오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

의미 있는 최근 3개년 평가원, 수능 EBS 연계 내역

평가원은 매번 EBS 연계율을 70%를 유지한다고 한다. 영어나 국어면 몰라도 수학에서 이게 느껴졌는가? 아마 잘 안 느껴졌을 것이다. EBS를 제대로 다 푼 사람도 적을 뿐만 아니라 대부분 연계는 2~3점 문제에서 이루어지기에 딱히 EBS를 안 풀어도 지장이 없기 때문이다.

하지만 18학년도 수능 27번처럼 EBS가 뒤통수를 치기도 한다. 이 자료에 있는 문제들은 18학년도 수능 27번처럼 **EBS 연계가 확실히 티 나면서 정답률이 꽤 낮은 기출과 관련 EBS 연계문제**이다.

18학년도 6월 평가원 가형 28번
18학년도 6월 평가원 가형 30번
18학년도 9월 평가원 가형 21번
18학년도 수능 가형 21번
18학년도 수능 가형 27번
19학년도 9월 평가원 가형 14번
20학년도 6월 평가원 가형 19번
20학년도 6월 평가원 나형 29번
20학년도 9월 평가원 가형 17번
20학년도 수능 가형 29번
20학년도 수능 나형 28번

위 문항들이 이 자료에서 다루고자 하는 기출문제들이다. **EBS 연계문제 소개 후 관련 기출문제가 나와있는 형태이다.** N제+기출처럼 이 자료를 이용해도 되고 'EBS 연계가 이렇게 되는구나!' 느껴보는 용도로 사용해도 좋다.

'기출의 파급효과' 원고에 있는 기출 해설을 첨부하였고 EBS 연계 문제 답이나 풀이를 알고 싶은 경우 https://cafe.naver.com/spreadeffect 에 문의하면 된다.

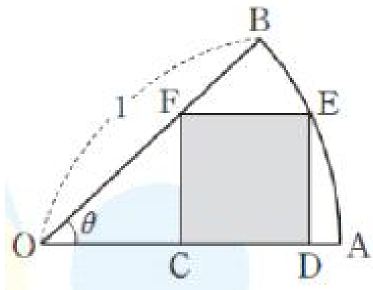
올해 21학년도 수능에서 연계 가능성이 높아 보이는 보석 같은 EBS 문제 선별도 작년, 재작년과 마찬가지로 이어 나갈 생각이다. 놓치지 않으려면 https://cafe.naver.com/spreadeffect 에 가입하거나 오르비에서 '파급효과'를 팔로우 하면 된다. **내가 대신 EBS 선별을 하여 당신들의 시간을 아껴주도록 하겠다. 지금까지 오답률 높은 기출 관련 EBS 연계를 놓쳐 본적이 없다.** 올해도 기대해도 좋다.

2021 수능특강 수1 선별좌표: https://orbi.kr/00029295119/
이미 2021 수능특강 수1은 선별을 해두었다. 나머지 과목도 '기출의 파급효과'가 모두 출시되면 할 예정이다.
좋아요, 팔로우, 카페 가입은 큰 힘이 된다.

질문은 https://cafe.naver.com/spreadeffect 에서 마음껏 받아줌.

18학년도 6월 평가원 가형 28번 EBS 연계 문항

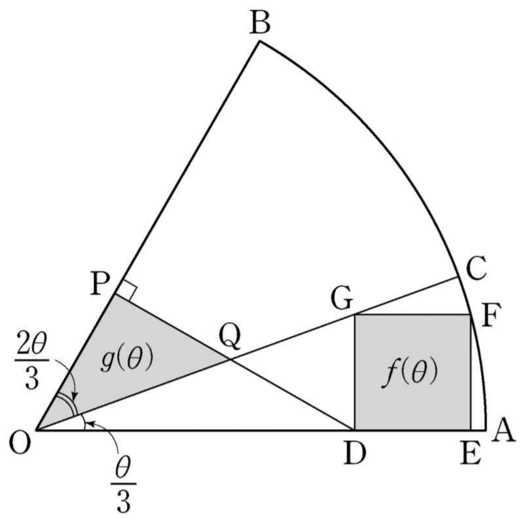
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB가 있다.
선분 OA 위의 두 점 C, D, 호 AB 위의 점 E, 선분 OB 위의 점 F를 꼭짓점으로 하는 정사각형 CDEF의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ 1　⑤ 2

18학년도 6월 평가원 가형 28번

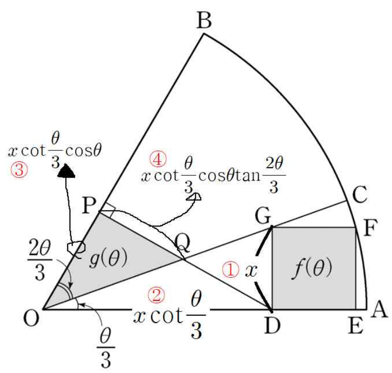
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, $\overline{OD} < \overline{OE}$이다.) [4점]



1. $f(\theta)$를 표현하기 위해 □DEFG의 한 변의 길이를 x로 두자. $\overline{\mathrm{GD}}=x$, $f(\theta)=x^2$이다.

※ 왜 뜬금없이 x를 도입하는가?
$f(\theta)$를 θ로만 표현하려고 시도하면 잘 통하지 않는다. 그래서 일단 □DEFG의 한 변의 길이를 x로 둔 것이라 보면 된다.

2. $f(\theta)$가 x에 관한 식이니 $g(\theta)$ 또한 x에 관한 식으로 표현이 될 것이라고 어느 정도 확신을 가져야 한다.
$g(\theta)$를 구하기 위해 $\triangle\mathrm{OQP}$의 넓이를 구해야 하는데 과정이 꽤나 만만치 않아 보인다.
일단 구할 수 있는 길이는 차근차근 구한 후 그림에 표시를 해보자.



$\triangle\mathrm{OGD}$를 살펴보자. $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{GD}}\cot\frac{\theta}{3}=x\cot\frac{\theta}{3}$이다.

이제 $\triangle\mathrm{ODP}$를 살펴보자. $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OD}}\cos\theta=x\cot\frac{\theta}{3}\cos\theta$이다.

마지막으로 $\triangle\mathrm{OQP}$를 살펴보자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OP}}\tan\frac{2\theta}{3}=x\cot\frac{\theta}{3}\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$이다.

따라서 $g(\theta)=\frac{1}{2}\times x\cot\frac{\theta}{3}\cos\theta\times x\cot\frac{\theta}{3}\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$이다.

3. $\dfrac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}$의 식을 정리한 후에 극한을 취해주자.

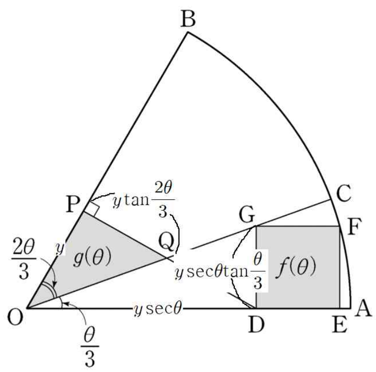
$$\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\frac{x^2}{\theta\times\frac{1}{2}\times x\cot\frac{\theta}{3}\cos\theta\times x\cot\frac{\theta}{3}\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}}=\frac{2\times\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\times\cos^2\theta\times\tan\frac{2}{3}\theta}\text{ 이다.}$$

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{2\times\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\times\cos^2\theta\times\tan\frac{2}{3}\theta}$는 $\frac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분자, 분모의 0의 차수가 2이다. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{2 \times \tan^2 \frac{\theta}{3}}{\theta \times \cos^2\theta \times \tan\frac{2}{3}\theta} = 2\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan^2 \frac{\theta}{3}}{\theta \times \tan\frac{2}{3}\theta} = \frac{1}{3}$$

따라서 $k = \frac{1}{3}$이므로 $60k = 20$이다. **답은 20!!**

※ 다른 풀이



$\overline{OP} = y$로 두면 $\overline{PQ} = y\tan\frac{2\theta}{3}$, $\overline{OD} = y\sec\theta$, $\overline{GD} = y\sec\theta\tan\frac{\theta}{3}$이다.

따라서 $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{y^2 \times \sec^2\theta \times \tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta \times \frac{1}{2} \times y^2 \times \tan\frac{2\theta}{3}} = \frac{1}{3}$이다.

18학년도 6월 평가원 가형 30번, 18학년도 9월 평가원 가형 21번 EBS 연계 문항

함수 $f(x)=\int_a^x \left\{\log_2(t^4+4t+5)-2\right\}dt$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나도록 하는 서로 다른 실수 a의 개수를 구하시오. (단, a는 상수이다.)

18학년도 6월 평가원 가형 30번

실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

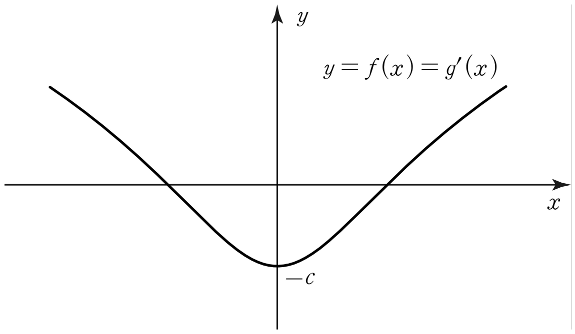
$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m \int_0^1 \lvert f(x) \rvert\,dx$

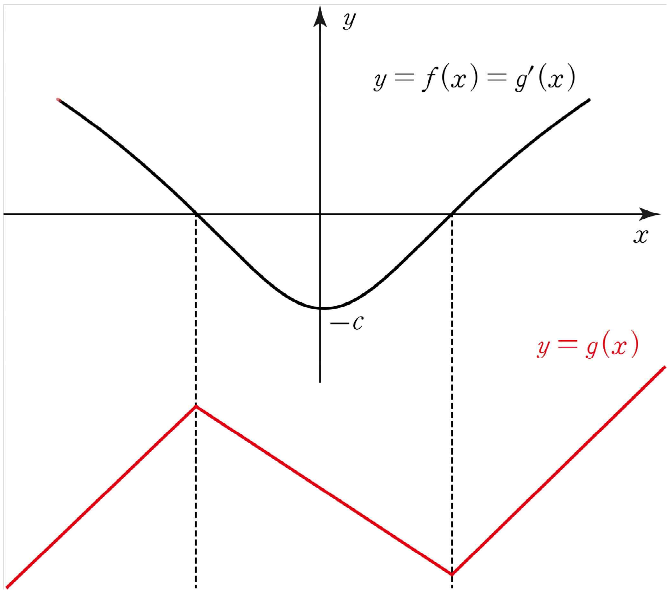
$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

1. 일단 $f(x)$ 그래프를 그린다. $f(x)$가 우함수인 점을 적극 활용한다.

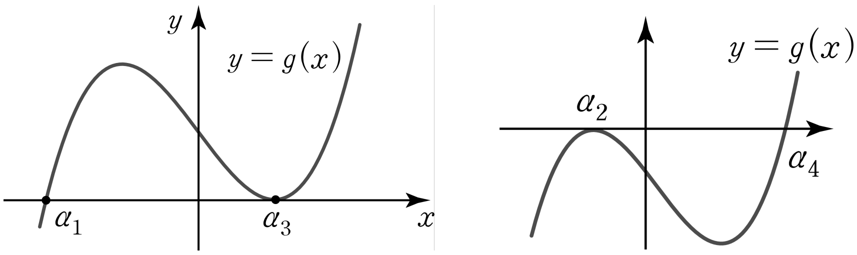


2. $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$가 친절하게 주어졌다.

미적분 기본정리 꼴이므로 반사적으로 $g'(x)=f(x)$, $g(a)=0$를 뽑아낸다.
$y=g'(x)$ 그래프를 이용하여 $y=g(x)$ 그래프 개형을 그려보자.

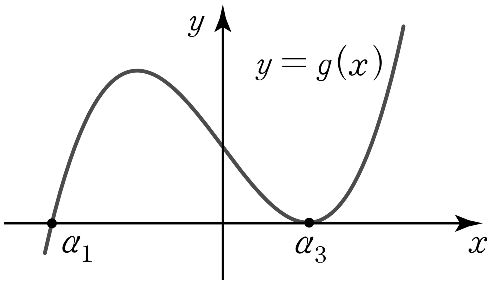


3. $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하려면 x축을 밑의 그래프와 같이 잡아야 한다.

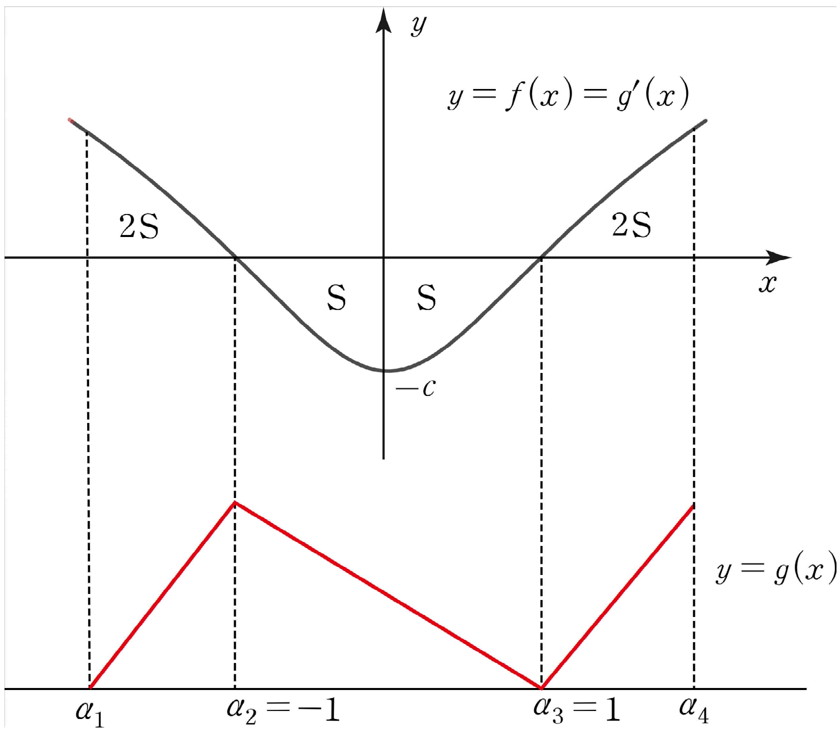


$g(a)=0$이므로 a로 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_4$가 가능하고 $m=4$이다.

4. $a=\alpha_1$ 일 때, $y=g(x)$ 의 그래프는 밑과 같다.



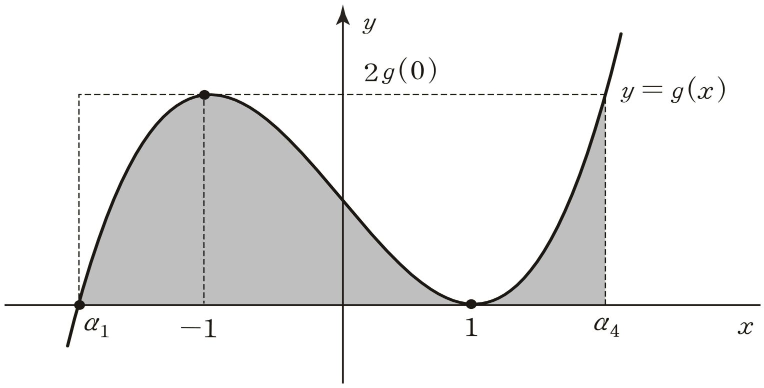
$y=g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로 $\alpha_3=1$이다.



$y=f(x)$에서 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_4$는 위 그래프와 같이 표시된다.

$f(1)=\ln 2-\mathrm{C}=0$ 이므로 $\mathrm{C}=\ln 2$이다.

5.



$f(x)$가 우함수이므로 $g(x)$는 $(0,\, g(a))$ 점대칭 함수이다. 따라서 $\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx$ 는 밑변이 $\alpha_4-\alpha_1$이고 높이가 $g(0)$인 직사각형 넓이로 표현할 수 있다.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx = k\alpha_4\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

$$(\alpha_4-\alpha_1)\times g(0) = k\alpha_4\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 -g'(x)dx = -g(1)+g(0) = g(0)$$

$$2\alpha_4\times g(0) = k\alpha_4 g(0)$$

$$k=2$$

$mk\times e^c = 4\times 2\times e^{\ln 2} = 16$이므로 답은 16!!

18학년도 9월 평가원 가형 21번

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = -1$, $a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}}$ $(n \geq 2)$이다. 구간 $[-1, 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 $f(x) = \sin(2^n \pi x)$ $(a_n \leq x \leq a_{n+1})$이다. $-1 < \alpha < 0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx = 0$을 만족시키는 $t(0 < t < 2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$의 값은? [4점]

① -48 ② -50 ③ -52 ④ -54 ⑤ -56

1. 수열 a_n에 쫄지 않고 정의역 구간을 나누어 $f(x)$ 식을 구하면 다음과 같다.

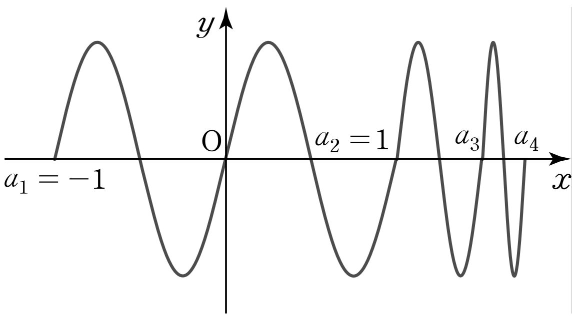
$a_1 \leqq x \leqq a_2$ (즉, $-1 \leqq x \leqq 1$)일 때, $f(x) = \sin 2\pi x$

$a_2 \leqq x \leqq a_3$ (즉, $1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$)일 때, $f(x) = \sin 2^2 \pi x$

$a_3 \leqq x \leqq a_4$ (즉, $\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{7}{4}$)일 때, $f(x) = \sin 2^3 \pi x$

⋮

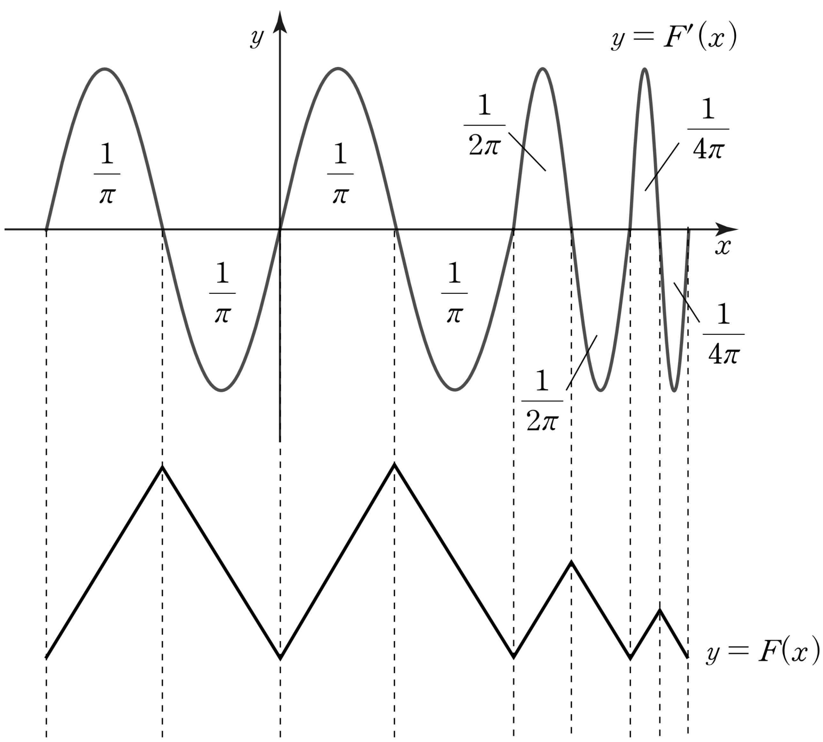
$f(x)$의 그래프를 그려보자.



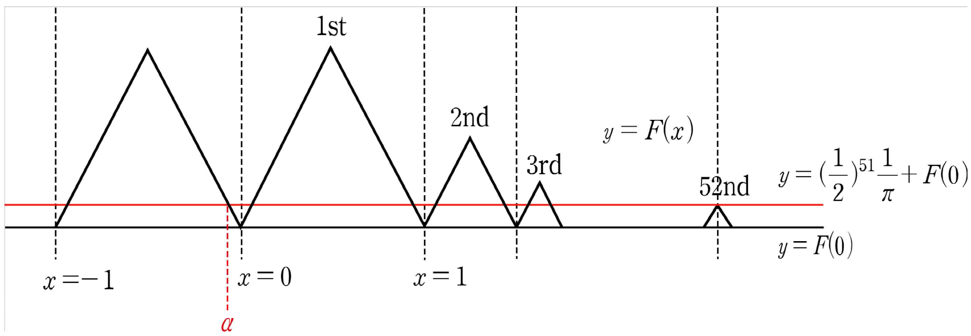
2. $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx = 0$ 미적분 기본정리 꼴이 보이므로 $F(x) = \int_{\alpha}^{t} f(x)dx$로 두자.

$F(\alpha) = 0, F'(x) = f(x)$ 조건도 까먹지 말고 뽑아내자.

이제 $F'(x)$ 그래프를 이용하여 $F(x)$ 그래프 개형을 그려보자.



3.



52번째 봉우리에서 $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx=0$을 만족시키는 $t(0<t<2)$의 값의 개수가 103이다.

$y=F(\alpha)$와 $y=F(0)$의 높이 차이를 이용해 식을 세우자.

52번째 봉우리 높이가 $\frac{1}{2^{51}\pi}$이므로 $F(\alpha)-F(0)=\frac{1}{2^{51}\pi}$

$-1<\alpha<0$이므로 이 구간에서 $f(x)=\sin 2\pi x$이다.

$F(\alpha)-F(0)=-\int_{\alpha}^{0} f(x)dx=-\int_{\alpha}^{0}\sin 2\pi x dx=\frac{1}{2\pi}[\cos 2\pi x]_{\alpha}^{0}=\frac{1}{2\pi}(1-\cos 2\pi\alpha)$

$\frac{1}{2\pi}(1-\cos 2\pi\alpha)=\frac{1}{2^{51}\pi}$

$1-\cos 2\pi\alpha=\frac{1}{2^{50}}$

$\log_2(1-\cos 2\pi\alpha)=-50$

답은 ②!!

18학년도 수능 가형 21번 EBS 연계 문항

함수 $f(x)=(x+1)^2$이다. 0 이상의 실수 a에 대하여 모든 실수 x에서 x에 대한 부등식 $|f(x)-a|+a \geq kx$를 만족시키는 실수 k의 최댓값을 $g(a)$라 하자.

$\int_0^9 g(a)da = \frac{q}{p}+2\ln 2$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

18학년도 수능 가형 21번

양수 t에 대하여 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은? [4점]

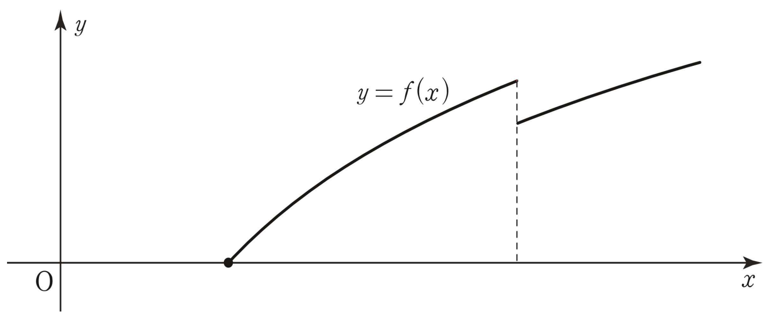
① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$ ④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

1. 문제 읽으면서 **양수 t, 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수** $f(x)$부터 먼저 제대로 표시!!

문제를 더 읽어 보니 x, t, a가 나오고, $f(x), g(x), h(t)$가 나오니 정신을 차릴 수 없다.
따라서 **킬러 같은 경우 문제를 한꺼번에 다 읽고 풀려고 하지 말고 한 문장씩 끊어가면서 해줄 수 있는 행동을 취해야 한다.**
말로 된 조건을 수식으로 표현한다든지, **수식으로 된 조건을 말로 풀어** 생각해본다든지. **그래프 그리기** 등등을 꼭 해줘야 한다.

2. 이에 따라 $f(x)=\begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e) \end{cases}$ 를 보면 먼저 $f(x)$ 그래프부터 그리자.
x와 t가 섞여 있다. $f(x)$는 x에 관한 식이기에 여기서 t는 상수 역할이다.

$f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



3. 박스 안 조건까지 읽었다. $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$로 다루는 건 너무 불편하다.
$\begin{cases} g(x) \le f(x) & (1 \le x < e) \\ g(x) \ge f(x) & (x \ge e) \end{cases}$로 바꾸고 난 후에 문제를 풀어나가자.

일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값 $h(t)$라고 한다. 아하! **$h(t)$에게는 $f(x), g(x)$와는 다르게 t가 상수가 아닌 변수이다.**

문제에 대한 감을 더 잡기 위해 t에 구체적인 값을 넣어가며 $f(x)$를 그려보고
$\begin{cases} g(x) \le f(x) & (1 \le x < e) \\ g(x) \ge f(x) & (x \ge e) \end{cases}$조건과 기울기가 최소가 될 수 있도록 하는 $g(x)$를 그려보자.

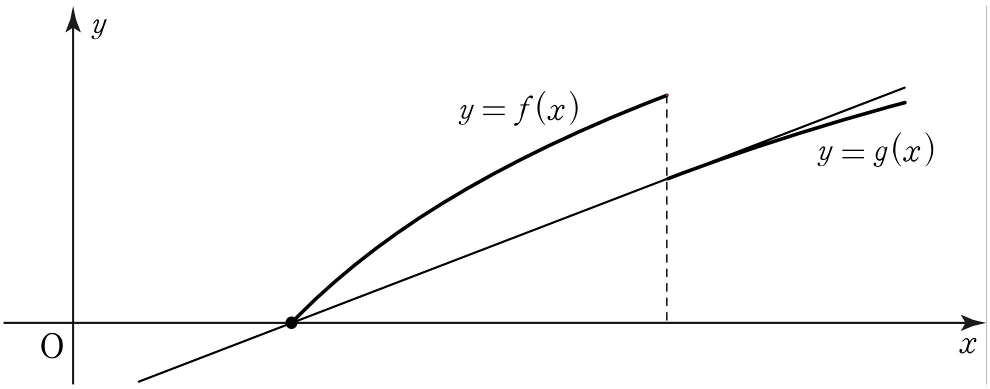
그림을 계속 그려가다 보면 조건들을 만족시키며 **기울기가 최소가 되는 $g(x)$는 t에 관계없이 $(1, 0)$을 지나야 한다**는 사실을 알 수 있다.

4. 이제 $h(t)$에 대해 파악해 보자. 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값이 $h(t)$이다.

이전 기출들을 통해 '$g(x)$와 $f(x)$가 접하면 되겠네!'가 떠올랐을 것이다.
하지만 유의할 점이 있다. t의 값에 따라 접선이 안 그려질 수 있다.

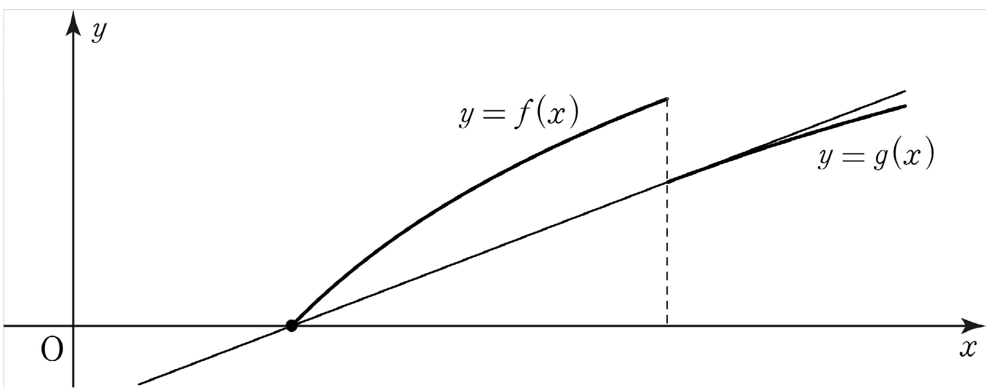
아까 전에 그림을 t를 바꿔가며 여러 번 그래프를 그려보면서 깨달아야 하는 점은 **t가 너무 작으면 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x\geq e)$에 그은 접선이 존재하지 않는다는 점**이다.

접선이 처음 생기는 시점은 $y=-t+\ln x\ (x\geq e)$위의 $(e,\ -t+1)$에서의 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때이다. 이 때 $t=\dfrac{1}{e}$이다.



따라서 **$h(t)$는 $t=\dfrac{1}{e}$를 기준으로 정의역을 두 구간으로 나누어 식을 세워야 한다.**

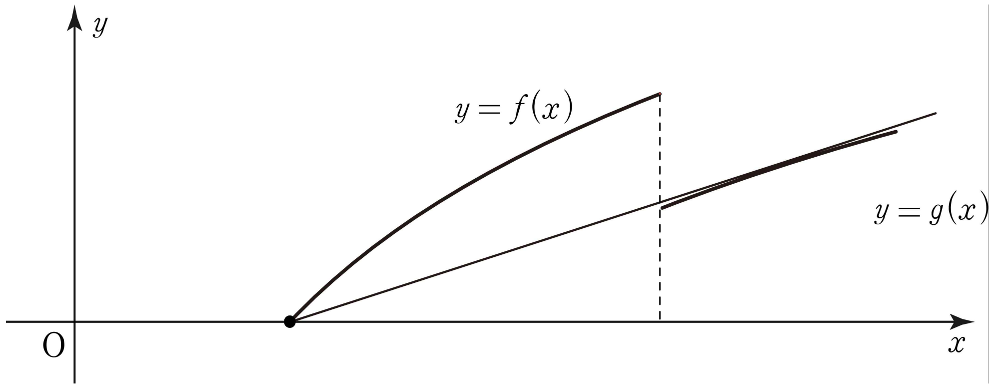
5. $t<\dfrac{1}{e}$일 때, 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값을 갖기 위해서는
$g(x)$가 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$을 지나야 한다.



따라서 $h(t)=\dfrac{-t+\ln e}{e-1}=\dfrac{-t+1}{e-1}\ (t<\dfrac{1}{e})$

6. $t \geq \frac{1}{e}$일 때, 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값을 갖기 위해서는

$g(x)$가 점 $(1,0)$에서 $y=-t+\ln x\ (x \geq e)$에 그은 접선이어야 한다.



$h(t)$에 관한 식을 써야하는데 t로 표현하기 좀 까다롭다.

뭔 걱정인가? 매개변수 잡자. **접점의 x좌표를 k라 하자.**

$f'(x)=\frac{1}{x}\ (x \neq e)$이므로 $x=k$에서 $f'(k)=\frac{1}{k}$이다.

$h(t)=f'(k)=\frac{1}{k}\ (t \geq \frac{1}{e})$이다. 매우 간편하지 않은가?

$h(t)$의 식이 t로 나오지 않아 불편한가? 이과라면 그런 생각을 버려라.

대신 t, k의 관계를 나타내는 식을 써줘야 한다.

접점 $(k, \ln k - t)$에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{k}(x-k)+\ln k - t$이다.

점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $t=\ln k+\frac{1}{k}-1$이다.

결론적으로 $h(t)=\frac{1}{k}\ (t \geq \frac{1}{e})$, $t=\ln k+\frac{1}{k}-1\ (t \geq \frac{1}{e})$을 같이 써주면 CLEAR.

7. 이제 드디어 마지막 문장을 읽자!

$h(a)=\frac{1}{e+2}$을 만족하는 상수 a가 있고 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)$을 구하란다.

$h'\left(\frac{1}{2e}\right)$는 일단 쉽다. $\frac{1}{2e}<\frac{1}{e}$이므로 $h(t)=\frac{-t+1}{e-1}\ (t<\frac{1}{e}), h'(t)=\frac{-1}{e-1}\ (t<\frac{1}{e})$.

$h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$

$h'(a)$은 구하기 좀 까다롭다. 상수a를 직접 구하기에는 너무 복잡하다.

$h(t)=\frac{-t+1}{e-1}\ (t<\frac{1}{e})$는 감소함수이고 $h(a)=\frac{1}{e+2}<\frac{1}{e}=h\left(\frac{1}{e}\right)$이다.

따라서 $a \geq \frac{1}{e}$이므로 $h(t)=\frac{1}{k}\ (t \geq \frac{1}{e})$, $t=\ln k+\frac{1}{k}-1$를 이용해야 한다.

$h(t)=\frac{1}{k}\,(t \geq \frac{1}{e})$에 의하면 $t=a$일 때, $k=e+2$이다.

$h'(a)=\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=a}=\left.\frac{dh(t)}{dk}\times\frac{dk}{dt}\right|_{t=a}$ 를 이용해보자.

$\left.\frac{dh(t)}{dk}\right|_{t=a}=\left.\frac{dh(t)}{dk}\right|_{k=e+2}=\left.\frac{-1}{k^2}\right|_{k=e+2}=\frac{-1}{(e+2)^2}$이다.

$\left.\frac{dt}{dk}\right|_{t=a}=\left.\frac{dt}{dk}\right|_{k=e+2}=\left.\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\right|_{k=e+2}=\left.\frac{k-1}{k^2}\right|_{k=e+2}=\frac{e+1}{(e+2)^2}$

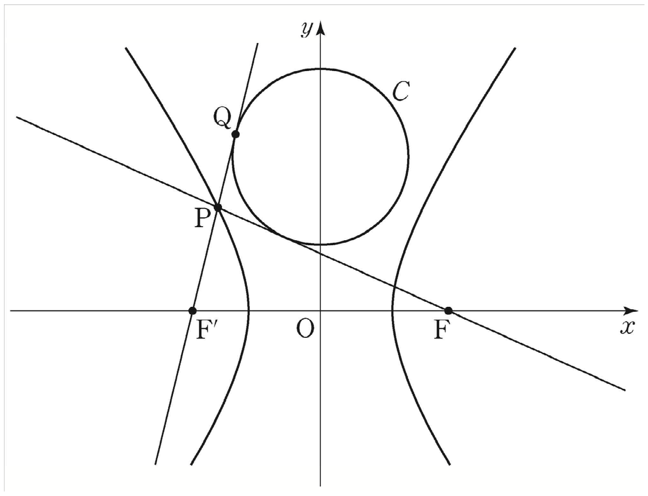
$\left.\frac{dk}{dt}\right|_{t=a}=\frac{1}{\left.\frac{dt}{dk}\right|_{t=a}}=\frac{(e+2)^2}{e+1}$이다.

따라서 $h'(a)=\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=a}=\left.\frac{dh(t)}{dk}\times\frac{dk}{dt}\right|_{t=a}=\frac{-1}{(e+2)^2}\times\frac{(e+2)^2}{e+1}=\frac{-1}{e+1}$이다.

결론적으로 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\frac{-1}{e-1}\times\frac{-1}{e+1}=\frac{1}{(e-1)(e+1)}$ 답은 ④!!

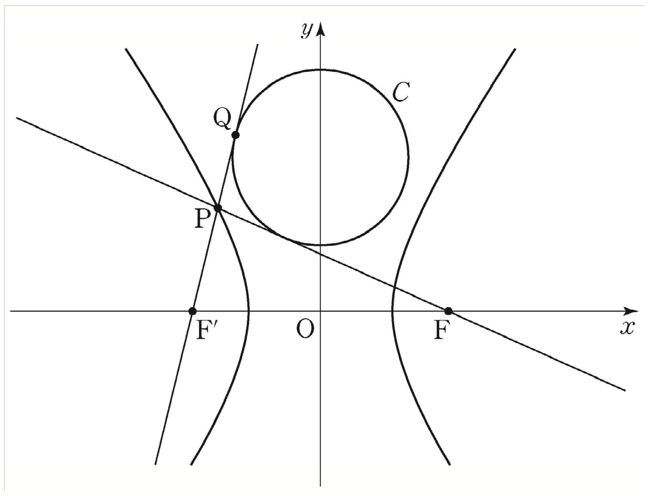
18학년도 수능 27번 EBS 연계 문항

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(-c,\ 0), \mathrm{F}'(c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$ 과 원 $x^2+(y-a)^2=1$이 있다. 점 F'에서 원에 그인 접점 중 제2 사분면에 있는 접점을 Q라 하고, 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{Q}$와 쌍곡선이 만나는 점을 P라 하자. 직선 FP가 원에 접할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오. (단, $a>1$) [4점]



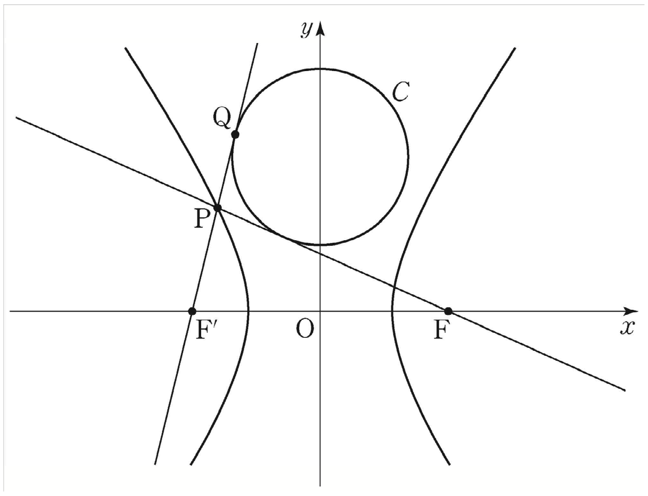
18학년도 수능 27번 EBS 연계 문항

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(-c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$ 과 원 $x^2+(y-a)^2=1$이 있다. 점 F'에서 원에 그인 접점 중 제2 사분면에 있는 접점을 Q라 하고, 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{Q}$와 쌍곡선이 만나는 점을 P라 하자. 직선 FP가 원에 접할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오. (단, $a>1$) [4점]

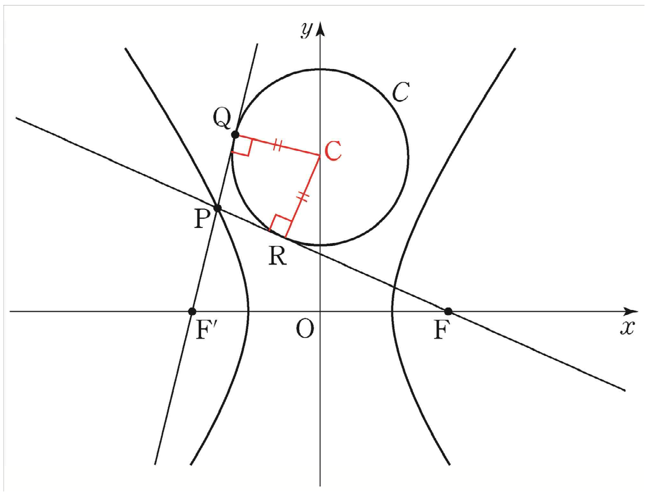


18학년도 수능 27번

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$) [4점]



1. 18학년도 수능에서 수험생들을 힘들게 한 대표적 문제 중 하나이다. 나도 고통 받았다. 하지만 '꼭 표시해야 할 도형적 요소'에 충실히 한다면 어려운 문제가 아니다.



원 C의 중심 C를 꼭 그려주자. 그림을 보니 새 부리를 닮은 내접원 꼴이 보인다. 반사적으로 **원 C의 중심과 접점 R, 접점 Q를 각각 이어주고** 직각 표시를 해주자. 쌍곡선을 확인해보니 초점 F, F′이 모두 표시되어 있고 쌍곡선 정의 관련 보조선인 $\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$도 모두 잘 표시되어 있다. 이 상태에서 길이 관련 조건을 뽑아내어 보자.

$\overline{\mathrm{F'P}} = x$로 두면 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{FP}} = x + 4\sqrt{2}$로 둘 수 있다.

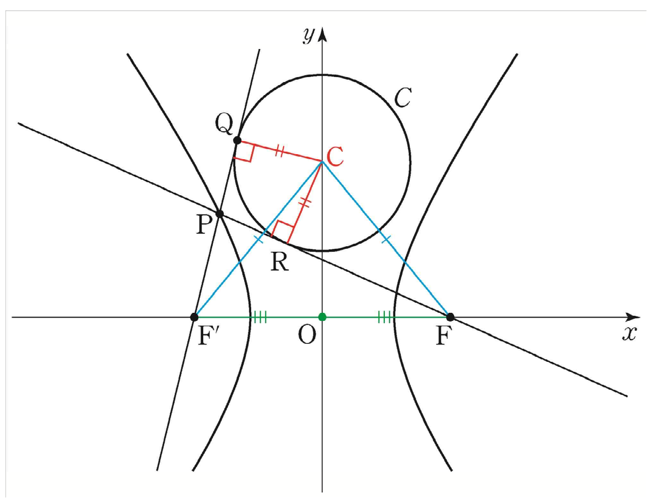
$\overline{\mathrm{F'Q}} = 5\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{F'Q}} - \overline{\mathrm{F'P}} = 5\sqrt{2} - x$이다. **새 부리를 닮은 내접원 꼴에서 $\triangle\mathrm{CPQ} \equiv \triangle\mathrm{CPR}$임을 이용하면 $\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{PQ}} = 5\sqrt{2} - x$이다.**

※ **새 부리에 해당하는 $\overline{\mathrm{PC}}$를 그어주는 이유는 $\triangle\mathrm{CPQ} \equiv \triangle\mathrm{CPR}$임을 발견하기 위해서**인데 연습을 많이 하면 $\overline{\mathrm{PC}}$를 굳이 긋지 않아도 이를 발견할 수 있기에 나는 현장에서는 긋지 않았다. **$\triangle\mathrm{CPQ} \equiv \triangle\mathrm{CPR}$ 발견이 쉽지 않다면 $\overline{\mathrm{PC}}$를 꼭 그어라!**

2. $\overline{\mathrm{FR}}$을 x에 관한 식으로 표현하여 $\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{FR}} + \overline{\mathrm{RP}}$를 이용하면 끝날 것 같은데 쉽지 않다.

문제에 있는 조건을 모두 사용한 것 같은데 무엇을 놓쳤을까?

딱 하나 남았다. 바로 $\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OF'}}$에 의한 대칭성이다! $\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OF'}}$을 그림에 표시해 주자.



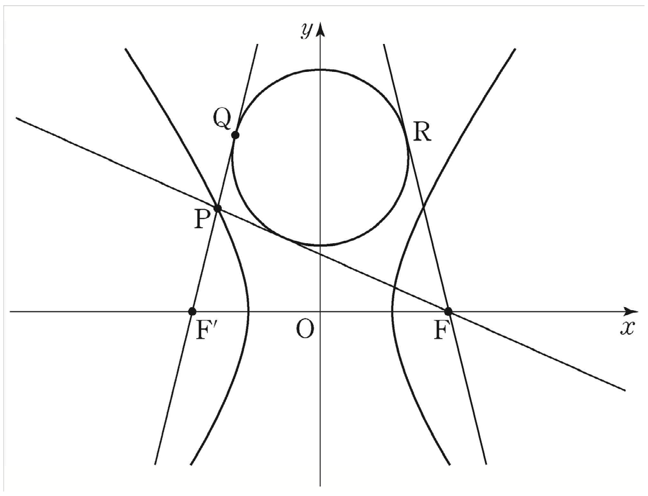
그림과 $\overline{\mathrm{FR}}$ 에 집중하자. **새 부리 부분을 보니** $\overline{\mathrm{CQ}} = \overline{\mathrm{CR}}$,

$\angle \mathrm{CQF'} = \angle \mathrm{CRF} = \frac{\pi}{2}$ 표시가 눈에 들어온다. 여기에서 **'$\overline{\mathrm{FR}} = \overline{\mathrm{F'Q}}$의 길이가 같지 않을까?' 하는 합리적 의심이 든다.** $\triangle \mathrm{CQF'} \equiv \triangle \mathrm{CRF}$ 라면 분명 가능한 이야기이다.

그래서 $\overline{\mathrm{CF}}$, $\overline{\mathrm{CF'}}$를 선으로 이어보았다. 그랬더니 $\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OF'}}$을 보고 $\overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{CF'}}$임이 바로 보였다. 따라서 $\triangle \mathrm{CQF'}$ 와 $\triangle \mathrm{CRF}$ 가 RHS **합동이다! 의심이 확신으로 변하는 순간이다.**

$\overline{\mathrm{FR}} = \overline{\mathrm{F'Q}} = 5\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{FR}} + \overline{\mathrm{RP}} = 10\sqrt{2} - x$이다.
$\overline{\mathrm{FP}} = x + 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2} - x$이므로 $x = 3\sqrt{2}$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{F'P}} = 3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{FP}} = 7\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{FP}}^2 + \overline{\mathrm{F'P}}^2 = 18 + 98 = 116$이다. **답은 116!**

※ EBS와 대부분의 해설지는 아래와 같이 보조선을 그어 풀었다.



하지만 **내 기준으로 근본 없는 보조선이다. '꼭 표시해야 할 도형적 요소'에 속하지 않는다.** 내가 $\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OF'}}$에 의한 대칭성을 위해 $\overline{\mathrm{CF}}$, $\overline{\mathrm{CF'}}$를 선으로 이은 이유는 원의 중심 C는 '꼭 표시해야 할 도형적 요소'에 속하는 근본 있는 점이기 때문이다.

EBS 연계란 이유로 여러 해설지가 EBS 해설과 똑같이 문제를 풀어놓았다.
전혀 도움이 안 되는 의미 없는 해설이다.

comment

이 문제는 준킬러 중 EBS 연계로 매우 유명한 문제이다. 대부분의 EBS 연계는 2점, 3점, 쉬운 4점에만 해당되었기에 더욱 큰 충격이었다.
이 당시 나는 현역이었고 **EBS 연계를 체감**했다. 나는 내신으로 EBS를 무척 많이 보았기에 문제의 그림을 보았을 때 '수능완성 실전 모의고사 4회 25번'에 있는 그림이라고 바로 알아차렸다. **마음이 조금 편안했지만 그뿐**이었다. '수능완성 실전 모의고사 4회 25번'이 무슨 문제인지도 기억이 안 났고, 풀이도 당연히 기억이 전혀 나지 않았다.

나는 대칭성, 닮음을 잘 찾지 못한다. 중학교 수학을 안 했기 때문이다. 하지만 '꼭 표시해야 할 도형적 요소'만 제대로 표시하면 잘 보인다. 만약 이 문제를 못 풀었다면 EBS 탓을 하지 않았으면 한다. **이 문제의 교훈은 'EBS 연계!'가 아니다.** EBS 연계가 중요한 게 아니라 '꼭 표시해야 할 도형적 요소'에 충실한 것이 훨씬 중요하다.

오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

미안하다 이거 보여주려고 어그로 끌었다.. 기출의 파급효과 수준 ㄹㅇ실화냐? 진짜 세계관 기출 실전서다.. 그 찐따 같던 파급효과 맞나? 진짜 파급효과는 전설이다.. 진짜 옛날에 파급 EBS 선별 때부터 봤는데 오르비 저자 돼서 '기출의 파급효과'까지 쓴거 보면 감격스럽고 파급의 프로 욺창 시절이 뇌리에 스치면서 가슴이 웅장해진다.. 와 진짜 파급효과가 저렇게 되다니 진짜 눈물나려고했다.. 옛날 EBS 선별자료 만드려고 밤 새던 것도 생각나고 고딩 때 수학 때문에 고생하던 것도 생각나고 뭔가 슬프기도하고 좋기도하고 감격도하고 여러가지감정이 복잡하네.. 아무튼 파급효과는 진짜 실전서 중 최고임..

어그로 끌어서 죄송합니다.
이렇게 텐션 높은 실전서가 마음에 든다면
기출의 파급효과 다른 시리즈도 잘 맞을 것입니다.

이유는
이 원고도 기출의 파급효과 교재 '일부'이기 때문입니다.
기출로 얻을 수 있는 일관된 태도, 도구로 단시간에 수학을 뚜까패는 걸 보여드리고 싶습니다.

2월 말에 확통이 나왔고,
수2, 미적은 5월 말 ~ 6월 초, 수1은 6월 말에 '확실히' 나올 예정입니다.

구매 링크는 https://atom.ac/books/7241 입니다.
atom에서 사기 싫으면 Yes24나 교보문고 등에서도 구입 가능합니다.

https://cafe.naver.com/spreadeffect 에서는 **오르비 저자분들이 올리시는 학습자료들도. 받아볼 수 있고** 교재 인증 시 컨텐츠 질문 답변도 언제든 가능합니다.

이외에도 **검증된 우수한 컨설팅 팀 TWCG가 (유명한 헬린이 님, 도비 님이 계시는 팀)**
정리한 과거부터 현재까지 정시, 수시 입결을 확인할 수 있습니다.

질문은 https://cafe.naver.com/spreadeffect 에서 마음껏 받아줌.

19학년도 9월 평가원 가형 14번 EBS 연계 문항

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 2, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은?

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

19학년도 9월 평가원 가형 14번

실수 k에 대하여 함수

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{11}{4}$　⑤ 3

1. $f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$를 관찰하면 $\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 **괄호 안이** $\frac{\pi}{2}$ **차이**가 난다는 것을 알 수 있다. 따라서 **삼각함수 호환**으로 쉽게 바꿀 수 있다.

   $\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)=\cos^2\left\{-\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$와 같이 바꿀 수 있다.

2. $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이므로 $f(x)=-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k+1$로 바꿀 수 있다. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$를 t로 치환하면 $f(x)=-t^2-t+k+1\ (-1\le t\le 1)$이다.

   $f(x)$의 최댓값, 최솟값을 구해야 하기에 t의 범위 설정을 잊으면 절대 안 된다.

   $f(x)$는 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값을 가지며 $t=1$일 때 최솟값을 갖는다.

   $f(-\frac{1}{2})=3$이므로 $k+\frac{5}{4}=3,\ k=\frac{7}{4}$이다. 따라서 $f(1)=k-1$이므로 $m=\frac{3}{4}$이다.

   $k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$이므로 답은 ③!!

20학년도 6월 평가원 가형 19번, 나형 29번 EBS 연계 문항

15 이하의 서로 다른 네 자연수 a, b, c, d에 대하여
$a+6 \le b+4 \le c+1 \le d$를 만족시키는 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

① 480 ② 485 ③ 490 ④ 495 ⑤ 500

20학년도 6월 평가원 나형 29번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n=1, 2$일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$이다.
(나) $x_3 \leq 10$

1. 조건 (가), 조건 (나)를 보기 쉽게 간단한 식으로 정리하자.

$$4 \le x_1 + 4 \le x_2 + 2 \le x_3 \le 10$$

2. x_1을 기준으로 상황을 전개해보자.

x_1	x_2	x_2에 따라 가능한 x_3개수의 합
$x_1 = 0$	$x_2 = 2 \sim 8$	$7+6+5+4+3+2+1$
$x_1 = 1$	$x_2 = 3 \sim 8$	$6+5+4+3+2+1$
$x_1 = 2$	$x_2 = 4 \sim 8$	$5+4+3+2+1$
$x_1 = 3$	$x_2 = 5 \sim 8$	$4+3+2+1$
$x_1 = 4$	$x_2 = 6 \sim 8$	$3+2+1$
$x_1 = 5$	$x_2 = 7 \sim 8$	$2+1$
$x_1 = 6$	$x_2 = 8$	1

3. 여기에서 저걸 다 계산하는 건 너무 힘들고 $\sum_{m=1}^{7} \frac{m(m+1)}{2}$로 식을 세우고 계산하자.

답은 84!! 나중에도 언급하겠지만 제발 $\sum$식 세우는 연습 좀 하자!

이 풀이도 중복조합을 떠올리지 못한다면 충분히 도전해볼 만한 풀이이다. 규칙성이 금방 보이기 때문이다. 이제 중복조합 풀이도 보러 가자!

1. 조건 (가), 조건 (나)를 보기 쉽게 간단한 식으로 정리하자.

$$4 \le x_1 + 4 \le x_2 + 2 \le x_3 \le 10$$

2. $x_1 + 4 = x_1{}'$, $x_2 + 2 = x_2{}'$로 치환하면 아래와 같은 식으로 정리된다.

$$4 \le x_1{}' \le x_2{}' \le x_3 \le 10$$

$x_1{}'$을 4 이상 10 이하의 정수 중 하나로 정하면 x_1**은 무조건 음이 아닌 정수이다.**

$x_2{}'$을 4 이상 10 이하의 정수 중 하나로 정하면 x_2**는 무조건 음이 아닌 정수이다.**

따라서 $x_1{}', x_2{}', x_3$이 결정되면 x_1, x_2, x_3도 예외 없이 음이 아닌 정수!

3. 4에서 10까지의 **서로 다른 7개의 자연수를 중복을 허용하여 3개의 음이 아닌 정수** $x_1{}', x_2{}', x_3$**를 뽑는 것**이므로 ${}_7\mathrm{H}_3 = 84$가지이다. **답은 84!!**

20학년도 6월 평가원 가형 19번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는?

[4점]

(가) $n = 1, 2, 3$일 때, $x_{n+1} - x_n \geq 2$이다.
(나) $x_4 \leq 12$

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

1. 조건 (가), 조건 (나)를 보기 쉽게 간단한 식으로 정리하자.
$6 \le x_1 + 6 \le x_2 + 4 \le x_3 + 2 \le x_4 \le 12$

2. x_4을 기준으로 상황을 전개해보자.

x_4	x_3	x_2	x_1 개수의 합
6	4	2	(1)
7	4, 5	2, 2~3	(1)+(1+2)
8	4, 5, 6	2, 2~3, 2~4	(1)+(1+2)+(1+2+3)
9	4, 5, 6, 7	2, 2~3, 2~4, 2~5	(1)+⋯+(1+2+3+4)
10	4, 5, 6, 7, 8	2, 2~3, 2~4, 2~5, 2~6	(1)+⋯+(1+2+3+4+5)
11	4, 5, 6, 7, 8, 9	2, 2~3, 2~4, 2~5, 2~6, 2~7	(1)+⋯+(1+2+3+4+5+6)
12	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	2, 2~3, 2~4, 2~5, 2~6, 2~7, 2~8	(1)+⋯+(1+2+3+4+5+6+7)

3. 여기에서 저걸 다 계산하는 건 너무 힘들고 $\sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{m=1}^{7}\sum_{n=1}^{m} \frac{n(n+1)}{2} = 210$로
식을 세우고 계산하자. **제발 $\sum$식 세우는 연습 좀 하자! 답은 ①!!**

이 풀이도 중복조합을 떠올리지 못한다면 충분히 도전해볼 만한 풀이이다. 규칙성이 금방 보이기 때문이다. 이제 중복조합 풀이도 보러 가자!

1. 조건 (가), 조건 (나)를 보기 쉽게 간단한 식으로 정리하자.
$6 \le x_1 + 6 \le x_2 + 4 \le x_3 + 2 \le x_4 \le 12$

2. $x_1 + 6 = x_1{}'$, $x_2 + 4 = x_2{}'$, $x_3 + 2 = x_3{}'$로 치환하면 아래와 같은 식으로 정리된다.
$6 \le x_1{}' \le x_2{}' \le x_3{}' \le x_4 \le 12$
$x_1{}'$을 6 이상 12 이하의 정수 중 하나로 정하면 **x_1은 무조건 음이 아닌 정수이다.**
$x_2{}'$을 6 이상 12 이하의 정수 중 하나로 정하면 **x_2은 무조건 음이 아닌 정수이다.**
$x_3{}'$을 6 이상 12 이하의 정수 중 하나로 정하면 **x_3은 무조건 음이 아닌 정수이다.**
따라서 $x_1{}', x_2{}', x_3{}', x_4$이 결정되면 x_1, x_2, x_3, x_4도 예외 없이 음이 아닌 정수!

3. 6에서 12까지의 서로 다른 7개의 자연수 중에서 **중복을 허용하여** 4개를 뽑는 것이므로
${}_7\mathrm{H}_4 = 210$가지이다. **답은 ①!!**

20학년도 수능 가형 29번 EBS 연계문항

좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(-1, 5, 3)$을 지나는 서로 다른 두 평면 α, β가 모두 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\frac{x}{3} = \frac{1-y}{4} = -z+1$과 평행하다.
(나) 원점에서의 거리가 2이다.

두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

1. 입체의 평면화를 적극적으로 이용하여 문제에 나온 조건들이 한눈에 들어오도록 그림을 그려보자. 뒤에서도 소개하겠지만 공간도형 방정식이 주어졌다고 해서 무작정 좌표축을 그리면 안 된다.

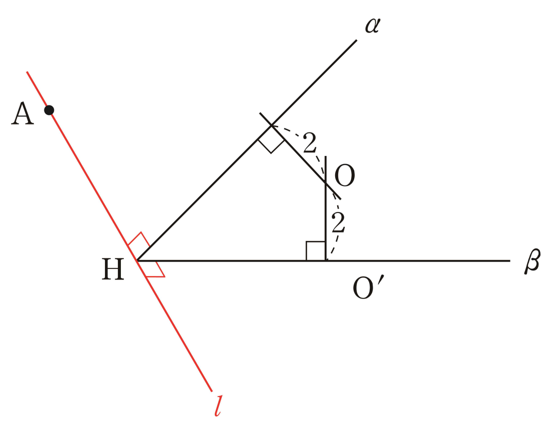
일반적으로 **주어진 직선과 평면을 공간 좌표계에 정확히 표시하기 힘들다.** 표시한다고 해도 정작 필요한 **점, 직선, 평면과의 관계를 볼 수 없는 그림**이 그려진다. 우리는 컴퓨터가 아니다. 그림은 되도록 예시 해설처럼 그리려고 노력해라.

조건을 해석해 보자. 이전에 소개했듯이 **서로 다른 두 평면은 평행하거나 만난다.** 서로 다른 두 평면이 평행하다면 교선이 생기지 않고 교점도 생기지 않는다. **서로 다른 두 평면 α, β가 점 $\mathrm{A}(-1, 5, 3)$를 지나는 것**을 보아 **두 평면은 만난다.**

서로 다른 두 평면 α, β의 교선을 직선 l이라고 하자. **교선 l은 평면 α, β와 모두에 포함된다. 교선 l과 평행한 직선들만이 평면 α, β와 모두 평행**할 수 있음을 직관적으로 알 수 있다. 따라서 직선 l은 점 A를 지나고 조건 (가)에 의해 방향벡터가 $(3, -4, -1)$임을 알 수 있다.

※ 교선 l과 평행한 직선들만이 평면 α, β와 모두 평행할 수 있음을 직관으로 알기 힘들다면 이후에 나오는 그림을 참고해라.

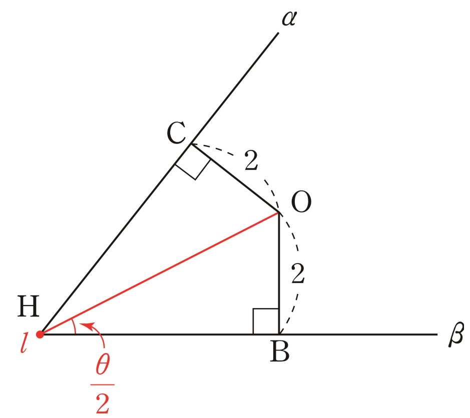
2. 이전에 구한 조건들이 그림에 모두 표현되도록 그림을 그려보자.



입체의 평면화를 적극적으로 이용하여 평면 α와 평면 β를 선분으로 압축시켰고 **직선 l은 종이를 뚫고 나오는 방향으로 그렸다.** 점 H는 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발이다.

※ **제일 하기 쉬운 실수는 점 H 위치에 점 A를 놓는 것**이다. 주의하자.

3. 점 A와 점 H가 구별되는 점임을 알았다면 **입체의 평면화 진행이 더 가능**하다.

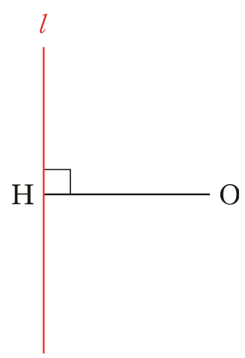


직선 l을 점 H에 압축시켰다. 다시 한번 말하지만 점 H, 점 A는 다르다. 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발은 점 C이고, 평면 β에 내린 수선의 발은 점 B이다.

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$ 이므로 점 O를 중심으로 하고 점 B, 점 C를 지나는 원을 떠올릴 수 있다.

새 부리를 닮은 내접원 꼴이어서 $\triangle \mathrm{OHB} \equiv \triangle \mathrm{OHA}$를 쉽게 발견할 수 있다.

$\angle \mathrm{OHB}$는 $\dfrac{\theta}{2}$이고 $\overline{\mathrm{OH}}$ 길이만 알면 $\sin\theta$를 구할 수 있다.



직선 l은 방향벡터가 $(3,\,-4,\,-1)$이고 점 A를 지나므로 직선 l의 방정식은

$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{5-y}{4}=-z+3$이다. $\overline{\mathrm{OH}}$ 길이는 점 O와 직선 l사이의 거리이므로 $\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$이다.

점 H는 직선 l 위의 점이므로 $(3t-1,\,-4t+5,\,-t+3)$이다.

$\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(3,\,-4,\,-1)\cdot(3t-1,\,-4t+5,\,-t+3)=26t-26=0,\ t=1$이므로 따라서 점 H의 좌표는 $(2,1,2)$이고 $\overline{\mathrm{OH}}$ 길이는 3이다.

$\triangle \mathrm{OHB}$는 직각삼각형이므로 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이다. 삼각함수의 2배각 공식을 쓰면

$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{1}{9}$이다. **답은 $\dfrac{1}{9}$!!**

comment

무작정 입체의 평면화를 시키는 것이 아니다. **필요하다면 입체를 그려 조건들을 어느 정도 파악**해야 한다.
Chapter 4부터 좌표를 본격적으로 다룰 것이다.

20학년도 수능 가형 29번

좌표공간에서 두 점 $A(3,\ -3,\ 3)$, $B(-2,\ 7,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 포함하고 구 $x^2+y^2+z^2=1$에 접하는 두 평면을 α, β 라 하자. 두 평면 α , β 와 구 $x^2+y^2+z^2=1$의 접점을 각각 C, D라 할 때, 사면체 ABCD의 부피는 $\frac{q\sqrt{3}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

20학년도 9월 평가원 가형 17번 EBS 연계문항

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다.
세 함수 $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^2-x$이다.
(나) $\int_0^1 \{g(x)\}^2 f'(x)dx = 14-\frac{38}{e}$

$\int_0^1 (2x-1)g(x)dx = p-\frac{q}{e}$일 때, 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

20학년도 9월 평가원 가형 17번

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다.
(나) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)\,dx=120$

$\int_{-1}^{1}x^3 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

1. 조건 (나)는 부분적분하기 쉬운 형태이다. 조건 (가)의 $f(x)g(x)=x^4-1$를 활용하기 위해서는 $\{f(x)\}^2$를 미분하기 쉬운 형태로 두고 $g'(x)$를 적분하기 쉬운 형태로 둬야 한다.

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2g'(x)dx=\left[\{f(x)\}^2g(x)\right]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)f'(x)dx$$

$=-2\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx=120$이다.

따라서 $\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx=-60$이다.

2. $\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx$ 또한 부분적분하기 쉬운 형태이다. $\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx$를 구하기 위해서는 x^4-1를 미분하기 쉬운 형태로 두고 $f'(x)$를 적분하기 쉬운 형태로 둬야 한다.

$$\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx=\left[(x^4-1)f(x)\right]_{-1}^{1}-4\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx$$

$=-4\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx=-60$

따라서 $\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx=15$이다. 답은 ②!!

20학년도 수능 나형 28번 EBS 연계문항

다항함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\}$

(나) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 4a$

(다) $f(2) = 8$

$f(4)$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

20학년도 수능 나형 28번

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.

(나) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 5\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 성립하는 항등식이 제시되었다.

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$

이 항등식의 경우 **식의 제시된 형태 자체에서 의미를 파악**해서 풀거나 **별도의 처리**를 통해 풀 수도 있다. 하나씩 살펴보자.

1. 식의 제시된 형태 자체에서 의미 파악

아직 정적분 파트를 들어가기 전이지만, 이 문제에서 정적분은 그다지 중요한 요소는 아니다.

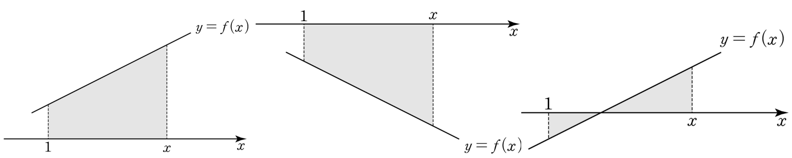
$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$에서

(좌변): $\int_1^x f(t)dt \rightarrow$ 함수 $y=f(x)$의 1부터 x까지의 정적분을 의미한다.

(우변): $\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\} \rightarrow$ 좌변과 달리, 우변은 보자마자 의미를 파악하기가 힘들다. 별도의 처리를 해야 하는 건 아닌가 싶기도 하다. 그러나 항상 '관찰'이 우선이다. 우변을 잘 관찰하면 좌변의 적분 구간과 겹치는 1, x가 많이 등장하는데, 이는 절대로 우연의 일치가 아니다.

태도: '공통부분'은 반드시 출제 의도와 연결된다.

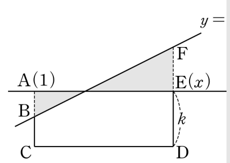
표현이 정확하지는 않지만, **우변은 바로 '사다리꼴' 모양의 정적분을 표현한 식이고, $f(x)$는 일차함수이다.**



첫 번째와 두 번째 그림의 경우 $\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$의 좌, 우변이 모두 사다리꼴의 '정적분'을 표현한 식임을 쉽게 이해할 수 있다.

그렇다면 세 번째 그림에서는 어떻게 $\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$가 성립할 수 있을까?

오른쪽과 같이 사다리꼴 모양을 직접 만들어주면 된다.



$$\int_1^x f(t)dt = (\text{사다리꼴 BCDF의 넓이}) - (\text{사각형 ACDE의 넓이})$$

$$= \frac{x-1}{2}[\{k+f(1)\}+\{k+f(x)\}]-k(x-1)$$

$$= (x-1)\left\{\frac{f(x)+f(1)}{2}\right\}$$

따라서 $f(x)$는 일차함수이다. $f(0)=1$이므로 $f(x)=ax+1\ (a\neq 0)$로 식을 세울 수 있다.

아직 쓰지 않은 조건 (나)를 이용하여 a를 찾아내자.

(나) $\int_{0}^{2} f(x)dx = 5\int_{-1}^{1} xf(x)dx$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{2} (ax+1)dx = 5\int_{-1}^{1} x(ax+1)dx$

$\int_{-1}^{1} x(ax+1)dx$의 적분 구간 위끝과 아래끝은 $x=0$에 대해 대칭이고,

$y=ax^2$은 우함수, $y=x$는 기함수이므로 $\int_{-1}^{1} ax^2dx = 2\int_{0}^{1} ax^2dx$, $\int_{-1}^{1} xdx = 0$

따라서 $5\int_{-1}^{1} x(ax+1)dx = 10a\int_{0}^{1} x^2\,dx$이다.

※ 이 내용은 〈Chapter 8. 정적분의 활용〉에서 자세히 배운다.

$\int_{0}^{2} (ax+1)dx = 5\int_{-1}^{1} x(ax+1)dx$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{2} (ax+1)dx = 10a\int_{0}^{1} x^2dx$

$\Leftrightarrow \left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2 = 10a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$\Leftrightarrow 2a+2 = \frac{10}{3}a$

$a=\frac{3}{2}$이므로 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$ $\quad \therefore f(4)=7$

답은 7!!

오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

2020 파급효과 칼럼 모음

앞으로 공부를 어떻게 해야할까?: https://orbi.kr/00029642317/

20년 3월 교육청 가형 손해설지: https://orbi.kr/00029634857/

20년 3월 교육청 나형 손해설지: https://orbi.kr/00029635025/

2021 수능특강 수1 선별좌표: https://orbi.kr/00029295119/

왜 라디안을 쓸까? (노베용): https://orbi.kr/00028479675/

삼각함수 값 실수없이 구하기(노베용): https://orbi.kr/00028924522/

삼각함수 호환 (노베용): https://orbi.kr/00029792166/

사인법칙, 코사인법칙 활용: https://orbi.kr/00028624520/

기출 파급 미적 chapter 8 라이프니츠 미분법: https://orbi.kr/00029112973/

기출 파급 미적 chapter 3 그래프 그리기: https://orbi.kr/00028230748/

기출 파급 확통 chapter 5 전체: https://orbi.kr/00028507131/

기출 파급 확통 chapter 2 전체: https://orbi.kr/00028063419/

기출 파급 확통 출고!: https://atom.ac/books/7241