06. 수열의 합

1. 첫째항이 4이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$ 의 값은?

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} \Rightarrow \sqrt{\ }-\sqrt{\ } \text{ 유리화}}$

$\Rightarrow (\text{준식}) = \sum_{k=1}^{8} \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$

$= \frac{\sqrt{a_9}-\sqrt{a_1}}{2}$

$= \frac{\sqrt{20}-\sqrt{4}}{2} = \sqrt{5}-1$

2. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{15} \frac{S_{k+1}}{S_k} = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1}}{S_k}$의 값은?

$\boxed{S_{n+1} = S_n + a_{n+1}}$

$\sum_{k=1}^{15} \frac{S_k + a_{k+1}}{S_k} = 15 + \sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1}}{S_k} = 20$

$\therefore (\text{준식}) = 5$

3. 첫째항이 1이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{8}{15}$일 때, a_{21}의 값은?

$$\frac{1}{\square \times \triangle} \rightarrow \frac{1}{\square - \triangle}\left(\frac{1}{\triangle} - \frac{1}{\square}\right)$$

Point; 되도록이면 독립된 요소를 뽑아

ex) $\frac{\circ + \triangle}{\circ \triangle} \rightarrow \frac{1}{\circ} + \frac{1}{\triangle}$

$\Rightarrow$ (준식) $= \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{21}}$

$= 1 - \frac{1}{a_{21}}$

$= \frac{8}{15}$,

$\frac{1}{a_{21}} = \frac{7}{15}$, $a_{21} = \frac{15}{7}$

4. 부등식 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) < \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} < \sum_{k=1}^{n}(2k+1)$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ (2^2, 3^2)

$(1+)\ 3+5+\cdots+(2n+1) = n^2-1$

$(2^0+)\ 2^0+2^1+\cdots+2^n = 2^{n+1}-2^0$

; (준식) $\Leftrightarrow n^2 < 2^n - 1 < (n+1)^2 - 1$

• $4^2 = 2^4$; $n \geq 5$시 생각

$\Rightarrow n=5$: $25 < 32-1 < 36-1$
(O) (O)

$n \geq 6$: $2^n - 1 > (n+1)^2 - 1$; ⓧ

2^n-1	$(n+1)^2-1$
63	48
127	63
255	80
⋮	⋮

$\therefore n=5$

5. 첫째항이 양수이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{48}$일 때, a_2의 값은?

$$(준식) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{11}}\right) = \frac{5}{48},$$

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+20} = \frac{5}{24} \quad \cdots ㉠$$

㉠ $\times (a_1+20)\cdot a_1$

$$\Rightarrow 20 = \frac{5}{24}\cdot(a_1^2+20a_1)$$

$$a_1^2+20a_1-96=0,$$

$$a_1 = 4 \text{ or } -24$$

(×); 문제 맨 처음

$$\therefore a_1=4,\ a_2 = 4+2 = \underline{6}$$

6. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{4k-3} = 2n^2+3n$을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k}$의 값은

↳이걸 새 수열로 하자 $(=b_k)$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_n = an^2+bn \\ \Rightarrow a_n = a(2n-1)+b\cdot 1 \end{array}}$$

$$\Rightarrow b_n = 2(2n-1)+3 = 4n+1,$$

$$a_n = (4n-3)b_n$$

$$= (4n-3)(4n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{\underbrace{(4k-3)}_{1,5,9,13\cdots}\underbrace{(4k+1)}_{5,9,13,17,\cdots}}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1}\right)$$

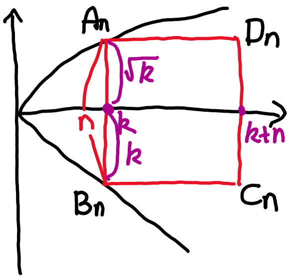
$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{41}\right)$$

$$= \underline{\frac{10}{41}}$$

7. 좌표평면에서 한 변의 길이가 n(n은 자연수)인 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$이 다음 조건을 만족시킨다.

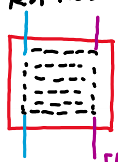
> (가) 꼭짓점 A_n은 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이고,
> 꼭짓점 B_n은 직선 $y=-x$ 위의 점이다.
> (나) 두 변 A_nD_n, B_nC_n은 x축에 평행하고,
> 두 변 A_nB_n, D_nC_n은 y축에 평행하다.

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 둘레와 그 내부에 있는 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?



• k가 not 정수

;

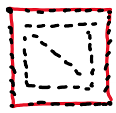


[k]+1=ㄱ　[k]+n=ㄱ

; $a_n=n^2$

• k가 정수

;



; 테두리에 격자점 O,

$\boxed{a_n=(n+1)^2}$

• $\sqrt{k}+k=n$

; $(\sqrt{k})^2+\sqrt{k}-n=0$,

$\sqrt{k}=\dfrac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$, $k=\dfrac{2n+1-\sqrt{4n+1}}{2}$

$\Rightarrow$ k가 정수 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{4n+1}$이 정수

↳ 무조건 홀수

$\Rightarrow$ $\sqrt{k}$가 정수

☆ $\sqrt{4n+1}$이 정수 ; $4n+1=(2m+1)^2$,

$n=m^2+m$

$\boxed{\rightarrow 2, 6, 12, 20}$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} k^2 - (2^2+6^2+12^2+20^2) + (3^2+7^2+13^2+21^2)$

$= 2954$

07. 수학적 귀납법

1. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$을 만족시킨다. $a_1<a_2$이고 $a_6=72$일 때, a_4의 값을 구하시오.

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

; a_1, a_2 알면 모든 항 확정

$\Rightarrow$ Let $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$ ($\beta>\alpha$, α, β는 자연수)

$\rightarrow a_3=\alpha+\beta$

$a_4=a_2+a_3=\alpha+2\beta$

$a_5=a_3+a_4=2\alpha+3\beta$

$a_6=a_4+a_5=3\alpha+5\beta=72$

$\beta>\alpha$; $8\beta>\underbrace{3\alpha+5\beta}_{=72}>8\alpha$

$\Rightarrow \beta>9>\alpha$, 72는 3의 배수

; $3\alpha+5\beta$는 3의 배수

너도 3의 배수

i) $\beta=12$: $\alpha=4$, OK

ii) $\beta\geq15$: $\alpha<0$, X

$\therefore a_4=\alpha+2\beta=28$

2. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_{11}=31$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$을 만족시킨다. $a_5+a_6+a_7$의 값은?

$\rightarrow$ 등차수열!

$a_1=1$, $d=\frac{31-1}{11-1}=3$

; $a_5+a_6+a_7=3a_6$

$=3(1+3\times5)$

$=48$

3. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = \frac{1}{81}$, $a_5 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$를 만족시킨다. $a_k < 100$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은?

등비수열!

$a_1 = \frac{1}{81} \xrightarrow{+4} a_5 = 1 \xrightarrow{+4} a_9 = 81$

$\times 81$ $\qquad$ $\times 81$

• $r = (81)^{\frac{1}{5-1}} = 3$; $a_{10} = 243 > 100$

$\boxed{\therefore 9}$

4. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = {a_n}^3 \times (-1)^n$을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은?

$a_1 = 1$

$a_2 = 1^3 \times (-1)^1 = -1$

$a_3 = (-1)^3 \times (-1)^2 = -1$

$a_4 = (-1)^3 \times (-1)^3 = 1$

$a_5 = 1 \times (-1)^4 = 1$

$a_6 = 1^3 \times (-1)^5 = -1$

⋮

; 4개가 돌아가는 수열

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{15} a_k$

$= (1-1-1+1) \times 3$

$+ (1-1-1)$

$= -1$

---

cf) ${a_n}^2 = 1$ 이 항상 성립하므로

$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n \times (-1)^n$

$\Rightarrow a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\rightarrow 1, -1, -1, 1, ----$

5. 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여 각 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5 중 하나인 n자리 자연수 중에서 연속하는 세 숫자가 모두 다른 자연수의 개수를 a_n이라 할 때,

$a_3 = p$, $a_{n+1} = qa_n$을 만족시킨다.

예를 들어, 13542는 연소가는 세 숫자가 135, 354, 542이므로 연속하는 세 숫자가 모두 다른 5자기 자연수이고, 12524는 연속하는 세 숫자 125, 252, 524중 252에 숫자 2가 두 번 포함되므로 연속하는 세 숫자가 모두 다른 5자리 자연수가 아니다.

$p+q$의 값을 구하시오.

• $a_3 : {}_5P_3 = 60$

(n+1)개

※ n자리수 : $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \text{- - - -}\ a\ b}_{n개}\ \boxed{?}$

a, b 제외

; 3가지 가능

$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n$

$\therefore 63$

6. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $0 < a_1 < 2$이고 $\sum_{k=1}^{30} a_k = \frac{3}{2}$일 때, a_1의 값은?

Let $a_1 = x$; $0 < x < 2$, $0 < 2-x < 2$

$a_1 = x$

$a_2 = x-2$

$a_3 = 2-x$

$a_4 = -x$

4개 반복

$a_5 = x$

⋮

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{30} a_k$

$= \underbrace{7(a_1+a_2+a_3+a_4)}_{28개}$

$\underbrace{+\,a_1+a_2}_{2개}$

$= 7\times 0 + (2x-2)$

$= 2x-2 = \frac{3}{2}$

$x = \frac{7}{4}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\begin{cases} a_{2n}=a_n \\ a_{2n+1}=a_n+1 \end{cases}$ 을 만족시킨다. 100이하의 자연수 k에 대하여 $a_k=2$인 모든 자연수 k의 개수는?

• $a_k=2 \rightarrow a_{2k}=2$

• $a_{2^n}=a_1=1,\ a_{2^n+1}=a_{2^{n+1}\times 2+1}=2$

; $a_3=a_6=a_{12}=\cdots=a_{96}=2$; 6개

$a_5=a_{10}=\cdots=a_{80}=2$; 5개

$a_9=a_{18}=a_{36}=a_{72}=2$; 4개

$a_{17}=a_{34}=a_{68}=2$; 3개

$a_{33}=a_{66}=2$; 2개

$a_{65}=2$; 1개

$\therefore 6+5+\cdots+1=21$

---

cf) 2진수; $n_{(2)}=\boxed{1\_\_\_\_\cdots\_}$

$\Rightarrow 2n_{(2)}=\boxed{}0$

$2n+1_{(2)}=\boxed{}1$

$\Rightarrow a_n$; n을 2진수로 나타낸 수의 1의 개수

100 이하의 자연수는 2진수로 7자리 이하이므로

$\underset{2^6}{0}\ \underset{2^5}{1}\ \underset{2^4}{0}\ \underset{2^3}{1}\ \underset{2^2}{0}\ \underset{2^1}{0}\ \underset{2^0}{0}{}_{(2)}=40$

$a_k=2$; 7자리 중 2자리를 1로 만들면 됨

$1100000_{(2)}<100$ 이므로

$=2^6+2^5=96$

경우의 수 $={}_7C_2=21$

$\boxed{\Rightarrow k\le 100,\ a_k=3\text{인 } k\text{의 개수는?}}$

8. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=5$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 3-\dfrac{5}{a_n} & (a_n\text{이 정수}) \\ 2a_n-3 & (a_n\text{이 정수가 아님}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값을 구하시오.

$\boxed{\text{복잡한 점화식 ; 대입후 관찰}}$

$\Rightarrow a_2=3-\frac{5}{5}=2$

$\boxed{a_3=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}}$

$a_4=1-3=-2$

$a_5=3+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$

$a_6=11-3=8$

$a_7=3-\frac{5}{8}=\frac{19}{8}$

$a_8=\frac{19}{4}-3=\frac{7}{4}$

$\boxed{a_9=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}}$

6개 순환

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{50}a_n=\underbrace{a_1+a_2}_{2개}$

$+\underbrace{8(a_3+\cdots+a_8)}_{8\times 6=48개}$

$=7+8\times\frac{129}{8}$

$=136$

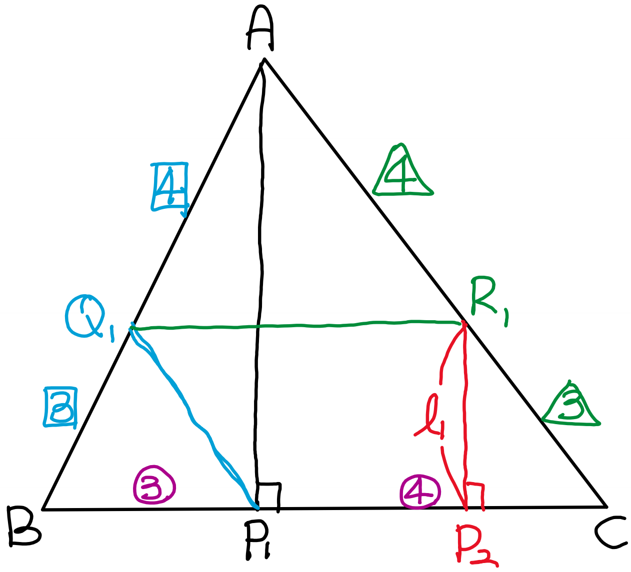
9. 그림과 같이 예각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P_1이라 할 때, $\overline{AP_1}=1$이고, P_1은 선분 BC를 $3:4$로 내분하는 점이다. 자연수 n에 대하여 세 점 Q_n, R_n, P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 선분 BC위의 점 P_n을 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 Q_n이라 한다.
> (나) 선분 AB위의 점 Q_n을 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 R_n이라 한다.
> (다) 점 R_n에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P_{n+1}이라 한다.

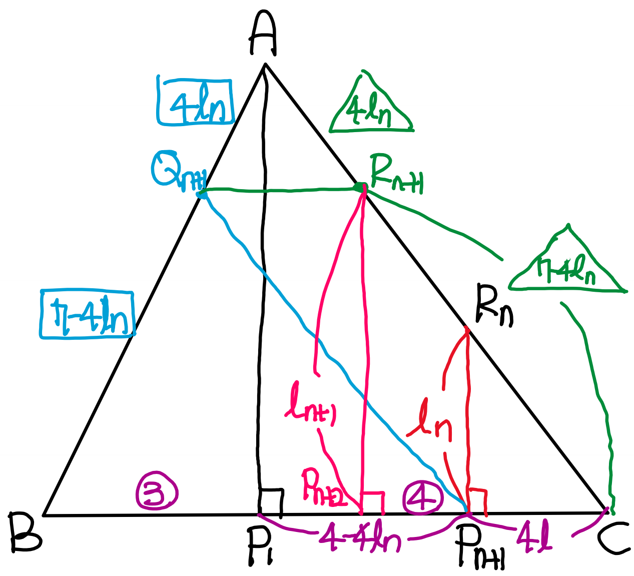
선분 R_nP_{n+1}의 길이를 l_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $l_{n+1}=pl_n+q$가 성립한다. l_1+p+2q의 값은?

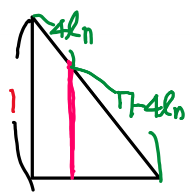
$\therefore l_1=\frac{3}{7},\ p=-\frac{4}{7},\ q=1$

$\Rightarrow$ (준식) $=\frac{13}{7}$



$l_1=\frac{3}{7}$





$\Rightarrow l_{n+1}=\frac{7-4l_n}{7}\times 1$

$=-\frac{4}{7}l_n+1$