2021 매쓰메딕 수1 평가원 기출 모음 (197 문항)

Part.2

MATHMEDIC

4.

등차수열과 등비수열

평가원 94문항

1번

자연수 n 의 모든 양의 약수를 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 라 할 때,

$$x_n = (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + \cdots + (-1)^{a_k}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $x_8 = 2$
ㄴ. $n = 3^m$ 이면 $x_n = -m + 1$
ㄷ. $n = 10^m$ 이면 $x_n = m^2 - 1$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

090628나 # 5087

2번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 10$, $a_2 + a_5 = 24$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오.

140622가 # 1235

3번

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9 = 3a_3$ 일 때, a_5 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

141104가 # 1277

4번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_8 = a_2 + 12, a_1 + a_2 + a_3 = 15$$

일 때, a_{10} 의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

170612나 # 1495

5번

첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_2 + a_4 = 24$$

를 만족시킬 때, a_5 의 값을 구하시오.

180925나 # 1748

6번

공차가 7 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{13} - a_{11}$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

160604나 # 1817

7번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1, a_4 = 7$ 일 때, $a_2 + a_3$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

130903나 # 2056

8번

등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_{10} + a_6 = 6,\ \ a_{10} - a_6 = -12$$

를 만족시킬 때, a_2 의 값을 구하시오.

130624나 # 2107

9번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 5, a_6 - a_4 = 4$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

110918나 # 4927

10번

네 수 1 , x , y , z 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $6x + z = 5y$ 를 만족시킨다. $x + y + z$ 의 값을 구하시오.

100619나 # 5048

11번

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 + a_4 = 8, a_7 = 52$ 를 만족시킬 때, 공차를 구하시오.

101118나 # 4987

12번

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 = 3$, $a_5 = 24$ 일 때, a_7 의 값을 구하시오.

081118나 # 5227

13번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_5 = 5, a_{15} = 25$$

일 때, a_{20}의 값을 구하시오.

190624나 # 6540

14번

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$2(a_2 + a_3) = a_9$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하시오.

161122가 # 1475

15번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 8$, $a_6 - a_4 = 12$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오.

140622나 # 2015

16번

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 = 1$ 이고, $a_1 + a_6 = 8$ 일 때, a_{21} 의 값을 구하시오.

120923나 # 2166

17번

첫째항이 -5이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=11}^{20} a_k$ 의 값은?

① 260 ② 255 ③ 250 ④ 245 ⑤ 240

121111나 # 2124

18번

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 이차방정식 $x^2-14x+24=0$ 의 두 근이 a_3 , a_8 이다. $\sum_{n=3}^{8} a_n$ 의 값은?

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

180615나 # 1708

19번

첫째항이 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_7+a_{11}=20$$

을 만족시킬 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

160623가 # 1416

20번

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=3n^2+n$ 을 만족시킬 때, a_8 의 값은?

① 16 ② 19 ③ 22 ④ 25 ⑤ 28

151117나 # 1860

21번

첫째항이 -6이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 30일 때, n의 값을 구하시오.

140522가 외 1회 # 5397

22번

첫째항이 6이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$\frac{a_8 - a_6}{S_8 - S_6} = 2$$

가 성립한다. d의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

141106나 # 1939

23번

등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_5 + a_{13} = 3a_9, \quad \sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{9}{2}$$

를 만족시킬 때, a_{13}의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

181114나 # 2247

24번

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_2 = -1, a_3 = 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은?

① 95 ② 90 ③ 85 ④ 80 ⑤ 75

111126나 # 4965

25번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_8 - a_4 = 28$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하시오.

161122나 # 1775

26번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$, $a_3 = 10$ 일 때, a_5 의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

150606나 # 1909

27번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_{10} = 22$ 일 때, $\sum_{k=2}^{9} a_k$ 의 값을 구하시오.

150924나 # 1897

28번

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10} - a_7 = 6$$

일 때, a_4의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

191105나 # 8567

29번

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2=-2$, $a_5=7$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값을 구하시오.

140924가 # 1267

30번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_5=4a_3, a_2+a_4=4$$

가 성립할 때, a_6의 값은 ?

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

061103나 # 6679

31번

등차수열 $\{x_n\}$과 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은 ?

<보기>

ㄱ. 수열 $\{f'(x_n)\}$은 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{f(x_{n+1})-f(x_n)\}$은 등차수열이다.

ㄷ. $f(0)=3, f(2)=5, f(4)=9$ 이면 $f(6)=15$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

060906가 # 6606

32번

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n=200$일 때, a_{11}의 값을 구하시오.

060918나 # 6640

33번

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6, a_{10} = -12$일 때,

$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots |a_{20}|$의 값은 ?

① 280 ② 284 ③ 288

④ 292 ⑤ 296

050607가 외 1회 # 6703

34번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 16, a_5 = 10$$

일 때, $a_k = 0$ 을 만족시키는 k 의 값을 구하시오.

131123나 # 2046

35번

공차가 6 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$|a_2 - 3| = |a_3 - 3|$$

일 때, a_5 의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

120606나 # 2209

36번

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4 - a_2 = 4$ 일 때, $\sum_{k=11}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오.

120623가 외 1회 # 1056

37번

1과 2 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$1, a_1, a_2, \cdots, a_n, 2$$

의 합이 24일 때, n 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

110606나 # 4885

38번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 k 에 대하여

$$b_{2k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}}$$

$$b_{2k} = 2^{a_2+a_4+\cdots+a_{2k}}$$

을 만족시킨다. $\{a_n\}$ 은 등차수열이고,

$$b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_{10} = 8$$

일 때, $\{a_n\}$ 의 공차는?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

100914가 외 1회 # 4593

39번

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$ 은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$ 은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2 = 1$ 일 때, a_8 의 값을 구하시오.

101130나 # 4999

40번

공차가 d_1, d_2 인 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2-1)$$

일 때,<보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a_n = n$ 이면 $b_n = 4n-4$ 이다.
ㄴ. $d_1 d_2 = 4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n = n$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

090616가 외 1회 # 4715

41번

공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_5 + a_9 = 45$$

일 때, $a_1 + a_{10}$ 의 값을 구하시오.

091119나 # 5138

42번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n}{1 + 2 + \ldots + n} \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 $\{a_n\}$ 이 등차수열이기 위한 필요충분조건은 $\{b_n\}$ 이 등차수열임을 증명하는 과정이다.

<증명>

수열 $\{a_n\}$을 첫째항 a, 공차 d인 등차수열이라 하면,

b_n

$$= \frac{a + 2(a+d) + 3(a+2d) + \cdots + n\{a + (n-1)d\}}{1 + 2 + \cdots + n}$$

$$= \frac{a(1 + 2 + \cdot\cdot + n) + d\{2 + 3 \cdot 2 + \cdot\cdot + n \cdot (n \cdot (n-1)\}}{1 + 2 + \cdots + n}$$

$$= a + \frac{2d\left\{\boxed{(가)} - \frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$

$$= a + \boxed{(나)} \cdot (n-1)$$

이므로 $\{b_n\}$은 공차가 $\boxed{(나)}$인 등차수열이다.

역으로 $\{b_n\}$을 등차수열이라 하면,

$$b_{n+1} = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + (n+1)} + \frac{(n+1)a_{n+1}}{1 + 2 + \cdots + (n+1)}$$

$$= \boxed{(다)} \cdot b_n + \frac{2}{n+2} a_{n+1}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (나) : $\frac{2}{3}d$ (다) : $\frac{n}{n+2}$

② (가) : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (나) : $\frac{2}{3}d$ (다) : $\frac{n-1}{n+2}$

③ (가) : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ (나) : $\frac{3}{2}d$ (다) : $\frac{n}{n+2}$

④ (가) : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ (나) : $\frac{2}{3}d$ (다) : $\frac{n}{n+2}$

⑤ (가) : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ (나) : $\frac{3}{2}d$ (다) : $\frac{n+1}{n+2}$

070617가 외 1회 # 4446

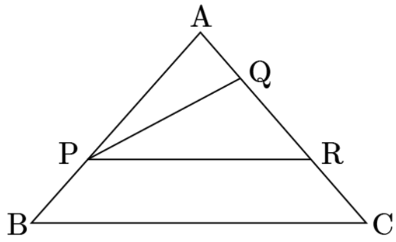
43번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_3 = 6, a_4 - a_2 = 6$ 이 성립할 때, a_6 의 값을 구하시오.

070918나 # 5287

44번

그림과 같이 삼각형 ABC의 변 AB를 $2:1$로 내분하는 내분점을 P로 잡고, 변 AC 위에 두 점 Q, R를 잡자. 삼각형 APQ, PRQ와 사각형 PBCR의 넓이가 차례로 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열을 이룰 때, 다음은 $\dfrac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AR}}}$의 값을 a와 d로 나타내는 과정이다.



삼각형 APQ의 넓이는 a이므로 삼각형 APR의 넓이는 $2a+d$가 되어

$$\begin{aligned} a : 2a+d &= \triangle\mathrm{APQ} : \triangle\mathrm{APR} \\ &= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AQ}}\sin A : \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AR}}\sin A \end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AR}}} = \dfrac{a}{2a+d} \cdots ㉠$

같은 방법으로, 삼각형 ABC의 넓이는 $\boxed{(가)}$이므로

$$\begin{aligned} a : \boxed{(가)} &= \triangle\mathrm{APQ} : \triangle\mathrm{ABC} \\ &= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AQ}}\sin A : \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\sin A \end{aligned}$$

또한 점 P는 변 AB를 $2:1$로 내분하는 내분점이므로

$$\overline{\mathrm{AP}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{AB}}$$

따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \boxed{(나)}$

그러므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}} = \boxed{(다)} \cdots ㉡$

㉠,㉡ 에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AR}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}\cdot\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AR}}} = \dfrac{a+2d}{2a+d}$

위의 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가) : $a+2d$ (나) : $\dfrac{a}{3(a+d)}$ (다) : $\dfrac{2a+3d}{a}$

② (가) : $a+2d$ (나) : $\dfrac{a+d}{2a+3d}$ (다) : $\dfrac{a+2d}{a+d}$

③ (가) : $3(a+d)$ (나) : $\dfrac{a}{2(a+d)}$ (다) : $\dfrac{a+2d}{a+d}$

④ (가) : $3(a+d)$ (나) : $\dfrac{a}{2(a+d)}$ (다) : $\dfrac{a+2d}{a}$

⑤ (가) : $3(a+d)$ (나) : $\dfrac{a}{3(a+d)}$ (다) : $\dfrac{2a+3d}{a}$

060611가 외 1회 # 6547

45번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = -15, |a_3| - a_4 = 0$$

일 때, a_7의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

190913나 # 8254

46번

공차가 0 이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 수열 $\{b_n\}$ 은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$ 일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

180629나 # 1722

47번

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2 의 값은?

(가) $a_6 + a_8 = 0$
(나) $|a_6| = |a_7| + 3$

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

171115나 # 1558

48번

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0$$

이 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$를 갖고, 세 수 $1, \alpha, \beta$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은?

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 14 ⑤ 17

200613나 # 9607

49번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 + a_2 = 10,\ a_3 + a_4 + a_5 = 45$$

가 성립할 때, a_{10}의 값은?

① 47 ② 45 ③ 43 ④ 41 ⑤ 39

051103나 # 6812

50번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = a_3 + 8, 2a_4 - 3a_6 = 3$$

일 때, $a_k < 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

200907나 # 10169

51번

첫째항이 50 이고 공차가 -4 인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

201115나 # 11180

52번

공비가 2 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 + a_4 = 55$ 일 때, a_3 의 값을 구하시오.

150922가 # 1355

53번

첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 = 4a_1,\ \ a_7 = (a_6)^2$$

일 때, 첫째항 a_1 의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

161107나 # 1760

54번

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 3, a_5 = 48$ 일 때, a_3 의 값은?

① 18 ② 16 ③ 14 ④ 12 ⑤ 10

151105나 # 1848

55번

공비가 2 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 12$ 일 때, a_5 의 값은?

① 24 ② 36 ③ 48 ④ 60 ⑤ 72

150905나 # 1878

56번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1a_9 = 4$ 일 때, $a_2a_8 + a_4a_6$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

140607나 # 2000

57번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{a_1 a_2}{a_3} = 2, \frac{2a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_2} = 8$$

일 때, a_3 의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

131106나 # 2029

58번

첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$b_n = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2$$

일 때, $\frac{b_6}{b_3}$ 의 값은?

① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

130608나 # 2091

59번

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n 에 대하여 $\frac{S_4}{S_2} = 9$ 일 때, $\frac{a_4}{a_2}$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

120908나 # 2151

60번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = \sqrt{5}$ 일 때, $a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5$ 의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② 5 ③ $5\sqrt{5}$ ④ 25 ⑤ $25\sqrt{5}$

120608나 # 2211

61번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
$a_2a_4=16, a_3a_5=64$일 때, a_7 의 값을 구하시오.

110618나 # 4897

62번

두 자연수 a 와 b 에 대하여 세 수 $a^n, 2^4\times 3^6, b^n$ 이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, ab 의 최솟값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

101124나 # 4993

63번

이차방정식 $x^2-kx+125=0$ 의 두 근 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ 에 대하여 $\alpha, \beta-\alpha, \beta$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

080923나 # 5202

64번

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=4(a_2-a_1), \sum_{k=1}^{6}a_k=15$$

일 때, $a_1+a_3+a_5$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

190615나 # 6533

65번

공차가 0 이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 의 세항 a_2, a_4, a_9 가 이 순서대로 공비 r 인 등비수열을 이룰 때, $6r$ 의 값을 구하시오.

111122나 # 4961

66번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4 - S_3 = 2, S_6 - S_5 = 50$$

일 때, a_5의 값을 구하시오.

190926나 # 8267

67번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 3$, $\frac{a_4 a_5}{a_2 a_3} = 16$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오.

170625나 # 1508

68번

공비가 0 이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 4$, $3a_5 = a_7$ 일 때, a_3 의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

160903가 # 1426

69번

공비가 0 이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 4$, $3a_5 = a_7$ 일 때, a_3 의 값을 구하시오.

160922나 # 1805

70번

공차가 6 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_8 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 항 a_1, a_2, a_k 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $k + a_1$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

160616나 # 1829

71번

첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{a_7}{a_5} = 4$$

일 때, a_4 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

170906나 # 1519

72번

세 수 $\frac{9}{4}$, a, 4 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a 의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

171105나 # 1548

73번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 6$, $a_5 = 162$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 1000$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

100626나 # 5055

74번

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 + a_2 = 12, \quad \frac{a_3 + a_7}{a_1 + a_5} = 4$$

를 만족시킬 때, a_4 의 값은?

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

140604가 # 1217

75번

세 수 $a, 0, b$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $2b, a, -7$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

071106나 # 5305

76번

첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = 3$$

일 때, a_7의 값을 구하시오.

191124나 # 8583

77번

첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오.

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$
(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

191129나 # 8588

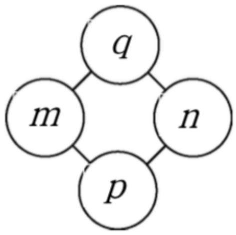
78번

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1, a_2=4, a_3=10$이고, 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 등비수열일 때, a_5의 값을 구하시오.

061119나 # 6688

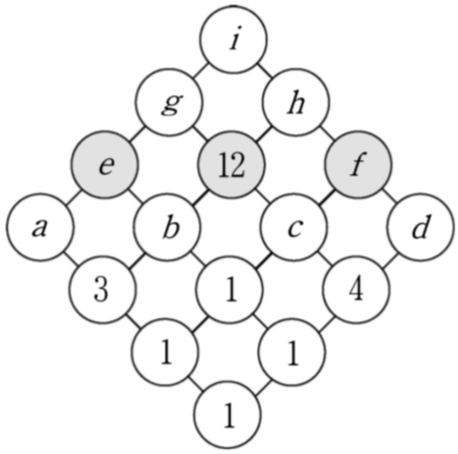
79번

두 자연수 m과 n의 최대공약수를 p, 최소공배수를 q라 할 때, 이런 관계를 만족시키는 수를 [그림1]과 같이 나타내기로 하자.



[그림 1]

[그림2]는 [그림1]의 관계를 만족시키도록 수를 연결하여 나타낸 것이다. 세 자연수 $e, 12, f$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $e+f$의 값을 구하시오.



[그림 2]

060921나 # 6643

80번

다섯 개의 실수 a, b, c, d, e를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e가 다음 조건을 만족시킬 때 b가 수열의 제 n항이라면 n의 값은 ?

(가) $e = \sqrt{cd}$
(나) $\dfrac{a}{e} = \dfrac{c}{d}$
(다) $a < b$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

050611나 # 6720

81번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 a_5 = 9, a_2 a_6 = 36$$

일 때, $8(a_1 a_2 + a_3 a_4)$ 의 값은?

① 153 ② 157 ③ 161 ④ 165 ⑤ 169

130911나 # 2064

82번

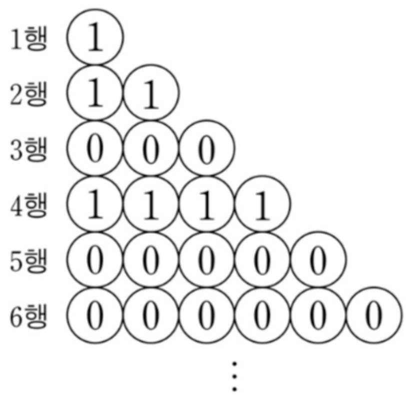
세 수 $a, a+b, 2a-b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $1, a-1, 3b+1$ 은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다. a^2+b^2 의 값을 구하시오.

121125가 외 1회 # 1118

83번

그림과 같이 1행에는 1개, 2행에는 2개, $\cdots$, n행에는 n 개의 원을 나열하고 그 안에 다음 규칙에 따라 0 또는 1 을 써 넣는다.

(가) 1행의 원 안에는 1을 써 넣는다.
(나) $n \geq 2$ 일 때, 1행부터 $(n-1)$ 행까지 나열된 모든 원 안의 수의 합이 n 이상이면 n 행에 나열된 모든 원 안에 0을 써 넣고, n 미만이면 n 행에 나열된 모든 원 안에 1 을 써 넣는다.



1행부터 32행까지 나열된 원 안에서 써 넣은 모든 수의 합을 구하시오.

110925나 # 4934

84번

네 수 $1, a, b, c$ 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$ 를 만족시킨다. 공비 r 의 값은? (단, $r > 1$)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

091105나 # 5124

85번

다음 표는 어느 학교에서 한 달 전에 구입한 휴대용 저장 장치의 용량에 따른 1 개당 가격과 개수의 현황을 나타낸 것이다.

용량	128MB	256MB	512MB	1GB	2GB
1개당 가격	a	$\frac{3}{2}a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 a$
개수	$16b$	$8b$	$4b$	$2b$	b

현재 모든 휴대용 저장 장치의 가격이 한 달 전보다 모두 40% 씩 하락하였다. 이 학교에서 휴대용 저장 장치의 용량과 개수를 위 표와 동일하게 현재의 가격으로 구입한다면 지불해야 하는 금액은? (단, $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이다.)

① $\frac{128}{5}ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$ ② $32ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$

③ $32ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$ ④ $\frac{192}{5}ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$

⑤ $\frac{192}{5}ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$

080628나 # 5177

86번

다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

> (가) 입사 첫째 해 연봉은 a 원이고, 입사 19 년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8% 씩 인상된다.
> (나) 입사 20 년째 해부터의 연봉은 입사 19 년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$ 로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28 년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18} = 4$ 로 계산한다.)

① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$ ④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

070614가 외 1회 # 4443

87번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 2$, $a_6 = 16$ 일 때, a_9 의 값을 구하시오.

071118나 # 5317

88번

음이 아닌 정수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $\mathrm{P}_n(a_n, b_n)$이라 하자.

(ㄱ)
$a_0 = 1, b_0 = 0$
(ㄴ)
점 $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$은 점 $\mathrm{P}_n(a_n, b_n)$에서 원 $x^2 + y^2 = 1$의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{18}$만큼 이동한 점이다.

이때, $a_n = b_n$을 만족시키는 n은 $\boxed{\text{(가)}}$. 그리고 $c_k = a_{18k}(k = 1, 2, 3, \cdots)$라 하면, 수열 $\{c_k\}$는 공비가 $\boxed{\text{(나)}}$ 인 등비수열이다. 위의 (가), (나)에 알맞은 것은 ?

① (가) : 존재하지 않는다. (나) : $-\frac{1}{2}$
② (가) : 존재하지 않는다. (나) : -1
③ (가) : 존재한다. (나) : $-\frac{1}{2}$
④ (가) : 존재한다. (나) : -1
⑤ (가) : 존재한다. (나) : $\frac{1}{2}$

060629나　　# 6599

89번

첫째항이 3 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_6}{a_4} = \frac{1}{4}$$

일 때, $a_5 = \frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

180626나　　# 1719

90번

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 2, \ \frac{a_5}{a_3} = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$ 의 값을 구하시오.

200624나　　# 9618

91번

첫째항이 2 이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오.

(가) $4 < a_2 + a_3 \leq 12$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

200628나 # 9622

92번

일반항이 $a_n = 2^{1-n}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

ㄱ. 수열 $\{\log a_n\}$은 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{S_n + a_n\}$은 등비수열이다.

ㄷ. $S_n = \dfrac{1}{2}a_{n+1} + 2$가 성립한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

050914가 외 1회 # 6747

93번

공비가 r이고 $a_2 = 1$인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 곱을 $\omega = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10}$이라 할 때, $\log_r \omega$의 값을 구하시오. (단, $r > 0$이고 $r \neq 1$이다.)

051121나 # 6822

94번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_{16}}{a_{14}} + \frac{a_8}{a_7} = 12$$

일 때, $\dfrac{a_3}{a_1} + \dfrac{a_6}{a_3}$의 값을 구하시오.

201123나 # 11188

빠른 정답표

1번. ④	2번. 22	3번. ①	4번. ③	5번. 20
6번. ③	7번. ④	8번. 21	9번. 19	10번. 15
11번. 12	12번. 38	13번. 35	14번. 3	15번. 26
16번. 39	17번. ⑤	18번. ②	19번. 11	20번. ④
21번. 10	22번. ①	23번. ①	24번. ①	25번. 7
26번. ⑤	27번. 88	28번. ①	29번. 250	30번. ③
31번. ⑤	32번. 42	33번. ②	34번. 10	35번. ②
36번. 310	37번. ④	38번. ③	39번. 16	40번. ③
41번. 32	42번. ①	43번. 15	44번. ④	45번. ①
46번. 13	47번. ①	48번. ③	49번. ⑤	50번. ②
51번. ④	52번. 20	53번. ①	54번. ④	55번. ③
56번. ①	57번. ①	58번. ⑤	59번. ④	60번. ④
61번. 64	62번. 108	63번. 25	64번. ③	65번. 15
66번. 10	67번. 96	68번. ③	69번. 12	70번. ②
71번. ②	72번. ②	73번. ②	74번. ③	75번. ③
76번. 63	77번. 117	78번. 46	79번. 25	80번. ⑤
81번. ①	82번. 10	83번. 63	84번. ⑤	85번. ④
86번. ④	87번. 128	88번. ②	89번. 19	90번. 80
91번. 162	92번. ③	93번. 35	94번. 36	

5.

수열의 합

평가원 57문항

1번

수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{6}(a_k + 1)$$

을 만족시킬 때, a_7 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

170909나 # 1522

2번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{11} a_k = 4, \quad \sum_{k=1}^{11} b_k = 24$$

일 때, $\sum_{k=1}^{11}(5a_k + b_k)$ 의 값은?

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

160608나 # 1821

3번

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$ 일 때, a_{47} 의 값을 구하시오.

080618나 # 5167

4번

$\sum_{k=1}^{10}(k+2)(k-2)$ 의 값을 구하시오.

080918나 # 5197

5번

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28,\ \ \sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값을 구하시오.

181127나 # 2260

6번

$\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$ 의 값은?

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

200912나 # 10174

7번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n=n^2+2^n$ 일 때, a_1+a_5 의 값은?

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

100905나 # 5004

8번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n=2^n-1$ 일 때, a_9 의 값을 구하시오.

090918나 # 5107

9번

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3, \sum_{k=1}^{10} {a_k}^2 = 7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2{a_k}^2 - a_k)$의 값은 ?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

190607나 # 6525

10번

첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$$

의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

170914나 # 1527

11번

함수 $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{15} f(2k)$ 의 값을 구하시오.

171125나 # 1568

12번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n}{n+1}$ 일 때, a_4 의 값은?

① $\frac{1}{22}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{1}{14}$

151109나 # 1852

13번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 15$ 이고,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = 2n + 1 \qquad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. a_{10} 의 값은?

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

150608가 # 1311

14번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이

$$S_n = 2^{n-1} + 5$$

일 때, $a_1 + a_5$의 값을 구하시오.

140524나 # 5425

15번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 10n$ 일 때, $a_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

140612나 # 2005

16번

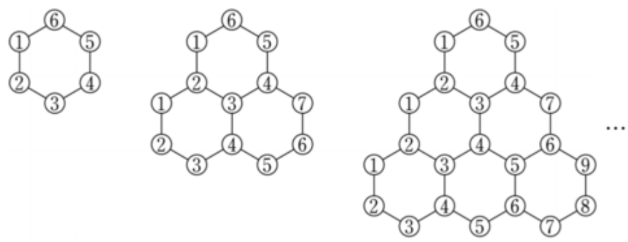
다음 [단계]에 따라 정육각형이 인접해 있는 모양의 도형에 자연수를 적는다.

[단계 1]
<그림 1 >과 같이 한 개의 정육각형을 그리고, 각 꼭짓점에 자연수를 1 부터 차례로 적는다.
[단계 2]
<그림 1 >의 아래에 2 개의 정육각형을 그리고, 새로 생긴 각 꼭짓점에 자연수를 1 부터 차례로 적어서 <그림 2 >를 얻는다.

⋮

[단계 n]
<그림 $n-1$ >의 아래에 n 개의 정육각형을 그리고, 새로 생긴 각 꼭짓점에 자연수를 1 부터 차례로 적어서 <그림 n >을 얻는다.

<그림 6 >에 적혀있는 모든 수의 합은?



<그림 1> <그림 2> <그림 3>

① 338 ② 349 ③ 360 ④ 371 ⑤ 382

130914나 # 2067

17번

이차방정식 $x^2-2x-1=0$ 의 두 근을 α , β 라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$ 의 값은?

① 255 ② 265 ③ 275
④ 285 ⑤ 295

130616나 # 2099

18번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=-\dfrac{4}{9}$ 이고,

$$2^n a_{n+1}-2^{n+1}a_n=n \quad (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식 $2^n a_{n+1}-2^{n+1}a_n=n$ 의 양변을 2^{2n+1} 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2^{2n+1}} \quad (n\geq 1)$$

이므로 $n\geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}\cdots\cdots(*)$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}&=\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}\right)\\&=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n-1}{4^{n-1}}\right)\right.\\&\qquad\left.-\left(\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}\right)\right\}\\&=\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{(가)}}{4^n}\right)\end{aligned}$$

이므로 $(*)$에 의하여

$$\begin{aligned}a_n&=\boxed{(나)}+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{(가)}}{4^n}\right)\\&=-\frac{3n+1}{9\cdot 2^{n-1}}\ (n\geq 2)\end{aligned}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(10)\times g(5)$ 의 값은?

① -64 ② -56 ③ -48
④ -40 ⑤ -32

130917가 외 1회 # 1170

19번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 4$ 이고,

$$a_{n+1} = n \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k} (n \geq 2)$$

이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = \boxed{(가)} + \frac{a_n}{n}$$

이므로

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{n} + \boxed{(가)}$$

이다. $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{(가)}}{n+1} (n \geq 2)$$

이고, $b_2 = 3$ 이므로

$$b_n = \boxed{(나)} (n \geq 2)$$

이다. 그러므로

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 1) \\ n \times \left(\boxed{(나)}\right) & (n \geq 2) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(4) + g(7)$ 의 값은?

① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

131117가 외 1회 # 1200

20번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_2 = \boxed{(가)}$ 이다.
자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned} a_n + 2 &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{(나)} \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{(다)} a_{n+1} \end{aligned}$$

이다.
따라서 $a_1 = 1$ 이고, $n \geq 2$ 일 때 $a_n = \left(\boxed{(다)}\right)^{n-2}$ 이다.

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $p + q + r$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

120610가 외 1회 # 1043

21번

2 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$$\{3^{2k-1} | k\text{는 자연수}, 1 \le k \le n\}$$

의 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 S라 하고, S의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어, $f(4)=5$ 이다. 이때 $\sum_{n=2}^{11} f(n)$ 의 값을 구하시오.

111123가 외 1회 # 4482

22번

$\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=300$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

160624나 # 1837

23번

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n \quad (n \ge 1)$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} k a_{4k+1}$ 의 값은?

① 2960 ② 3000 ③ 3040 ④ 3080 ⑤ 3120

150613가 # 1316

24번

$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)} = \frac{15}{4}$ 일 때, n 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

150610나 # 1913

25번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 15$ 이고,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = 2n + 1 \ (n \geq 1)$$

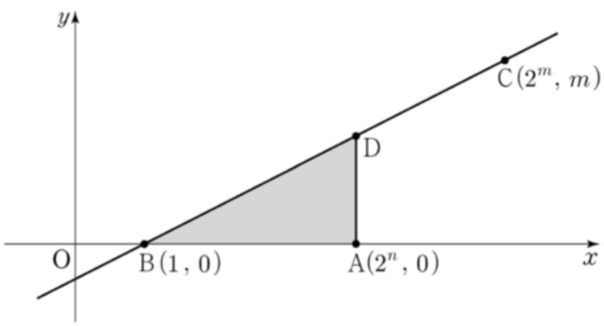
을 만족시킨다. a_{10} 의 값을 구하시오.

150626나 # 1929

26번

자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m 을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은?

(가)
점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$ 이다.
(나)
두 점 $\mathrm{B}(1, 0)$과 $\mathrm{C}(2^m, m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x 좌표가 2^n 인 점을 D 라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$ 보다 작거나 같다.



① 109 ② 111 ③ 113 ④ 115 ⑤ 117

151121가 # 1384

27번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$ 이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_n - 4 \quad (n = 1, 2, 3, 4)$
(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 이다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$ 일 때, a_2 의 값을 구하시오.

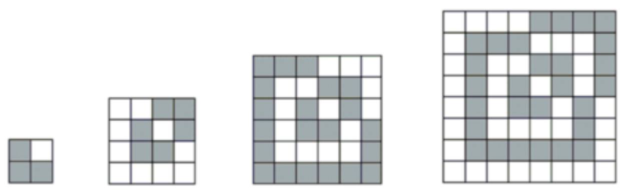
140628나 # 2021

28번

한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 검은 타일과 흰 타일이 있다.

(가)
[그림1]과 같이 검은 타일 3개와 흰 타일 1개를 붙여 한 변의 길이가 2인 정사각형이 되도록 한다.
(나)
[그림2]와 같이 [그림1]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 4인 정사각형이 되도록 한다. 이때 [그림1]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.
(다)
[그림3]과 같이 [그림2]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 6인 정사각형이 되도록 한다. 이때 [그림2]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

이와 같은 과정을 계속하여 전체 타일의 개수가 400개가 되었을 때, 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수 사이의 관계를 옳게 나타낸 것은?



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① 검은 타일과 흰 타일의 개수가 같다.

② 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 18개 많다.

③ 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 20개 많다.

④ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 18개 많다.

⑤ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20개 많다.

060614가 외 1회 # 6550

29번

수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$일 때,
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$의 값은?

① $2^{10}-3$ ② $2^{10}-1$ ③ 2^{10}
④ $2^{10}+1$ ⑤ $2^{10}+3$

060904나 # 6632

30번

수열 $\{a_n\}$에서 $a_{2n-1} = 2^n$이고 $a_{2n} = 5^n$일 때, $\sum_{n=1}^{10} \log a_n$의 값을 구하시오.

050620가 외 1회 # 6557

31번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2n^2 - 3n$일 때, a_{10}의 값을 구하시오.

050619나 # 6726

32번

그림과 같이 자연수 k에 대하여 $[\log_{k+1} x] = 1$을 만족시키는 자연수 x를 k행에 차례로 배열할 때, k행에 배열된 자연수의 개수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

1행 $\boxed{2}\boxed{3}$

2행 $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

10행 $\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}$ $\cdots$

060624나 # 6594

33번

첫째항이 2이고, 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{3}$ 일 때, S_{11} 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

130611가 외 1회 # 1134

34번

$\displaystyle\sum_{k=1}^{14} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

120625나 # 2228

35번

자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n 이라 하자.

(가)
정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n, 2^n)$ 이다.
(나)
정사각형과 그 내부에 있는 점 (x, y) 중에서 x가 자연수이고, $y = 2^x$ 을 만족시키는 점은 3 개뿐이다.

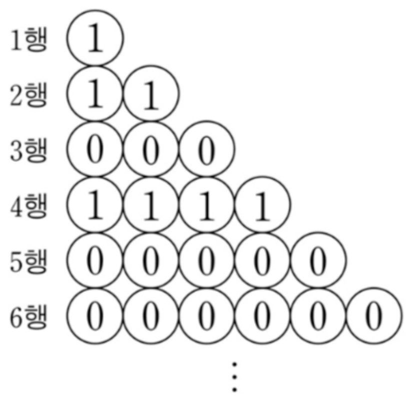
예를 들어 $a_1 = 12$ 이다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값을 구하시오.

120930가 외 1회 # 1093

36번

그림과 같이 1행에는 1개, 2행에는 2개, $\cdots$, n행에는 n 개의 원을 나열하고 그 안에 다음 규칙에 따라 0 또는 1 을 써 넣는다.

(가) 1행의 원 안에는 1을 써 넣는다.
(나) $n \geq 2$ 일 때, 1행부터 $(n-1)$ 행까지 나열된 모든 원 안의 수의 합이 n 이상이면 n 행에 나열된 모든 원 안에 0을 써 넣고, n 미만이면 n 행에 나열된 모든 원 안에 1 을 써 넣는다.



1행부터 32행까지 나열된 원 안에서 써 넣은 모든 수의 합을 구하시오.

110925나 # 4934

37번

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$ 라 할 때, 10^p 의 값을 구하시오.

111130나 # 4969

38번

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{2010} na_n$ 의 값은?

① -2011 ② -2010 ③ 0
④ 2010 ⑤ 2011

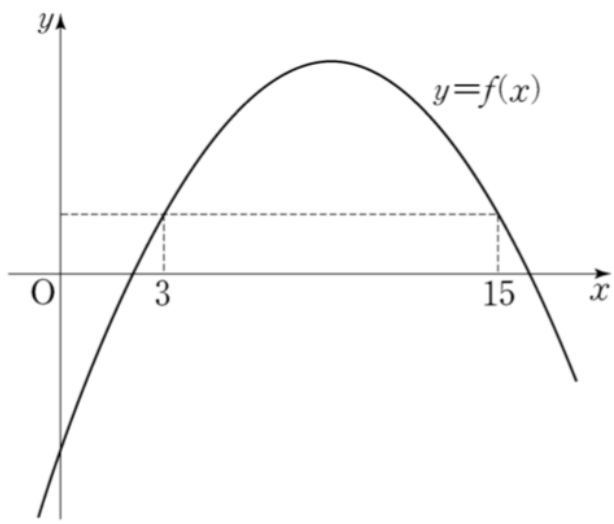
100608가 외 1회 # 4557

39번

함수 $y = f(x)$ 는 $f(3) = f(15)$ 를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. m 이 15 보다 작은 자연수일 때,

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{15} < 0$$

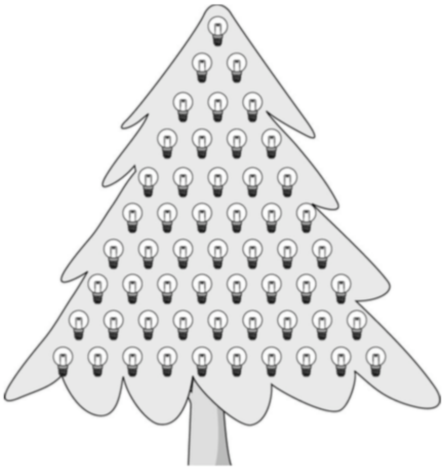
을 만족시키는 m 의 최솟값을 구하시오.



100622가 외 1회 # 4571

40번

그림과 같이 나무에 55 개의 전구가 맨 위 첫 번째 줄에는 1 개, 두 번째 줄에는 2 개, 세 번째 줄에는 3 개, ..., 열 번째 줄에는 10 개가 설치되어 있다. 전원을 넣으면 이 전구들은 다음 규칙에 따라 작동한다.



(가)
n 이 10 이하의 자연수일 때, n 번째 줄에 있는 전구는 n 초가 되는 순간 처음 켜진다.
(나)
모든 전구는 처음 켜진 후 1 초 간격으로 꺼짐과 켜짐을 반복한다.

전원을 넣고 n 초가 되는 순간 켜지는 모든 전구의 개수를 a_n 이라고 하자. 예를 들어 $a_1=1, a_2=2, a_4=6, a_{11}=25$ 이다. $\sum_{n=1}^{14} a_n$ 의 값은?

① 215 ② 220 ③ 225 ④ 230 ⑤ 235

090615가 외 1회 # 4714

41번

공차가 d_1, d_2 인 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하자.

$$S_nT_n = n^2(n^2-1)$$

일 때,<보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a_n=n$ 이면 $b_n=4n-4$ 이다.
ㄴ. $d_1d_2=4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n=n$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

090616가 외 1회 # 4715

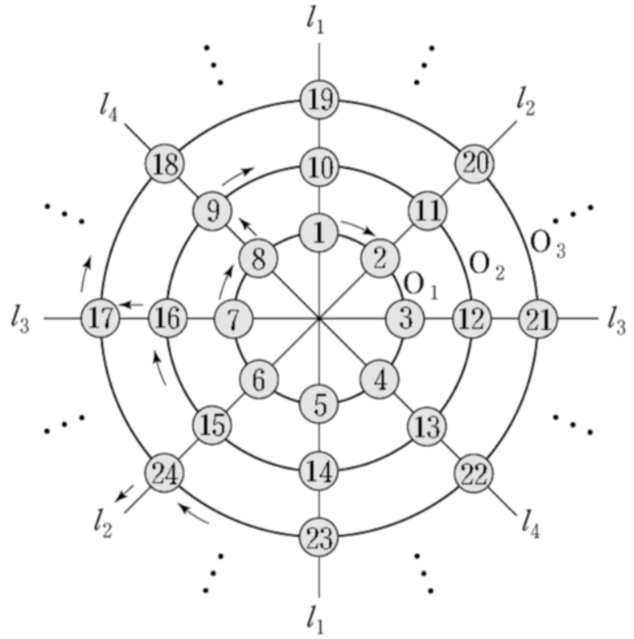
42번

수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항 a_n 을 자연수 k 의 양의 제곱근 $\sqrt{k}$ 를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n 이 되는 k 의 개수라 하자. $\sum_{i=1}^{10} a_i$ 의 값을 구하시오.

090922가 외 1회 # 4691

43번

다음 그림은 동심원 $O_1, O_2, O_3, \ldots$ 과 직선 l_1, l_2, l_3, l_4 의 교점 위에 자연수를 1부터 차례로 적은 것이다.



이미 채워진 수들의 규칙에 따라 계속하여 적어 나가면 475 는 원 O_m 과 직선 l_n 의 교점 위에 있다. $m+n$ 의 값을 구하시오.

080623나 # 5172

44번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하시오.

070618나 # 5257

45번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 0, a_n + a_{n+1} = n$ 을 만족시킨다. 다음은 두 자연수 m, n 에 대하여 $\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$ 의 값을 구하는 과정이다.

(단, $m < n$ 이다.)

$$\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$$
$$= a_{n-m+1} + a_{n-m+2} + \cdots + a_{n+m-1} + a_{n+m}$$
$$= (n-m+1) + (n-m+3) + \cdots + (n+m-3) + (\boxed{\text{(가)}})$$
$$= \frac{(\boxed{\text{(나)}})\{n-m+1) + (\boxed{\text{(가)}})\}}{2}$$
$$= \boxed{\text{(다)}}$$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $n+m-1$ (나) : m (다) : mn

② (가) : $n+m-1$ (나) : m (다) : n^2

③ (가) : $n+m-1$ (나) : n (다) : n^2

④ (가) : $n+m$ (나) : $m-1$ (다) : mn

⑤ (가) : $n+m$ (나) : $n-1$ (다) : n^2

070911가 외 1회 # 4830

46번

첫째항이 0 이고 공차가 0 이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 를 만족시킬 때, b_{27} 의 값을 구하시오.

071122가 외 1회 # 4871

47번

$p \geq 2$인 자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$
(나) $a_{k+1} = a_k + 1 \ (1 \leq k \leq p-1)$
(다) $a_{k+p} = a_k \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$
ㄴ. $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = \dfrac{p(p-1)}{2}$
ㄷ. $a_p + a_{2p} + \cdots + a_{kp} = k(p-1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

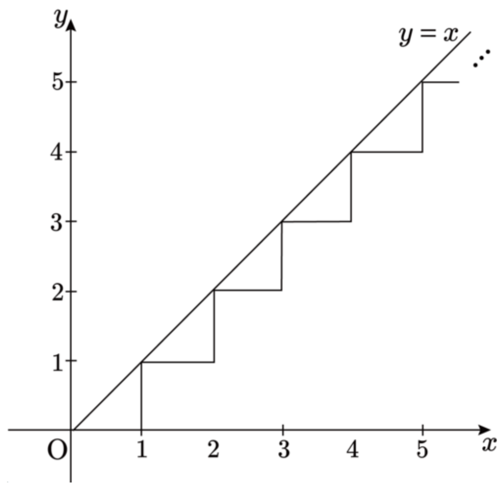
061129나 # 6695

48번

좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

ⅰ. A_0은 원점이다.
ⅱ. n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들면, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25}, 0\right)$, $\left(1, \dfrac{11}{25}\right)$이다.
자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y = x$위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오.



190929나 # 8270

49번

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + b_n = 10$ 을 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k) = 160$ 일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값은?

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

180911나 # 1734

50번

좌표평면에서 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x + 10 & (x < 10) \\ (x-10)^2 & (x \geq 10) \end{cases}$$

과 자연수 n 에 대하여 점 $(n, f(n))$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n 이 있다. x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n 의 내부에 있고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n , 원 O_n 의 내부에 있고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n 이라 하자.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}(A_n - B_n)$ 의 값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

171121나 # 1564

51번

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k-1)(k+2)$의 값을 구하시오.

050918나 # 6774

52번

아래 그림과 같이 자연수 n에 대하여 n개의 항

$$\left[\frac{n}{1}\right], \left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{3}\right], \cdots, \left[\frac{n}{n}\right]$$

이 n행에 1열부터 n열까지 차례로 나열되어 있다.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

	1열	2열	3열	4열	5열	⋯	n열	⋯
1행	1							
2행	2	1						
3행	3	1	1					
4행	4	2	1	1				
5행	5	2	1	1	1			
⋮			⋮					
n행	$\left[\frac{n}{1}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n}{3}\right]$		⋯		$\left[\frac{n}{n}\right]$	
⋮			⋮					

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. n행에서 그 값이 1인 항은 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$개이다.
ㄴ. 100행에서 그 값이 3인 항은 8개이다.
ㄷ. 3열에서 그 값이 5인 항은 5개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

051111가 외 1회 # 6792

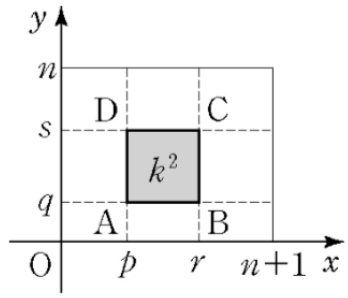
53번

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 w라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 w^n의 실수 부분으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}$의 값을 구하시오.

050930나 # 6781

54번

자연수 n 과 $0 \le p < r \le n+1$, $0 \le q < s \le n$ 을 만족시키는 네 정수 p, q, r, s 에 대하여 좌표평면에서 네 점 $A(p, q)$, $B(r, q)$, $C(r, s)$, $D(p, s)$ 를 꼭짓점으로 하고 넓이가 k^2 인 정사각형의 개수를 a_k 라고 하자. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값을 구하는 과정이다. (단, k는 n 이하의 자연수이다.)



그림과 같이 넓이가 k^2 인 정사각형 ABCD 를 만들 때, 두 점 A, B 의 y좌표가 주어지면 x좌표의 차가 $r-p=k$ 인 변AB를 택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

또 두 점 A, D의 x좌표가 주어지면 y좌표의 차가 $s-q=k$ 인 변 AD를 택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서

$$a_k = (n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2$$

이다. 그러므로

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\{(n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2\}$$
$$= \boxed{\text{(다)}}$$

(가), (나), (다) 에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

① (가) : $n-k+1$ (나) : $n-k+2$ (다) : $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

② (가) : $n-k+2$ (나) : $n-k+1$ (다) : $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

③ (가) : $n-k+1$ (나) : $n-k+2$ (다) : $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

④ (가) : $n-k+2$ (나) : $n-k+1$ (다) : $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

⑤ (가) : $n-k+1$ (나) : $n-k+2$ (다) : $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

090612가 외 1회 # 4711

55번

n 이 자연수일 때, x 에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n 이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$ 의 값을 구하시오.

200926나 # 10185

56번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$
(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{63}a_n$의 값은?

① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

201121나 # 11186

57번

자연수 n에 대하여 다항식 $2x^2-3x+1$을 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}(a_n-n^2+n)$의 값을 구하시오.

201125나 # 11190

빠른 정답표

1번. ①	2번. ③	3번. 94	4번. 345	5번. 14
6번. ⑤	7번. ②	8번. 256	9번. ④	10번. ②
11번. 150	12번. ②	13번. ④	14번. 14	15번. ①
16번. ④	17번. ②	18번. ①	19번. ④	20번. ④
21번. 100	22번. 19	23번. ④	24번. ⑤	25번. 34
26번. ①	27번. 11	28번. ⑤	29번. ①	30번. 15
31번. 35	32번. 440	33번. ①	34번. 29	35번. 392
36번. 63	37번. 21	38번. ①	39번. 5	40번. ⑤
41번. ③	42번. 110	43번. 64	44번. 196	45번. ①
46번. 13	47번. ④	48번. 8	49번. ①	50번. ④
51번. 420	52번. ④	53번. 332	54번. ④	55번. 9
56번. ④	57번. 91			

6.

수학적 귀납법

평가원 46 문항

1번

자연수 n 에 대하여 순서쌍 (x_n, y_n) 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $(x_1, y_1) = (1, 1)$
(나) n 이 홀수이면 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, (y_n - 3)^2)$ 이고,
n 이 짝수이면 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = ((x_n - 3)^2, y_n)$ 이다.

순서쌍 (x_{2015}, y_{2015}) 에서 $x_{2015} + y_{2015}$ 의 값을 구하시오.

150628나 # 1931

2번

수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = a_2 + 3$
(나) $a_{n+1} = -2a_n (n \geq 1)$

a_9 의 값을 구하시오.

141124나 # 1957

3번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} a_n$$

을 만족시킬 때, a_4 의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

121105나 # 2118

4번

수열$\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_7의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

181113나 # 2246

5번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=3$ 이고 $a_{n+1}-a_n=4n-3$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

080621나 # 5170

6번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1$$
$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\ge 2)\\ \sqrt[3]{2}a_n & (a_n<2)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_{112}의 값은 ?

① 1 ② $^3\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $^3\sqrt{4}$ ⑤ 2

070626나 # 5265

7번

다음은 어느 시력검사표에 표시된 시력과 그에 해당되는 문자의 크기를 나타낸 것의 일부이다.

시력	0.1	0.2	0.3	0.4	...	1.0
문자의 크기	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{10}

문자의 크기 a_n 은 다음 관계식을 만족시킨다.

$$a_1=10A\,,\,a_{n+1}=\frac{10A\cdot a_n}{10A+a_n}$$
(단, A 는 상수이고 $n=1,2,3,\cdots,9$ 이다.)

이 시력검사표에서 시력 0.8 에 해당되는 문자의 크기는?

① $2A$ ② $\frac{3}{2}A$ ③ $\frac{4}{3}A$ ④ $\frac{5}{4}A$ ⑤ $\frac{6}{5}A$

070928나 # 5297

8번

다음은 19세기 초 조선의 유학자 홍길주가 소개한 제곱근을 구하는 계산법의 일부를 재구성한 것이다.

1보다 큰 자연수 p에서 1을 뺀 수를 p_1이라 한다.
p_1이 2보다 크면 p_1에서 2를 뺀 수를 p_2라 한다.
p_2가 3보다 크면 p_2에서 3을 뺀 수를 p_3이라 한다.
$\vdots$
p_{k-1}이 k보다 크면 p_{k-1}에서 k를 뺀 수를 p_k라 한다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 수 p_n이
$(n+1)$보다 작으면 이 과정을 멈춘다.
이때, $2p_n$이 $(n+1)$과 같으면 p는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.

(가)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

① $n+1$ ② $\frac{(n+1)^2}{2}$ ③ $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ④ 2^{n+1} ⑤ $(n+1)!$

080616가 외 1회 # 4745

9번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 $a_1 = a_2 = 1, b_1 = k$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2 , \quad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$ 일 때, k 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

180919나 # 1742

10번

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 2$ 이고, $n \geq 1$ 일 때 a_{n+1} 은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k 의 개수이다. a_{10} 의 값을 구하시오.

130628가 외 1회 # 1151

11번

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 0$ 이고

$$a_{n+1} = (-1)^n a_n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, a_{50}의 값은 ?

① -50 ② -25 ③ 0 ④ 25 ⑤ 50

140518나 # 5420

12번

자연수 n 에 대하여 점 P_n 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점일 때, 점 P_{n+1} 을 다음 규칙에 따라 정한다. (단, 점 P_n 은 좌표축 위의 점이 아니다.)

(가) 점 P_n 이 제1사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1} 은 점 P_n 을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 이동시킨 점이다.
(나) 점 P_n 이 제2사분면 또는 제4사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1} 은 점 P_n 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.
(다) 점 P_n 이 제3사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1} 은 점 P_n 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 P_1 의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 일 때, 점 P_{2007} 의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

070611나 # 5250

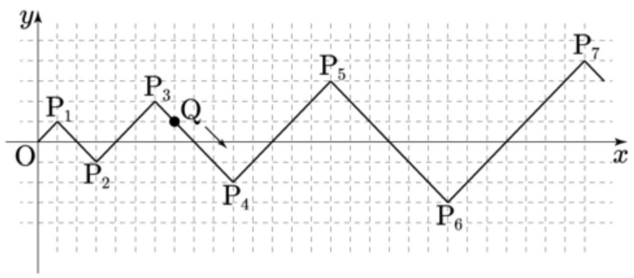
13번

자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $x_1 = y_1 = 1$

(나) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1) \\ y_{n+1} = y_n + (-1)^n \times (n+1) \end{cases} \quad (n \geq 1)$

점 Q 는 원점 O 를 출발하여 $\overline{\mathrm{OP_1}}$ 을 따라 점 P_1 에 도착한다. 자연수 n 에 대하여 점 P_n 에 도착한 점 Q 는 점 P_{n+1} 을 향하여 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ 을 따라 이동한다. 점 Q 는 한 번에 $\sqrt{2}$ 만큼 이동한다. 예를 들어, 원점에서 출발하여 7 번 이동한 점 Q 의 좌표는 $(7, 1)$ 이다. 원점에서 출발하여 55 번 이동한 점 Q 의 y 좌표는?



① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

140616나 # 2009

14번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2 - 3a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 1 + a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40} a_n$의 값은?

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

191113나 # 8574

15번

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 10$이고, 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$은 등비수열일 때, a_5의 값을 구하시오.

061119나 # 6688

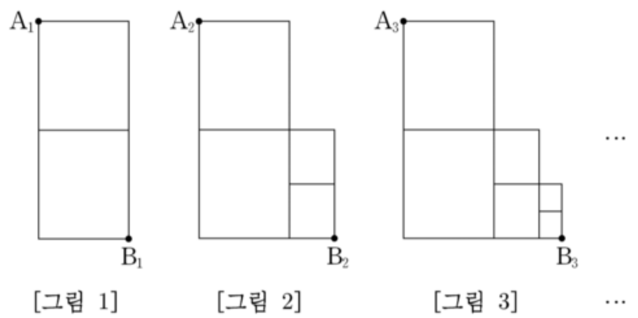
16번

그림과 같이 직사각형에서 세로를 각각 이등분하는 점 2개를 연결하는 선분을 그린 그림을 [그림 1] 이라 하자.

[그림 1] 을 $\frac{1}{2}$ 만큼 축소시킨 도형을 [그림 1] 의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림 2] 라 하자.

이와 같이 3 이상의 자연수 k에 대하여 [그림 1] 을 $\frac{1}{2^{k-1}}$ 만큼 축소시킨 도형을 [그림 $k-1$] 의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림 k]라 하자.

자연수 n 에 대하여 [그림 n] 에서 왼쪽 맨 위 꼭짓점을 A_n, 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 B_n 이라 할 때, 점 A_n에서 점 B_n까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n 이라 하자. a_7 의 값을 구하시오.



140929나 # 1992

17번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=2$ 이고, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1}=\frac{S_n}{a_n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 S_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_2=\frac{S_1}{a_1}=1$ 이다.

$n \geq 3$ 일 때,

$$a_n=\frac{S_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{S_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-2}a_{n-1}+a_{n-1}}{a_{n-1}}$$

이므로

$a_n=a_{n-2}+1$ 이다.

따라서 일반항 a_n 을 구하면, 자연수 k 에 대하여

$n=2k-1$ 일 때, $a_{2k-1}=k+1$

$n=2k$ 일 때, $a_{2k}=\boxed{(가)}$ 이다.

한편, $S_n=a_n a_{n+1}$ 이므로

$$S_n=\begin{cases} (k+1)\times\boxed{(가)} & (n=2k-1) \\ \boxed{(나)} & (n=2k) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(6)+g(7)$ 의 값은?

① 65 ② 67 ③ 69 ④ 71 ⑤ 73

130615가 외 1회 # 1138

18번

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 세 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ 의 좌표는 각각 $(-1,0),(1,0),(-1,2)$ 이다.

(나) 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 의 중점과 선분 $\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{P}_{n+3}$ 의 중점은 같다.

예를 들어, 점 P_4 의 좌표는 $(1,-2)$이다. 점 P_{25} 의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

131127가 외 1회 # 1210

19번

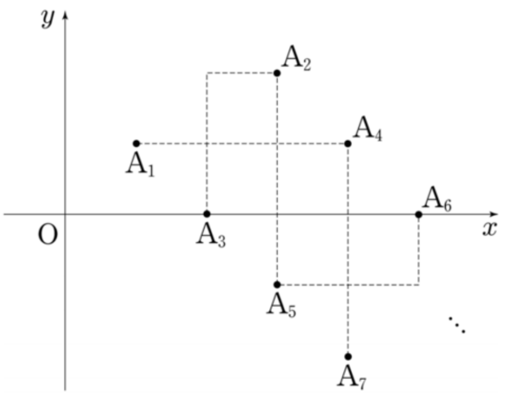
자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1 의 좌표는 $(1,1)$이다.

(나) n 이 짝수이면 점 A_n 은 A_{n-1} 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점이다.

(다) n 이 3 이상의 홀수이면 점 A_n 은 점 A_{n-1} 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점이다.

위의 규칙에 따라 정해진 점 A_k 의 좌표가 $(7,-2)$ 이고 점 A_l 의 좌표가 $(9,-7)$ 일 때, $k+l$ 의 값은?



① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

120617가 외 1회 # 1050

20번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$ 이고,

$$a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{4a_n-1}(n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

모든 자연수 n에 대하여

$4a_{n+1}-1=4\times\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}-1=2-\dfrac{1}{4a_n-1}$ 이다.

수열 $\{b_n\}$ 을

$b_1=1, b_{n+1}=(4a_n-1)b_n \ \ (n \geq 1) \cdots (*)$

이라 하면,

$\vdots$

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$ 이다.

즉, $\{b_n\}$ 은 등차수열이므로 $(*)$ 에 의하여

$b_n=\boxed{(\text{가})}$ 이고,

$a_n=\boxed{(\text{나})}$ 이다.

위의 (가), (나) 에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(14)\times g(5)$ 의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

120919가 외 1회 # 1082

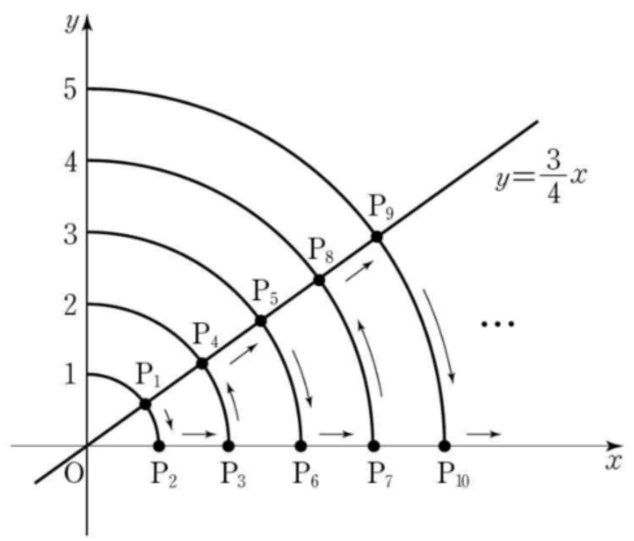
21번

수열 $\{a_n\}$ 의 제 n항 a_n을 $\dfrac{n}{3^k}$ 이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 0$ 이고 $a_6 = 1$ 이다. $a_m = 3$ 일 때, $a_m + a_{2m} + a_{3m} \cdots + a_{9m}$ 의 값을 구하시오.

100922가 외 1회 # 4601

22번

다음 그림은 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1부터 1 씩 증가하는 원들이 두 직선 $y = \dfrac{3}{4}x$, $y = 0$과 각각 만나는 점들의 일부를 P_1 부터 시작하여 화살표 방향을 따라 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots$ 으로 나타낸 것이다.



점 P_{25} 의 x 좌표는?

① $\dfrac{52}{5}$ ② 11 ③ $\dfrac{56}{5}$ ④ 12 ⑤ $\dfrac{64}{5}$

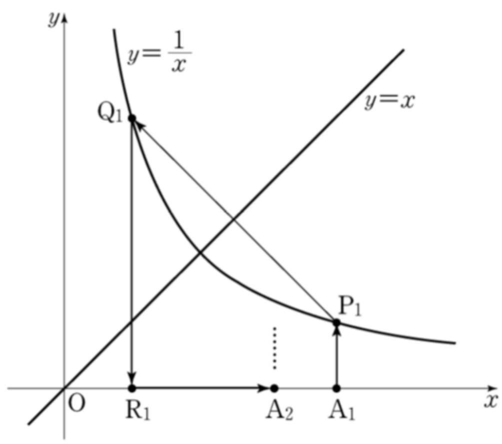
100907나 # 5006

23번

자연수 n에 대하여 점 A_n이 x축 위의 점일 때, 점 A_{n+1} 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1 의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.
(나) (1) 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y = \dfrac{1}{x}(x > 0)$ 과 만나는 점을 P_n이라 한다.
(2) 점 P_n을 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q_n이라 한다.
(3) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R_n이라 한다.
(4) 점 R_n을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 x_n이라 하자. $x_5 = \dfrac{q}{p}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



101122가 외 1회 # 4631

24번

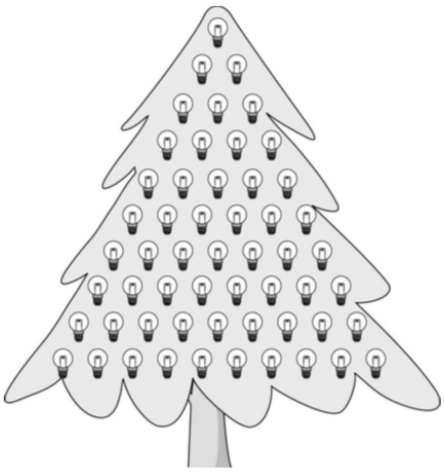
수열 $\{a_n\}$ 이 $a_{n+1}-a_n=2n$ 을 만족시킨다. $a_{10}=94$ 일 때, a_1 의 값은?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

101126나 # 4995

25번

그림과 같이 나무에 55 개의 전구가 맨 위 첫 번째 줄에는 1 개, 두 번째 줄에는 2 개, 세 번째 줄에는 3 개, ..., 열 번째 줄에는 10 개가 설치되어 있다. 전원을 넣으면 이 전구들은 다음 규칙에 따라 작동한다.



(가)
n 이 10 이하의 자연수일 때, n 번째 줄에 있는 전구는 n 초가 되는 순간 처음 켜진다.
(나)
모든 전구는 처음 켜진 후 1 초 간격으로 꺼짐과 켜짐을 반복한다.

전원을 넣고 n 초가 되는 순간 켜지는 모든 전구의 개수를 a_n 이라고 하자. 예를 들어 $a_1=1, a_2=2, a_4=6, a_{11}=25$ 이다.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{14} a_n$ 의 값은?

① 215 ② 220 ③ 225
④ 230 ⑤ 235

090615가 외 1회 # 4714

26번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여

$$a_n=5n+1$$

$$b_1=1, b_{n+1}-b_n=n+1$$

을 만족시킨다. 10 이하인 두 자연수 k, l 에 대하여 a_k 와 b_l 의 곱이 홀수가 되는 순서쌍 (k, l) 의 개수를 구하시오.

090621나 # 5080

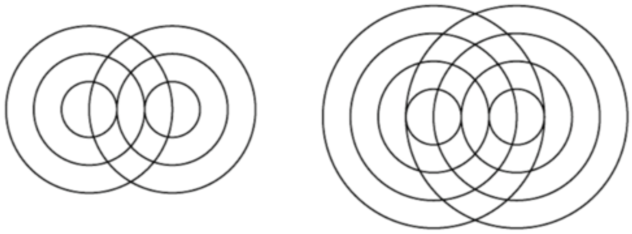
27번

자연수 $n(n\geq 2)$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n 이라 하자. 예를 들어 4 로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5 , 10 , 15 이므로
$a_4=5+10+15=30$ 이다. $a_n>500$을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.

091123가 외 1회 # 4662

28번

거리가 3 인 두 점 O, O' 이 있다. 점 O 를 중심으로 반지름의 길이가 각각 $1, 2, \cdots, n$ 인 n 개의 원과 점 O' 을 중심으로 반지름의 길이가 각각 $1, 2, \cdots, n$ 인 n 개의 원이 있다. 이 $2n$ 개 원의 모든 교점의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어, 그림에서와 같이 $a_3 = 14$, $a_4 = 26$ 이다. a_{20} 의 값은?



30번

자연수 n 에 대하여 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1 의 좌표는 $(1, 1)$ 이다.
(나) 점 P_n 의 좌표가 (a, b) 일 때,
  $b < 2^a$ 이면 점 P_{n+1} 의 좌표는 $(a, b+1)$ 이고
  $b = 2^a$ 이면 점 P_{n+1} 의 좌표는 $(a+1, 1)$ 이다.

점 P_n 의 좌표가 $(10, 2^{10})$ 일 때, n 의 값은?

① $2^{10} - 2$ ② $2^{10} + 2$ ③ $2^{11} - 2$
④ 2^{11} ⑤ $2^{11} + 2$

070916가 외 1회 # 4835

32번

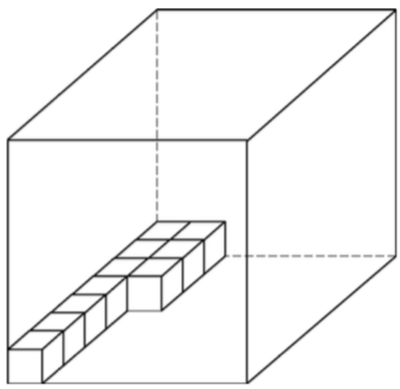
수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값은?

① 1022 ② 1024 ③ 2021
④ 2046 ⑤ 2082

071126나 # 5325

33번

한 변의 길이가 $70\mathrm{cm}$인 정육면체 모양의 상자에 한 변의 길이가 $10\mathrm{cm}$인 정육면체 모양의 나무 블록을 다음 규칙에 따라 빈틈없이 가득 채우려고 한다.



n번째에 넣는 나무 블록의 개수를 a_n이라 할 때,
(가) $a_1 = 10$
(나) $a_{n+1} = \left[\dfrac{a_n}{2}\right] + 3, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
(단, $[x]$는 x를 넘지 않은 최대의 정수이다.)
(다) 상자를 가득 채우면 나무 블록 넣기를 멈춘다.

k번째에 상자를 가득 채웠다고 할 때, k의 값을 구하시오.
(단, 상자의 두께는 무시한다.)

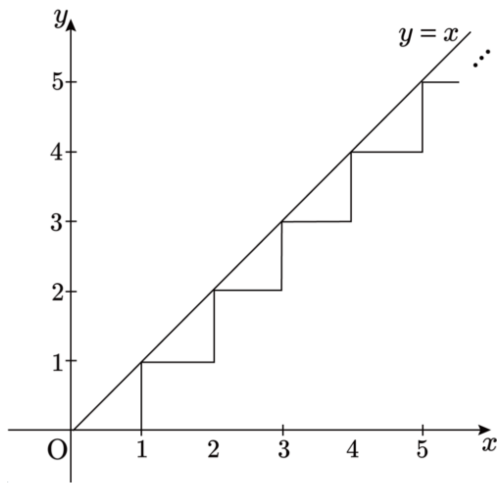
060924가 외 1회 # 6624

34번

좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

i. A_0은 원점이다.
ii. n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들면, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25}, 0\right)$, $\left(1, \dfrac{11}{25}\right)$이다.
자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y = x$위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오.



190929나 # 8270

35번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n a_{n+1} = 2n$$

이고 $a_3 = 1$일 때, $a_2 + a_5$의 값은?

① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{25}{3}$

190911나 # 8252

36번

공차가 0 이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 수열 $\{b_n\}$ 은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$ 일 때, $\frac{b_8}{b_{10}} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

180629나 # 1722

37번

첫째항이 a 인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (-1)^n \times 2 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + 1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 43$ 일 때, a 의 값은?

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

170620나 # 1503

38번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + (-1)^n \times a_n = 2^n$$

을 만족시킨다. a_5의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

200609나 # 9603

39번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 3$ 이고

$$na_{n+1} - 2na_n + \frac{n+2}{n+1} = 0 \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 이

$$a_n = 2^n + \frac{1}{n} \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= a_1 = 3$, (우변) $= 2^1 + \frac{1}{1} = 3$
이므로 $(*)$이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면
$a_k = 2^k + \frac{1}{k}$ 이므로

$$ka_{k+1} = 2ka_k - \frac{k+2}{k+1}$$
$$= \boxed{(가)} - \frac{k+2}{k+1}$$
$$= k2^{k+1} + \boxed{(나)}$$

이다. 따라서 $a_{k+1} = 2^{k+1} + \frac{1}{k+1}$ 이므로
$n = k+1$ 일 때도 $(*)$이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$a_n = 2^n + \frac{1}{n}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(3) \times g(4)$ 의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

140912나 # 1975

40번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = \alpha(\alpha \neq 0)$ 이고, 모든 $n(n \geq 2)$ 에 대하여

$$(n-1)a_n + \sum_{m=1}^{n-1} ma_m = 0$$

을 만족시킨다. 다음은

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha \ (n \geq 1)$$

임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

<증명>
(1) $n = 1$ 일 때, $a_1 = \alpha = \frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!}\alpha$이다.
(2) i) $n = 2$ 일 때, $a_2 + a_1 = 0$ 이므로

$$a_2 = -a_1 = \frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!}\alpha \text{ 이다.}$$

따라서 주어진 식이 성립한다.

ii) $n = k \ (k \geq 2)$ 일 때 성립한다고 가정하고,

$n = k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$0 = ka_{k+1} + \sum_{m=1}^{k} ma_m$$
$$= ka_{k+1} + \sum_{m=1}^{k-1} ma_m + ka_k$$
$$= ka_{k+1} + (\boxed{(가)}) \times a_k + ka_k$$

이므로

$$a_{k+1} = \boxed{(나)} \times a_k = \frac{(-1)^k}{k!}\alpha$$

이다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여
$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 곱을 $f(k)$ 라 할 때, $f(10)$ 의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

110613가 외 1회 # 4532

41번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{n+5}{5}$$

가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$ 일 때,

(좌변)$= \frac{{}_{1}\mathrm{C}_{0}}{{}_{5}\mathrm{C}_{0}} + \frac{{}_{1}\mathrm{C}_{1}}{{}_{5}\mathrm{C}_{1}} = \frac{6}{5}$

(우변)$= \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$ 일 때, 등식

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{m+5}{5}$$

가 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}} = \boxed{(가)} + \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}$$

이다. 자연수 l에 대하여

${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1} = \boxed{(나)} \cdot {}_{l}\mathrm{C}_{k} \quad (0 \leqq k \leqq l)$이므로

$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}} = \boxed{(다)} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$ 이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}} = \boxed{(가)} + \boxed{(다)} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{m+6}{5}$$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : 1 (나) : $\frac{l+2}{k+2}$ (다) : $\frac{m+1}{m+4}$

② (가) : 1 (나) : $\frac{l+1}{k+1}$ (다) : $\frac{m+1}{m+5}$

③ (가) : 1 (나) : $\frac{l+1}{k+1}$ (다) : $\frac{m+1}{m+4}$

④ (가) : $m+1$ (나) : $\frac{l+1}{k+1}$ (다) : $\frac{m+1}{m+5}$

⑤ (가) : $m+1$ (나) : $\frac{l+2}{k+2}$ (다) : $\frac{m+1}{m+4}$

101112가 외 1회 # 4621

42번

수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} = n^2 a_n \ (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

일 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{n}{n+1} \quad \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$ 일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

이므로 $(*)$ 이 성립한다.

(2) $n=m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1}$$

이다. $n=m+1$ 일 때, $(*)$ 이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + a_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{(가)}\, a_m \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} \\ &\quad + \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m+1)} \cdot \cdots \cdot \frac{1^2}{2 \cdot 3} a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{(나)} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} - \boxed{(다)} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \frac{m+1}{m+2} \end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$ 이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다) 에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

① (가) $\frac{m}{(m+1)(m+2)}$ (나) $\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ (다) $\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

② (가) $\frac{m}{(m+1)(m+2)}$ (나) $\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$ (다) $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$

(가) $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$ (가) $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$

③ (나) $\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$

(다) $\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

④ (가) $\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$

(나) $\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$

(다) $\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$

⑤ (나) $\dfrac{m}{(m+1)^2(m+2)}$

(다) $\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

091110가 외 1회 # 4649

43번

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \frac{n(5n+3)}{4}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=2$ 이므로
주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{m}\right) = \frac{m(5m+3)}{4}$$

이다. $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\frac{\boxed{(가)}}{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{\boxed{(나)}}\right)$$
$$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{\boxed{(가)}}{m+1}$$
$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\left(\boxed{(다)}\right)$$
$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $5m-3$ (나) : m (다) : $5k+2$

② (가) : $5m-3$ (나) : $m+1$ (다) : $5k+2$

③ (가) : $5m+2$ (나) : m (다) : $5k-3$

④ (가) : $5m+2$ (나) : m (다) : $5k+2$

⑤ (가) : $5m+2$ (나) : $m+1$ (다) : $5k-3$

061116가 외 1회 # 6664

44번

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$ 이므로 주어진 식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$1\cdot k+2\cdot(k-1)+3\cdot(k-2)+\cdots+k\cdot 1 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$1\cdot(k+1)+2\cdot k+3\cdot(k-1)+\cdots+(k+1)\cdot 1$$
$$=1\cdot k+2\cdot(k-1)+3\cdot(k-2)+\cdots+k\cdot 1 + (1+2+3+\cdots k)+\boxed{(\text{가})}$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\boxed{(\text{나})}$$
$$=\boxed{(\text{다})}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가),(나),(다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① (가): k
(나): $\frac{k(k+1)}{2}$
(다): $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

② (가): k
(나): $\frac{k(k+3)}{2}$
(다): $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

③ (가): k
(나): $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
(다): $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$

④ (가): $k+1$
(나): $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
(다): $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

45번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

자연수 n에 대하여

$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$이라 할 때,

$a_n>1$임을 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$이다.

(2) $n=k$일 때 $a_k>1$이라고 가정하면

$n=k+1$일 때

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$$
$$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\boxed{(\text{가})}$$

한편, $(3k+2)(3k+4)\boxed{(\text{나})}(3k+3)^2$이므로

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\boxed{(\text{다})}$$

그런데 $a_k>1$이므로

$$a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+3}+\boxed{(\text{다})}\right)-\boxed{(\text{가})}>1$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가): $\frac{1}{k+1}$
(나): $>$
(다): $\frac{2}{3k+3}$

② (가): $\frac{1}{k+1}$
(나): $<$
(다): $\frac{2}{3k+3}$

③ (가): $\frac{1}{k+1}$
(나): $<$
(다): $\frac{4}{3k+3}$

④ (가): $\frac{2}{k+1}$
(나): $>$

⑤ (가): $\frac{2}{k+1}$
(나): $<$

46번

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = 3n - 1$$

을 만족시킨다. $a_3 = 4$ 일 때, $a_1 + a_5$ 의 값을 구하시오.

200924나 # 10183

빠른 정답표

1번. 8	2번. 256	3번. ②	4번. ②	5번. 156
6번. ⑤	7번. ④	8번. ②	9번. ①	10번. 513
11번. ④	12번. ①	13번. ①	14번. ①	15번. 46
16번. 255	17번. ③	18번. 23	19번. ①	20번. ①
21번. 31	22번. ①	23번. 21	24번. ②	25번. ⑤
26번. 30	27번. 11	28번. ②	29번. ④	30번. ③
31번. ④	32번. ④	33번. 56	34번. 8	35번. ②
36번. 13	37번. ⑤	38번. ④	39번. ⑤	40번. ⑤
41번. ②	42번. ④	43번. ③	44번. ④	45번. ②
46번. 8				