랑데뷰 수학

수능을 완성하다!-확률과통계

목차

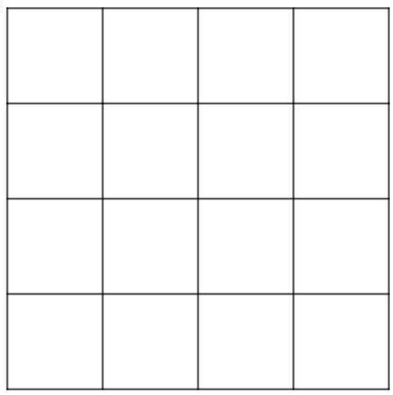
NOTE

지은이 – 황보백
랑데뷰 세미나 저자
수학의 샘 짱파이널 출제위원
플래티넘 수학(하) 저자

어썸&랑데뷰 실전 시즌1 모의고사 [오르비 출판]-저자
어썸&랑데뷰 실전 시즌2 모의고사 [오르비 출판]-저자
대구 송원학원

5)

그림과 같이 합동인 16개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다. 빨간색, 파란색을 포함하여 총 16가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.



(가) 주어진 16가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
(나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
(다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

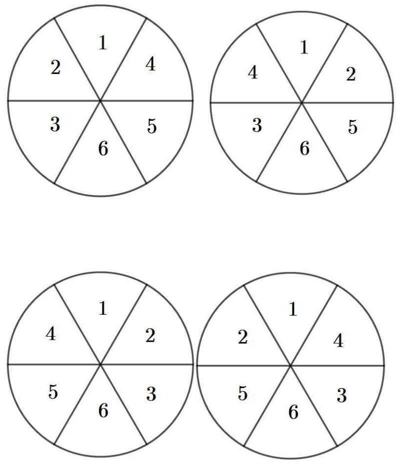
색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k \times 14!$이다. k의 값을 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

6) 킬러

6이상의 자연수 n에 대하여 중심각의 크기가 같은 n개의 부채꼴로 원판을 나눈 후, 다음 조건을 만족시키도록 1부터 n까지의 자연수를 각 부채꼴에 하나씩 모두 적는 경우의 수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 홀수를 적은 부채꼴끼리는 서로 이웃하지 않는다.
(나) 1을 적은 부채꼴과 n을 적은 부채꼴은 서로 이웃하지 않는다.

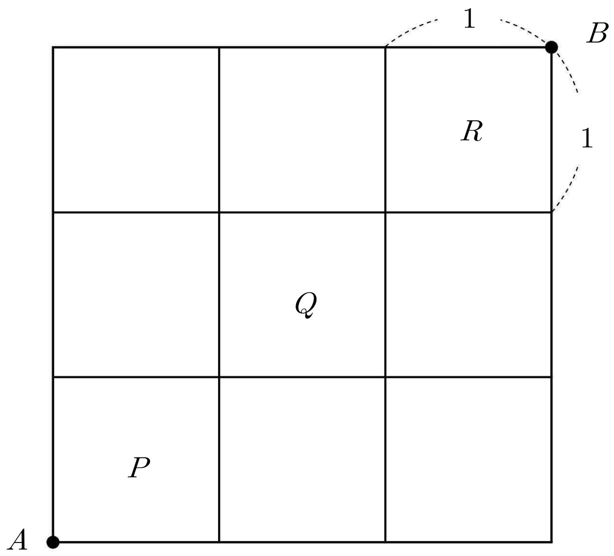
예를 들어 $n=6$일 때 조건을 만족시키도록 1부터 6까지의 자연수를 적는 경우는 다음과 같이 4가지가 있으므로 $f(6)=4$이다.



$\dfrac{f(101)+f(102)}{f(100)}=\dfrac{q}{p}\times 5^4$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

22)

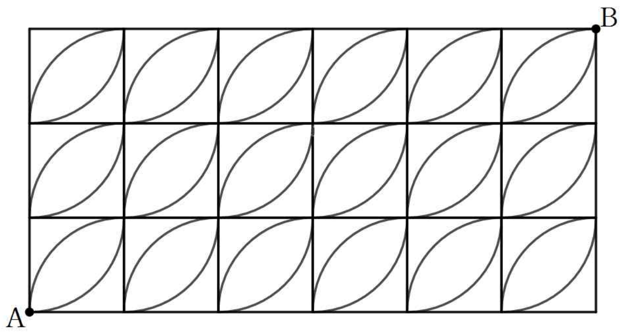
그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A지점에서 출발하여 B지점을 지나 다시 A지점까지 돌아올 때, 정사각형 P, Q, R중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 적어도 하나 존재하는 경우의 수를 구하시오.

23) 킬러

그림과 같이 사분원의 모양으로 연결된 도로망에서 각 도로가 만나는 지점을 교차점이라 하자. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 A지점과 B지점 사이에 7개의 교차점을 지나면서 B지점 까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



유형 7 이항정리

출제유형 | 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | n이 자연수일 때, $(a+b)^n$의 전개식의 일반항 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$에서 조건을 만족시키는 r의 값을 구하여 특정한 항의 계수를 구할 수 있도록 한다.

53)

두 자연수 m, n에 대하여 식 $\dfrac{(1+x)^m(1+x^2)^n}{x}$의 전개식에서 x의 계수가 10일 때, x^2의 계수의 최댓값을 구하시오.

54)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \frac{{}_6C_k \times 3^k \times a^6}{5^k \times a^k} = 64$을 만족하는 상수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오.

79)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c=9$

(나) $4^a \times 8^b$은 32의 배수이다.

80)

커피음료 아인슈페너의 가격은 5500원인데 현금으로 결제할 때 500원을 할인하여 5000원을 받는 비엔나 커피하우스 대구 오페라 삼정점에 13명의 손님이 커피를 테이크아웃 하려고 줄을 서고자 한다. 이들은 모두 현금으로 결제하려고 하며 이들 가운데 5명은 10000원짜리 지폐를 한 장씩 갖고 있고, 나머지 8명은 5000원짜리 지폐를 한 장씩 갖고 있다. 맨 처음 커피를 판매할 때 커피 하우스에는 잔돈이 없기 때문에 잔돈을 내어 줄 수 없고 아인슈페너는 한 사람이 한 잔만 살 수 있다고 한다. 모든 손님이 순조롭게 커피를 사고 커피 직원은 잔돈을 내주지 못해 어려움을 겪지 않도록 줄을 서는 방법의 수를 구하시오.
(단, 같은 돈을 들고 있는 사람끼리 자리를 바꾸는 것은 동일한 경우로 본다.)

81)

아서왕, 가웨인, 랜슬롯과 A, B, C 을 포함한 13명 원탁의 기사들이 회의를 하기 위해 다음 조건을 만족시키면서 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

(가) 아서왕이 앉은 자리를 1번으로 하고 시계 방향으로 2번부터 13번까지 차례로 번호를 정한다.

(나) 가웨인은 11번 자리에 앉고 4, 5, 6, 7, 8번 자리에는 아서왕, 가웨인, 랜슬롯과 A, B, C 가 아닌 기사들 7명 중 직전 회의에 4, 5, 6, 7, 8번에 앉았던 5명이 그대로 앉아 있다.

(다) 아서왕 바로 옆자리 중 적어도 한 자리에는 A, B, C 중에서 앉고 랜슬롯 바로 옆자리 중 적어도 한 자리에도 A, B, C 중에서 앉는다.

140)

한 자리 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 임의로 택할 때, 그 세 수 중 어느 두 수도 연속하지 않을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

141)

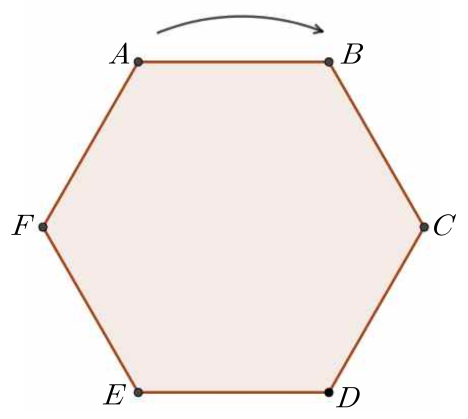
흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 A, B, C, D 네 사람이 차례로 임의로 한 개씩 공을 꺼낸다. A, B, C 중 적어도 한 명이 흰 공을 꺼내지 못했을 때, A, B, C, D 네 사람이 검은 공을 3개 꺼낼 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고 p, q는 서로소인 자연수이다.)

142)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 $ABCDEF$의 꼭짓점 위의 점 P를 다음 규칙에 따라 이동시킨다.

(가) 꼭짓점 A에서 출발한다. (나) 주사위 1개를 던져서 짝수의 눈이 나오면 정육각형의 변을 따라 시계 방향으로(화살표 방향) 3만큼 이동시킨다. (다) 주사위 1개를 던져서 홀수의 눈이 나오면 정육각형의 변을 따라 시계 방향으로 1만큼 이동시킨다.

1개의 주사위를 10번 던져서 꼭짓점 A를 출발한 점 P가 다시 꼭짓점 A로 도착할 확률은?



① $\frac{29}{128}$ ② $\frac{125}{512}$ ③ $\frac{161}{512}$ ④ $\frac{331}{1024}$ ⑤ $\frac{341}{1024}$

유형 5 연속확률변수와 확률밀도함수

출제유형 | 연속확률변수의 뜻을 알고 확률밀도함수의 성질을 이용하여 미지수를 구하거나 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 연속확률변수 X가 $\alpha \le X \le \beta$에서 모든 실수 값을 가질 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같은 성질을 갖는다.

(1) $f(x) \ge 0$(단, $\alpha \le x \le \beta$)

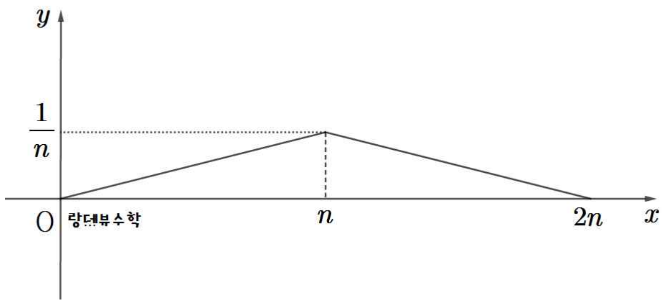
(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha, x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

(3) 연속확률변수 X가 $a \le X \le b$일 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

(단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

161)

양수 n에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 2n$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다. $\frac{n}{2} < k < n$일 때, $\mathrm{P}(k \le X \le 2k)$가 최대가 되도록 하는 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f'(1)$의 값은?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

162)

이차함수 $f(x)=-nx^2+n^2x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ n]$에 속하는 모든 실수값을 갖는 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $af(x)$라 하자.

$\mathrm{P}\left(0 \le X \le \frac{n}{3}\right)$의 값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하시오. (단, n은 2이상의 자연수이고 a는 양의 상수이다.)

187)

이산확률변수 X가 갖는 값은 $1, \frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^4}$이고 X의 확률 질량함수가

$$P\left(X=\frac{1}{r^{i-1}}\right)=p_i \ (i=1,2,3,\cdots,5)$$

이다. $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_5$이 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룬다고 한다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $r>0$)

| 보 기 |

ㄱ. $p_1=\frac{1}{1+r+r^2+r^3+r^4}$

ㄴ. $p_1=\frac{1}{1+r+2r^2}$일 때,

$P(X>1)=\frac{5-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$

ㄷ. $E(X^2)=16$이면 $E(X)=\frac{155}{16}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

188)

세 확률변수 X, Y, Z가 각각 이항분포 $B\left(n_1, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(n_2, \frac{1}{3}\right)$, $B\left(n_3, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $n_1 \geq 100$, $n_2 \geq 100$, $n_3 \geq 100$이다.)

| 보 기 |

ㄱ. $n_1=400$, $n_2=900$, $n_3=1600$일 때,

$V(X)<V(Y)<V(Z)$

ㄴ. $E(X)=E(Y)=E(Z)$를 만족시키는 최대의 세 자리 자연수 n_1, n_2, n_3에 대하여

$|V(X)+V(Y)-V(Z)|<100$

ㄷ.

$$P\left(X \geq \frac{n_1+2\sqrt{n_1}}{2}\right)<P\left(Y \geq \frac{n_2+\sqrt{6n_2}}{3}\right)=P\left(Z \geq \frac{n_3+3\sqrt{n_3}}{4}\right)$$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5) 정답 39

회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠하는 경우의 수는 다음 그림에서 A, B, C, D의 4가지다. E자리에 빨간색을 색칠하는 경우는 D에 색칠하는 경우와 회전해서 겹친다.

A	B	C	
	D	E	

빨간색을 각 영역에 칠한 수 (나), (다)를 만족하며 파란색을 칠하는 경우가 k이다.

(i) A에 빨간색을 칠할 때

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 12가지

(ii) B에 빨간색을 칠할 때

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 10가지

(iii) C에 빨간색을 칠할 때

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 10가지

(iv) D에 빨간색을 칠할 때

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 7가지

(i)~(iv)에서 39가지이다.

따라서 조건을 만족하는 경우의 수는 $39\times 14!$이다.

즉 $k=39$

6) 정답 61

(i) $n=2k$ $(k=3,4,5,\cdots)$일 때

먼저 k개의 홀수를 서로 이웃하지 않은 부채꼴에 적는 경우의 수를 구해보자.

회전하여 일치하는 경우가 k개 있으므로

$\dfrac{k!}{k}=(k-1)!$

이 각각에 대하여 1을 적은 부채꼴의 양 옆에는 n $(2k)$을 적을 수 없으므로 n을 적을 부채꼴을 택하는 경우의 수는 $k-2$

이 각각에 대하여 남은 $(k-1)$개의 짝수를 적는 경우의 수는 $(k-1)!$이므로

$$f(2k)=(k-1)!(k-2)(k-1)!$$
$$=(k-2)\{(k-1)!\}^2$$

(ii) $n=2k+1$ $(k=3,4,5,\cdots)$일 때,

n등분된 원판이 k개의 짝수를 적을 수 있는 부채꼴과 $k+1$개의 홀수를 적을 수 있는 부채꼴로 나눌 수 있다. 그런데 홀수의 개수가 n의 반보다 커서 홀수를 적은 부채꼴중 한쌍은 이웃할 수 밖에 없다. [(가)에 모순]

따라서 $f(2k+1)=0$

(i), (ii)에서

$f(100)=48(49!)^2$

$f(101)=0$

$f(102)=49(50!)^2$

$$\frac{f(101)+f(102)}{f(100)}=\frac{49\times 50!\times 50!}{48\times 49!\times 49!}$$
$$=\frac{49\times 50\times 50}{48}=\frac{49\times 25\times 25}{12}$$

$=\dfrac{49}{12}\times 5^4$

$p=12$, $q=49$이다.

$p+q=61$

따라서

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} \geq m+\frac{1}{4}c\right)=\mathrm{P}\left(Z_1 \geq \frac{m+\frac{1}{4}c-m}{\frac{\sigma}{20}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z_1 \geq \frac{\frac{1}{4}\times 0.196\sigma}{\frac{\sigma}{20}}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z_1 \geq 0.98)$$

$$=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z_1 \leq 0.98)$$

$$=0.5-0.3365$$

$$=0.1635$$

따라서 $P=0.1635$이므로

$2000P=327$

207) 정답 39

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 10)=0.9938=0.5+0.4938$

$=\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq m)+\mathrm{P}(m \leq \mathrm{X} \leq 10)$

표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(0 \leq \mathrm{Z} \leq 2.5)=0.4938$이므로

$\dfrac{10-m}{\sqrt{\dfrac{16}{(4m+1)^2}}}=\dfrac{5}{2}$이다.

$\dfrac{(10-m)(4m+1)}{4}=\dfrac{5}{2}$

$\rightarrow -4m^2+39m+10=10$

$\rightarrow -4m\left(m-\dfrac{39}{4}\right)=0$에서

$m=\dfrac{39}{4}$이다.

따라서 $4m=39$

208) 정답 ①

이때 $|\overline{X}-m| \leq 0.049\sigma$일 확률이 0.8584이상이므로

$\mathrm{P}(|\overline{X}-m| \leq 0.049\sigma)$

$$=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{0.049\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$=\mathrm{P}(|Z| \leq 0.049\sqrt{n})$

$=\mathrm{P}(-0.049\sqrt{n} \leq Z \leq 0.049\sqrt{n})$

$=2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.049\sqrt{n}) \geq 0.8584$

즉, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.049\sqrt{n}) \geq 0.4292$이므로

$0.049\sqrt{n} \geq 1.47, \quad \sqrt{n} \geq 30$

따라서 $n \geq 900$이므로 n의 최솟값은 900이다.