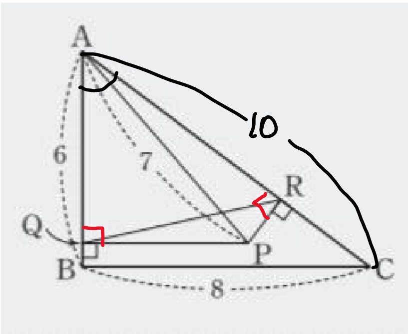
2020년 7월 21일 화요일 오전 1:22

04. 사인법칙과 코사인법칙

1. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$이고 $\angle ABC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 내부에 $\overline{AP}=7$인 점 P가 있다. 점P에서 선분AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분CA에 내린 수선의 발을 R라 할 때, 선분 QR의 길이는?



□AQPR : 내접사각형 ($2R=\overline{AP}=7$)

$\overline{QR}=2R\sin A=7\times\frac{4}{5}=\frac{28}{5}$

A+B+C=π

2. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분BC의 길이를 구하시오.

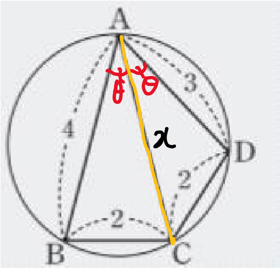
(가) $\sin A\times\sin(B+C)=\frac{9}{25}$
(나) 반지름의 길이가 10인 원에 내접한다.

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A,$

$\sin^2 A=\frac{9}{25},\ \sin A=\frac{3}{5}\ (0<A<\pi)$

$\overline{BC}=2R\sin A=12$

3. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=2$, $\overline{DA}=3$인 사각형 ABCD가 원에 내접할 때, 선분 AC의 길이는?



• 각이 같다 ; sin, cos 도 같다

$$\cos\theta = \frac{x^2+12}{8x} = \frac{x^2+5}{6x}$$

△ABC　　△ACD

$\Rightarrow 4x^2+20=3x^2+36$,

$x=4\ (>0)$

4. 삼각형 ABC가

$$3\overline{AB}+3\overline{CA}^2=3\overline{BC}^2+2\times\overline{AB}\times\overline{CA}$$

를 만족시킬 때, tan(∠CAB)의 값은?

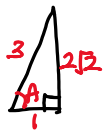
∠A를 구하시오

모양이 cos정리

; $3c^2+3b^2-2bc=3a^2$ (조건)

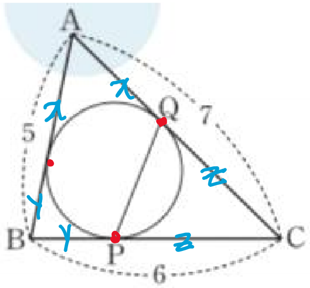
$c^2+b^2-2bc\cdot\cos A=a^2$ (cos정리)

$\Rightarrow 2\cos A=\frac{2}{3}$, $\cos A=\frac{1}{3}$,



; $\tan A=2\sqrt{2}$

5. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 BC와 만나는 점을 P, 선분 CA와 만나는 점을 Q라 할 때, 선분PQ의 길이는?



$$+\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$$

$x+y+z=9$, $x=2, y=3, z=4$

$\cdot \cos C = \dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7} = \dfrac{5}{7}$,

$\overline{PQ}^2 = 32-32\cdot\dfrac{5}{7} = \dfrac{64}{7}$

$\therefore \overline{PQ} = \dfrac{8}{\sqrt{7}}$

6. 삼각형 ABC가

$A+B+C=\pi$

$$\cos^2(A+B)+(\sin A+\cos B)(\sin A-\cos B)=0$$

을 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

① 정삼각형
② $a=b\neq c$인 이등변삼각형
③ $\angle A=90°$ 인 직각삼각형
④ $\angle B=90°$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle C=90°$ 인 직각삼각형

$\cos^2(A+B) = (-\cos C)^2 = \cos^2 C$,

(준식) ; $\cos^2 C+\sin^2 A-\cos^2 B=0$

이걸로 알수가 없는...

; $c^2+s^2=1$ 이용

; $1-\sin^2 C+\sin^2 A-1+\sin^2 B=0$,

$\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B$

sin의 비는 대변의 비

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2$, $\angle C=\dfrac{\pi}{2}$

cf) $\underbrace{4R^2\sin^2 C}_{=c^2} = \underbrace{4R^2\sin^2 A}_{=a^2} + \underbrace{4R^2\sin^2 B}_{=b^2}$

7. 삼각형 ABC가

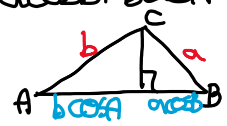
$$a\cos B = b\cos A + c$$

를 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

• cos제1정리

: $a\cos B + b\cos A = c$



$\Rightarrow a\cos B = 2b\cos A + a\cos B$,

$\cos A = 0$

$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Rightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} + c$,

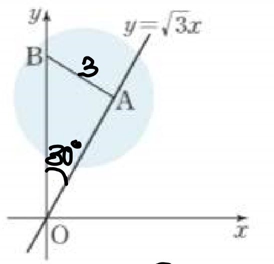
$a^2+c^2-b^2 = b^2+c^2-a^2+2c^2$,

$2a^2 = 2b^2+2c^2$

8. 그림과 같이 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 제1사분면의 점 A와 y좌표가 양수인 y축 위의 점 B가 있다. $\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$를 만족시키는 좌표평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AB}=3$일 때, 선분 $\overline{OP}$의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

→ 외심

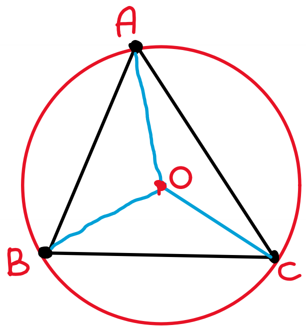
$=R$



$2R = \frac{3}{\sin 30^\circ} = 6$

$\overline{OP} = R = 3$

cf)



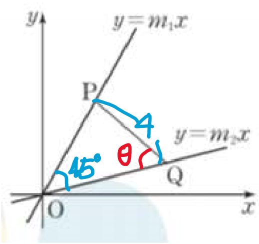
O가 외심

$\Leftrightarrow \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

9. 두 양수 m_1, m_2에 대하여 그림과 같이 직선 $y=m_1x$ 위의 제1사분면의 점P와 직선 $y=m_2x$ 위의 제1 사분면의 점Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 $y=m_1x$, $y=m_2x$가 이루는 예각의 크기는 $45°$이다. (나) $\overline{PQ}=4$

선분 OP의 길이의 최댓값이 M일 때, M^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



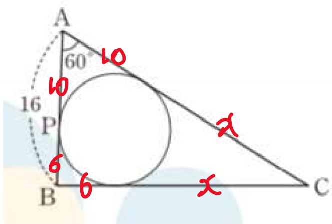
$$\frac{\overline{OP}}{\sin\theta} = \frac{4}{\sin 45°} = 4\sqrt{2} = 2R$$

$$\overline{OP} = 4\sqrt{2}\sin\theta \le 4\sqrt{2}$$

(등호: $\theta = \frac{\pi}{2}$)

$\boxed{\therefore 32}$

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=16$이고, $\angle BAC=60°$인 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 AB와 만나는 점을 P라 하자. 점 P가 선분 AB를 $5:3$으로 내분하는 점일 때, 선분BC의 길이는?



∠A, cos정리

; $16^2 + (10+x)^2 - 1\cdot16\cdot(10+x) = (6+x)^2$

$\Rightarrow 160 - 8x = 0$,

$x = 20$

$\therefore \overline{BC} = 20+6$

$= \underline{26}$

11. 넓이가 $8\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 4인 원에 내접할 때, $\sin A \times \sin B \times \sin C$의 값은?

$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$\left(=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{(2R\sin A)}_{=a}\cdot\underbrace{(2R\sin B)}_{=b}\cdot\sin C\right)$

$8\sqrt{3}=32\times(\text{준식})$

$\boxed{\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}}$

12. 넓이가 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)	$\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=35$
(나)	$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=10$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이와 내접원의 반지름의 길이의 합은?

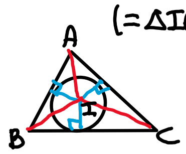
- $S=\frac{abc}{4R}$

$\left(=\frac{1}{2}ab\cdot\underbrace{\frac{c}{2R}}_{=\sin C}\right)$

$\Rightarrow \frac{35}{4}=\frac{5}{2}\sqrt{3},\ R=\frac{7}{2\sqrt{3}}$

- $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$(=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA)$

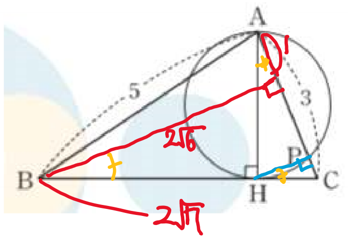


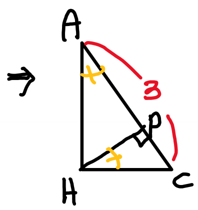
$\Rightarrow \frac{1}{2}r\,10=\frac{5}{2}\sqrt{3},$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\boxed{\therefore \frac{5}{3}\sqrt{3}}$

13. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$이고, $\cos(\angle CAB)=\frac{1}{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분AH를 지름으로 하는 원이 선분AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 할 때, 선분AP의 길이는?





- $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{17}}$
- $\sin x = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\overline{AP} = 3\cos^2 x$

$= \frac{18}{17}$

05. 등차수열과 등비수열

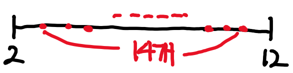
1. 2와 12 사이에 k개의 수를 넣어 만든 수열

$$2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k,\ 12$$

가 이 순서대로 등차수열을 이루고 모든 수의 합이 112일 때, a_3의 값을 구하시오.

등차수열 합 $= \dfrac{\text{개수}(\text{처음}+\text{끝})}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{(k+2)(2+12)}{2} = 112,\ k=14$



$\rightarrow$ 항수 $=16$

칸수 $=15$

$\rightarrow 15d = (12-2) = 10,$

$a_3 = 2+3d = 2+\dfrac{10}{5} = 4$

2. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1 = b_1,\ a_5 = b_5 + 16$$

일 때, $a_{10} - b_{10}$의 값은?

$\boxed{\begin{matrix} a_1 - b_1 \\ a_5 - b_5 \end{matrix}}$ 꼴

모양 비슷

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 등차수열

$\Rightarrow \{a_n - b_n\}$ 도 등차수열,

$a_1 - b_1 = 0$

$a_5 - b_5 = 16$; 그 공차는 $\dfrac{16}{5-1} = 4$

$\rightarrow a_{10} - b_{10} = 0 + 4\times(10-1)$

$= 36$

3. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_5=46$, $a_{10}=21$일 때, S_n의 최댓값은?

$d = \frac{-25}{5} = -5$

☆ S_n : $a_n \ge 0$일 때 증가,

$a_n < 0$ 이면 감소

⇒ $a_n \ge 0$인 마지막 n서 최대

; $a_{14} = 21 - 5\times4 = 1$, $a_1 = 1+5\times13 = 66$

$a_{15} = 1 - 5 = -4$

⇒ S_{14}가 최대, $S_{14} = \sum_{k=1}^{14} a_k$

$= \frac{14\times(a_1+a_{14})}{2}$

$= 7\times67$

$= 469$

4. 두 수 $\log_2 2$, $\log_2 256$사이에 서로 다른 n개의 실수를 넣어 만든 등차수열

$\underbrace{\log_2 2}_{=1}, \log_2 a_1, \log_2 a_2, \log_2 a_3, \cdots, \log_2 a_n, \underbrace{\log_2 256}_{=8}$

의 모든 항의 합은 63이다. $\frac{a_3}{a_1}$의 값을 구하시오.

☆ 등비의 log ; 등차

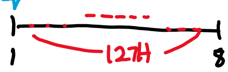
$a^{등차}$; 등비

1번 같이; 등차 합 $= \frac{개수\times(처음+끝)}{2}$

⇒ $63 = \frac{(n+2)\times 9}{2}$

⇒ $n=12$, 칸수 $=13$

☆



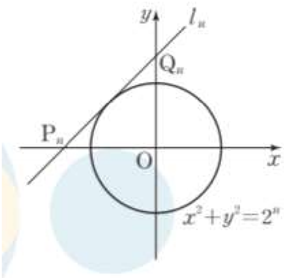
항수 $=14$

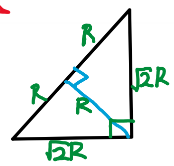
칸수 $=13$

; $d = \frac{7}{13}$, $\frac{a_3}{a_1} = 2^{\log_2 a_3 - \log_2 a_1}$

$= 2^{\frac{14}{13}}$

5. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 기울기가 1이고 원 $x^2+y^2=2^n$과 제2사분면에서 접하는 직선을 l_n, 직선 l_n과 x축 및 y축의 교점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots+\cancel{S_n}$ S_8의 값은? (단, O는 원점이다.)





: 넓이 $= R^2$

$\Rightarrow S_n = R^2 = 2^n,$

$\sum_{k=1}^{8} S_k = 2^9 - 2^1 = \underline{510}$

cf) $2^n + \cdots + 2^m = 2^{m+1} - 2^n$

; $2^n + (2^n + 2^{n+1} + \cdots + 2^m) = 2^{m+1}$

2^{n+1} 2^{n+2} - - - - 2^{m+1}