4로 나눌 수 있음.

(안 되면 다 나눠서 해도 큰 차이 x)

3rd : 1 ⇒ 4 1개 ⇒ $1\times1=1$

2.6 ⇒ 4.5 (or 3.4) 2개 ⇒ $2\times2=4$

3.5 ⇒ 4.5.6 (or 2.3.4) 3개 ⇒ $2\times3=6$

4 ⇒ 1~6 6개 ⇒ $1\times6=6$

이 부분을 곱셈정리로 처리해도 큰 차이 X

$\therefore 1\times\frac{1+4+6+6}{36}=\frac{17}{36}$

풀이 2 (기준 : 중복 선택의 횟수)

1번 (중복 X) = 서로 다른 3개 : 서로 다른 거 3개 선택 ⇒ $6\times5\times4$

이때 빈 접시가 있으려면 3개가 모두 이웃한 경우만 가능 ⇒ $6\times3!$

⇒ $\frac{120-36}{6^3}=\frac{14}{36}$

2번 (중복 1개) = 다른 거 1개 같은거 2개 : 2번 뽑는 거 선택 ⇒ 6

나머지 1개는 반대편 ⇒ 1

순서 배열 ⇒ $\frac{3!}{2!}=3$

$\frac{6\times1\times3}{6^3}=\frac{3}{36}$

0, 3번 → 불가능

$\therefore \frac{14}{36}+\frac{3}{36}=\frac{17}{36}$

풀이 3 (여사건 → 기준 : 빈 접시 개수)

여사건 1개 : 서로 이웃한 3개 ⇒ $\frac{6\times3!}{6^3}$

1칸 떨어진 2개 3번 ⇒ 2개랑 같음

2개 : 서로 이웃한 2개 3번 ⇒ $\frac{6\times2\times\frac{3!}{2!}}{6^3}$ (6 : 이웃한 수 선택, 2 : 뭐가 1개인지 선택, $\frac{3!}{2!}$ : 배열)

3개 : 같은 거 3번 ⇒ $\frac{6}{6^3}$

나머지 → X

$\therefore 1-\frac{6+6+6+1}{36}=\frac{17}{36}$

21. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=f(x)-g(x)\ (0<x<4)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=0$ 자명

ㄴ. 두 양수 $a$, $b\ (a<b<4)$ 에 대하여 $\displaystyle\int_a^b h(x)dx$ 의 값이 최대일 때, $b-a=2$ 이다.

$h(x)>0$인 부분이 많아야 함 ⇒ $b=3$, $a=1$

ㄷ. $h(x)$ 의 도함수 $h'(x)$ 의 최댓값은 $\dfrac{7}{6}$ 이다. $\dfrac{5}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

① : $x>0$에서만 관찰하면 되겠네

② : 역함수 존재? ⇒ f가 연속이니까 증가함수인지 감소함수인지 판단해야겠다

미분해서 증가 파악

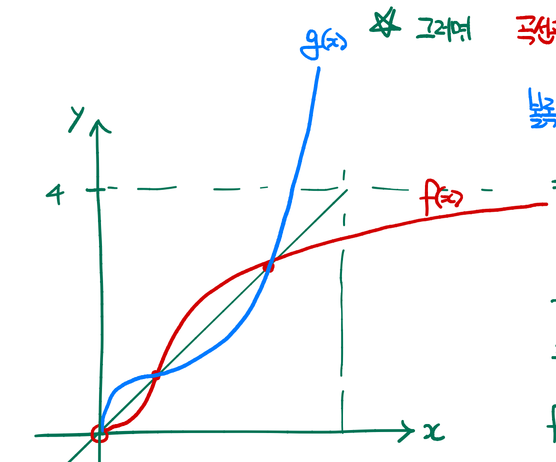
$\lim_{x\to0+} f(x)=0$ 이고 $f(x)>0$ 이므로 증가 체크

③ : $f-g$ 관찰이 필요하니. $f(x)$와 $y=x$ 비교해서 그래프를 그리자

★ 그러면 곡선과 직선 (일차함수) 비교하는 상황이니

볼록성까지 확인하며 그래프를 그려야겠네

⇒ $0\sim1$ $f''(x)>0$
$1\sim$ $f''(x)<0$ 확인 가능




$x$ 1 3
⇒ $h(x)$ − 0 + 0 −

추가적으로 $f(x)$와 $x$ 비교를 위해

$f(x)=x$ 근 찾아주면 끝 ⇒ $x=1, 3$

↳ 빼기함수를 그리기 위해 $f-g=0$, 즉 역함수와의 교점을 찾는 행동이다.

ㄷ 선지 판단

① 정석 : $h'(x)$의 최댓값을 물어보고 있으므로, 도함수인 $h''(x)$의 부호를 이용해 $h'(x)$의 개형 파악 후 최대인 지점을 찾아 계산한다.

⇒ 이건 미분하기가 귀찮지만, 행동원리가 간단하다.

② 역함수임을 이용하기 : 주어진 정보에 따르면 $f'(x)\le\frac{3}{2}$이므로, 역함수 미분에 의해 $g'(x)\ge\frac{2}{3}$

⇒ $h'=f'-g'\le\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$ 이므로 판단 끝

✱ 추가적으로 $h'(x)$의 최댓값도 구할 수 있다. 최댓값의 정의에 의해 등호가 성립하는지를 체크해보면 $x=1$에서 성립하기 때문

(등호 성립 X 시 최댓값 판별이 어렵지만, 비교적 더 쉬우니 ②→①로 접근이 바람직)

2013학년도 9월 가형 21번

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x)\le\dfrac{1}{3}$이다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

① $-11$ ② $-9$ ③ $-7$ ④ $-5$ ⑤ $-3$

ㄷ 선지 판단 ②와 유사

23. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 $x^6$ 의 계수를 구하시오. [3점]

24. 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다. $\mathrm{E}(2X-a)=\mathrm{V}(2X-a)$를 만족시키는 상수 $a$의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=3t-\frac{2}{\pi}\cos\pi t,\quad y=6\ln t-\frac{2}{\pi}\sin\pi t$$

이다. 시각 $t=\frac{1}{2}$에서 점 P의 속력을 구하시오. [3점]

26. 삼각형 ABC에 대하여 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$라 할 때, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$가 이 순서대로 등차수열을 이루고 ② $\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 ③ 이룰 때, $\tan\alpha\tan\gamma$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$) [4점]

목표

① : $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

② : $2\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{3},\ \alpha+\gamma=2\beta=\frac{2}{3}\pi$

③ : $4\cos^2\beta=8\cos\alpha\cos\gamma \Rightarrow \cos\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\cos\alpha\cos\gamma=\frac{1}{8}$

목표 : $\alpha,\gamma$에 대한 값이므로, 조건을 통해 $\beta$를 소거하고 $\alpha,\gamma$에 대한 정보를 얻고자 하는 태도를 가져야 한다.

정리 : $\cos\alpha\cos\gamma=\frac{1}{8}$

$\alpha+\gamma=\frac{2}{3}\pi$

$\tan\alpha\tan\gamma$를 찾으려면 $\sin\alpha\sin\gamma$를 알아야 한다.

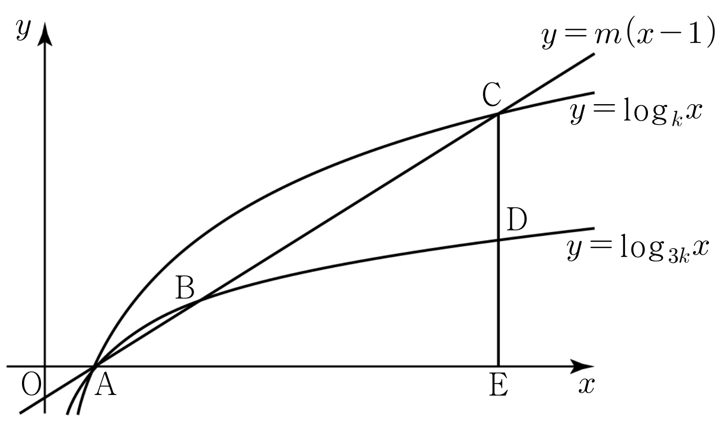
$\therefore\ \cos(\alpha+\gamma)$ 계산하기!

$\boxed{5}$

27. $k>1$인 실수 $k$에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 $m$에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 $y$축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, $x$축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다. |
| (나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다. |

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{12}$




(가) 해석 : 넓이를 비교할 땐 공통 부분을 찾는 것이 기본 태도

△BDC와 △ADB의 공통 부분

① 선분 $\overline{DB}$ : 점 A, C에서 $\overline{DB}$에 수선을 내려 높이를 구해야 하는데, 어려워보인다.

② 점 B : $\overline{AD}$, $\overline{DC}$에 수선을 내려야 하는데, $\overline{AD}$가 좀 어려워보인다.

③ 점 D : $\overline{BC}$, $\overline{AB}$에 수선을 내려야 하는데. 이러면 높이가 같으니 계산이 쉽네.. ⇒ $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 3$

⇒ 생각해보면 A, B, C가 일직선상에 있어서 비교가 용이했다는 것도 알 수 있다. (높이가 일정하니까)

(나) 해석 : (가)와 같은 맥락으로 비교해보면, $\overline{CD}=\overline{DE}$임을 알 수 있다. 이후 계산

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 $f$의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{327}$

| |
|---|
| (가) $f(3)\times f(6)$은 3의 배수이다. |
| (나) 집합 $X$의 임의의 두 원소 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다. ⇒ 전형적인 중복조합 상황 |

풀이 1 : 잘 모르겠으니 $f(3)$ 기준으로 케이스 분류

$f(3)=1$ — $f(6)=3$, $f(6)=6$ ⇒ 1, 2 선택 × 4 5 선택 ⇒ $1 \times \{{}_3H_2 + {}_6H_2\} = 27$

2 — $f(6)=3$, $f(6)=6$ ⇒ ${}_2H_2 \times \{{}_2H_2 + {}_5H_2\} = 54$

(4.5.6 선택)

3 제한 × ⇒ ${}_3H_2 \times {}_4H_3 = 120$

4 6 ⇒ ${}_4H_2 \times {}_3H_2 = 60$

5 6 ⇒ ${}_5H_2 \times {}_2H_2 = 45$

6 6 ⇒ ${}_6H_2 \times 1 = 21$

풀이 2 : 좀 더 현명한 사람 → $f(6)$ 기준 Why? 6은 제약조건이 더 많으니까 by (나) 조건

$f(6)=3$ 제한 × ⇒ ${}_3H_5 = 21$

4 3 ⇒ ${}_3H_2 \times {}_2H_2 = 18$

5 3 ⇒ ${}_3H_2 \times {}_3H_2 = 36$

6 제한 × ⇒ ${}_6H_5 = 252$

327

풀이 3 : 포함-배제 ⇒ 귀찮아서 생략

2021학년도 수능완성 나형 경우의 수 22번 (94쪽)

**22** ▸ 20051-0235

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 $X$에서 집합 $Y$로의 함수 $f$의 개수를 구하시오.

| |
|---|
| (가) 어떤 자연수 $n$에 대하여 $f(3)=3n$이다. |
| (나) 집합 $X$의 임의의 두 원소 $a$, $b$에 대하여 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$이다. |

2021학년도 수능완성 가형 실전모의고사 5회 11번

**11** ▸ 20050-0505

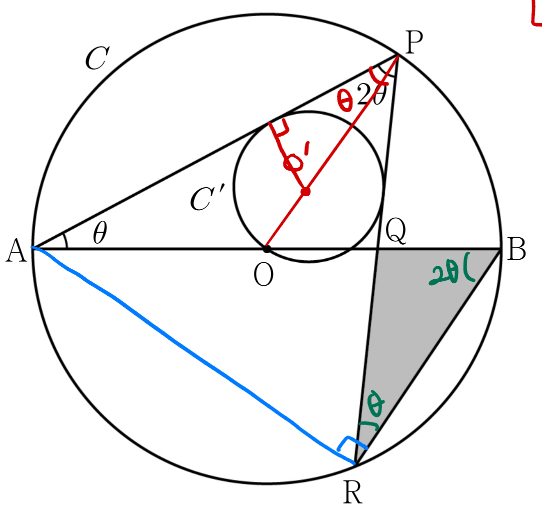
집합 $X=\{2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow X$의 개수는? [3점]

| |
|---|
| (가) $f(2)\times f(6)$은 4의 배수이다. |
| (나) $f(3)\le f(4)\le f(5)$ |

① 435 ② 445 ③ 455 ④ 465 ⑤ 475

29. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 $C$가 있다. 원 $C$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 ①
$\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle \mathrm{APQ}=2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 $C$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 $C'$이라 하자. 원 $C'$이 점 O를 지날 때, 원 $C'$의 반지름의 길이를 ② $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$ 일 때, $45a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]

$\boxed{120}$

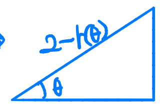



① 원+각이 등장했으니 원주각부터 체크한다 ⇒ $\angle R=\theta$

$\angle B=2\theta$

② O가 C'위의 점이니, C'의 중심 O'과 O를 연결해본다는 생각은 매우 합리적이다. 그러면 O, O', P가 일직선 연결되므로,

수선 긋고 비교하자 ⇒




$r(\theta)$ 이므로 정리 시 $\boxed{r(\theta)=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

↱ $2\theta,\ \theta,\ \pi-3\theta$

③ $S(\theta)$를 구해야 하는데, 각은 아니까 변을 구해보자.

⇒ $\overline{AB}$가 지름이니 쉽게 $\overline{BR}=4\cos 2\theta$ 구하기 가능

그러면 변 1개, 각 3개 아니까 다른 변 구하려면? 사인 법칙...

이후 계산

---

아니면 $\overline{OR}$ 연결 시 $\angle ORB=2\theta$이고, $\angle BRQ=\theta$임을 이용하면 $\overline{RQ}$가 각의 이등분선이 되므로, 이를 통해서도 계산 가능하다.

30. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 $a$, $b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$e^{ax}+bx$

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ (0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 $\alpha$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 ① $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_m$ ($m$은 자연수)라 할 때, $m$ 이하의 자연수 $n$에 대하여 $\alpha_n$은 다음 조건을 만족시킨다.

$\boxed{48}$

| |
|---|
| (가) $n$이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.<br>(나) $n$이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다. |

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 ③ $e^3+e^{-3}$일 때, $m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$이다. 목표

$p-q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 정수이다.) [4점]

① : 보자마자 19113이 떠오르는 조건.. 이므로 미분해본다.

$g'(x)=f'(x)\{ae^{af(x)}+b\}$ ⇒ $f'(x)=0$ or $ae^{af(x)}+b=0$

α 후보 ← 1, 3, 5, 7, 9, 11 $\quad e^{af(x)}=-\frac{b}{a}$

---

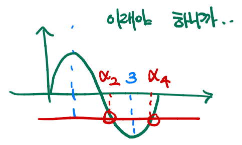
(가), (나) 해석 : α 후보 대입 시 $g\neq 0$이다. 그러면 1, 3, …, 11은 α가 아니거나 ($ae^{f(x)}+b=0$ 이거나) $\alpha_n=n$을 만족시켜야 한다.

해보면 이때 f가 최대(최소)라 α가 아닐 수는 없어서 모순!

∴ $g(\alpha_n)=0$인 $\alpha_n$은 $ae^{af(\alpha_n)}+b=0$ 만족

⇒ 계산 시 $f(\alpha_n)=\frac{1}{a}$이고, 짝수번째이므로 $a<0$

+ 짝수번째도 6개이므로 $m=12$ 확인 가능




---

↱ 부호 판별

③ : 언제 극대일지를 찾아야 한다. $f(\alpha_n)=\frac{1}{a}$이므로 $b=-ae$인데, $f(1)=1$ 대입 시

$ae^a+b=a(e^a-e)>0$이고, $f(3)=-1$ 대입 시 $a(e^{-a}-e)<0$이므로

$x=1, 3, \cdots, 11$에선 극대이다. ($f'$과 $ae^{af(x)}+b$ 부호 곱해서 체크)

그러면 $\alpha_2, \alpha_4, \cdots$에서는 당연히 극소여야 한다 by 사잇값 정리 (안되면 계산)

∴ g의 극댓값은 $e^a+b$, $e^{-a}-b$이고, $a<0$이므로 $a=-3$, $b=3e$이다.

---

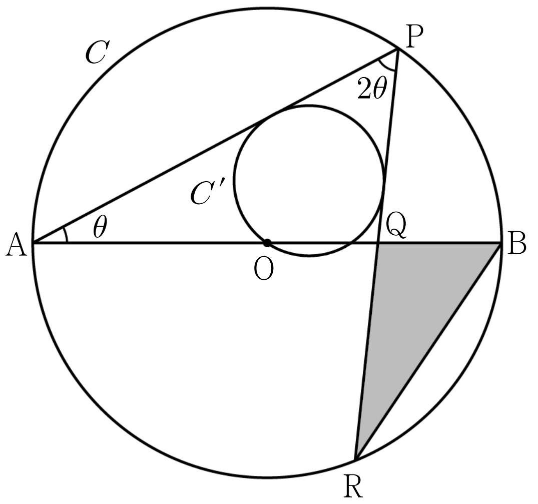
목표 계산 : $\cos\frac{\pi}{2}x$를 보자마자 $f'(x)$의 형태임이 보여야한다.. (어차피 $\alpha_4$를 모르기 때문에)

∴ $m=12$, $f(x)=t$ 치환 시 $f(\alpha_4)=-\frac{1}{3}$, $f(\alpha_3)=-1$, $\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{2}{\pi}dt$ 이므로

이를 이용해 계산하면 끝

| |
|---|
| ＊ 확인 사항<br>○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. |

29. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 $C$가 있다. 원 $C$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle \mathrm{APQ} = 2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 $C$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 $C'$이라 하자. 원 $C'$이 점 O를 지날 때, 원 $C'$의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{r(\theta)} = a$일 때, $45a$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]




2021학년도 수능완성 가형 실전모의고사 2회 21번

**21** ▸ 20050-0425

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = f(x) \times e^{f(x) - |f(x)|}$이라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{2f(x)+1}{x} = 0$
(나) 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 $x$의 값을 작은 값부터 크기순으로 모두 나열한 것을 $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\cdots$, $x_n$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} x_k = 5$이다.

$f(-1) \times f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{33}{4}$ ② $9$ ③ $\frac{39}{4}$
④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}$

30. 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$와 0이 아닌 두 실수 $a$, $b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = e^{af(x)} + bf(x) \quad (0 < x < 12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x = \alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 $\alpha$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\cdots$, $\alpha_m$ ($m$은 자연수)라 할 때, $m$ 이하의 자연수 $n$에 대하여 $\alpha_n$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n$이 홀수일 때, $\alpha_n = n$이다.
(나) $n$이 짝수일 때, $g(\alpha_n) = 0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 $e^3 + e^{-3}$일 때, $m\pi \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x) \cos \frac{\pi}{2} x \, dx = pe^3 + qe$이다. $p - q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 정수이다.) [4점]

2019학년도 수능 가형 30번

30. 최고차항의 계수가 $6\pi$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = \frac{1}{2 + \sin(f(x))}$이 $x = \alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 $\alpha$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$, $\cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0$이고 $g(\alpha_1) = \frac{2}{5}$이다.
(나) $\frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$

$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = a\pi$라 할 때, $a^2$의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.