무리방정식의 무연근은 실체화할 수 있다.

분수방정식과 무리방정식을 풀 때, 무연근을 제외시키는 과정이 반드시 포함된다. 여기서 분수방정식과는 달리 무리방정식에서는 무연근을 그래프에서 교점으로 확인할 수 있다.

$$\sqrt{x} = x-2 \ \cdots \ ①$$

라는 무리방정식을 풀어보자. 여기서 양변을 제곱하면 $x=(x-2)^2$이고, 식을 정리하면 $x^2-5x+4=0$가 된다. 방정식을 풀면

$$(x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

두 값을 첫 무리방정식에 대입해보면 $x=1$은 무연근임을 확인할 수 있다.
여기서 주어진 무리방정식과 제곱한 방정식은

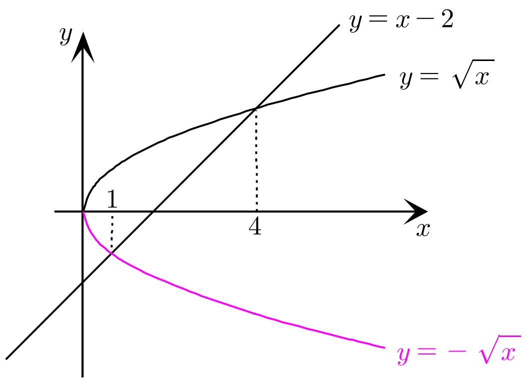
$$\sqrt{x}=x-2 \ \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \ x=(x-2)^2$$

다음과 같이 필요충분조건이 아니다. 여기서 서로 필요충분조건이 두 식은

$$x=(x-2)^2 \ \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \ \begin{cases} \sqrt{x}=x-2 \\ -\sqrt{x}=x-2 \end{cases} \ \cdots \ ②$$

$$\sqrt{x}=x-2 \ \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \ x=(x-2)^2 \ \ (x \geq 2) \ \cdots \ ③$$

두 가지 이다. ②식을 그래프로 그려서 해석해보면



그림에서 보듯이 ②의 방정식 $-\sqrt{x}=x-2$에서 무연근이 생긴 것을 확인할 수 있다. 일반적으로 설명해보면 무리방정식

$$\sqrt{f(x)}=g(x)$$

가 있을 때, 양변을 제곱한 방정식 $f(x)=\{g(x)\}^2$에 대하여

$$f(x)=\{g(x)\}^2 \ \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \ \begin{cases} \sqrt{f(x)}=g(x) \\ -\sqrt{f(x)}=g(x) \end{cases}$$

인데, 아래에 있는 방정식 $-\sqrt{f(x)}=g(x)$[1]에서 무연근이 그래프에서 실체화되어서 나타난다. 따라서 무연근 자체를 묻는 문제가 출제될 수도 있다.

1) $-\sqrt{f(x)}=g(x)$을 만족한다고 모두 무연근인 것은 아니다. $-\sqrt{f(x)}=g(x)=0$을 만족하는 x는 $\sqrt{f(x)}=g(x)$또한 만족하게 되는데, 그 x값은 명백한 주어진 무리방정식의 근이다.

동치전개[2]를 습관화 한다면 정확도를 높일 수 있다.

기출문제에서 봤던 분수방정식

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$$

을 예를 들어 보자. 양변에 $f(x)g(x)$를 곱하면

$$\{f(x)+g(x)\}f(x)g(x)=f(x)+g(x)$$

$$\{f(x)+g(x)\}\{f(x)g(x)-1\}=0$$

이 되는데, 여기서 만약

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow \{f(x)+g(x)\}\{f(x)g(x)-1\}=0$$

가 필요충분하다면 오른쪽 방정식을 풀어서 무연근을 제외시키는 과정[3] 없이 올바른 정답을 낼 수 있다. 하지만 두 방정식은 필요충분조건하지 않다.

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)} \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \{f(x)+g(x)\}\{f(x)g(x)-1\}=0$$

다음과 같고 필요충분조건을 만족시키기 위해서는

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)} \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \{f(x)+g(x)\}\{f(x)g(x)-1\}=0 \quad (f(x)\neq 0,\ g(x)\neq 0)$$

이와 같이 오른쪽 방정식에 (분모$\neq 0$) 조건을 추가하면 된다.

그렇다면, 왼쪽 방정식과 오른쪽 방정식은 명백하게 필요충분조건을 만족하므로 왼쪽 방정식식을 푼 것이나, 오른쪽 방정식식을 푼 것이나 같은 결과가 나오게 된다.

또한 기출 무리방정식

$$\sqrt{f(x)-x}=2f(x)-2x-1$$

에서 $f(x)-x=X$라고 치환하면

$$\sqrt{X}=2X-1 \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} X=(2X-1)^2$$

단순히 이렇게 전개해서 문제를 풀게 되면 반드시 “무연근 확인”과정을 거쳐야한다.

$$\sqrt{X}=2X-1 \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} X=(2X-1)^2 \ \left(X\geq \frac{1}{2}\right)$$

하지만 이런 식으로 필요충분조건을 이용한다면 “무연근 확인”과정은 생략해도 된다. 즉, **시험문제를 풀 때, “동치전개”를 습관화 하고 “무연근 확인”과정도 꼭 하길 바란다. 그렇다면 “실수”할 확률을 극도로 낮출 수 있을 것이다.**

분수방정식의 동치변형 : $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \ \ (g(x)\neq 0)$

무리방정식의 동치변형 : $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=\{g(x)\}^2 \ \ (g(x)\geq 0)$

2) 동치
수학에서 동치(同値)란 두 문장(혹은 식)이 논리적으로 같다는 것을 의미한다. 즉, 필요충분조건과 같은 의미로 사용된다.

3) 만약, 정리한 오른쪽 식과 왼쪽 식이 필요충분조건을 만족한다면 **“무연근 확인”**이라는 특별한 절차는 필요 없다. 필요충분조건이란 똑같은 식을 의미하기 때문인데, **“무연근 확인”**을 해야 하는 이유는 두 방정식은 명백히 다른 방정식이기 때문이다.

고차부등식을 해결하기 위한 고차함수의 그래프

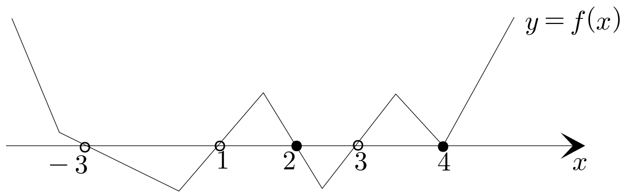
분수부등식 문제를 해결할 때 통분하여 동치변형하게 되면 고차부등식을 얻게 된다. 이러한 고차부등식을 해결할 때, CP 03과 같이 그래프를 그려서 해결하는 것이 가장 바람직하다. 하지만 정밀한 그래프보다, 양수인지 음수인지 부호만을 정확하게 나타내는 그래프면 충분하다. 일단, 아래의 분수부등식을 해결해보자.

$$\frac{|x-1|(x-2)(x-4)^2(x^2-x+1)}{(x-1)(|x|-3)} \leq 0$$

위의 분수부등식을 동치변형하면 아래와 같다.[4)]

$$(|x|-3)(x-1)(x-2)(x-4)^2 \leq 0 \quad (x \neq 1, x \neq \pm 3)$$

$f(x)=(|x|-3)(x-1)(x-2)(x-4)^2$라 하면 $\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$이므로 x축의 양의 방향부터 그려나가면서, $x=4$에서 부호가 변하지 않고, $x=2$, $x=1$, $x=\pm 3$에서 부호가 변화 하는 것을 고려하면 아래와 같이 그려진다.



따라서 부등식의 해는 $-3<x<1$, $2 \leq x<3$, $x=4$이다.

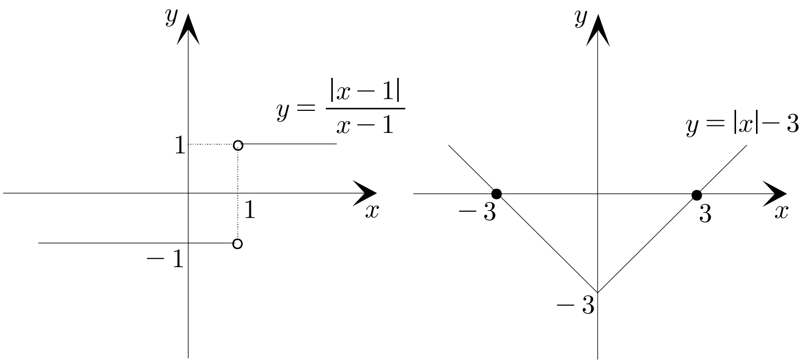
그런데 여기서 분수부등식 $\frac{|x-1|(x-2)(x-4)^2(x^2-x+1)}{(x-1)(|x|-3)} \leq 0$을 만났을 때, 부호변화에 대해서 숙달이 된다면 위의 분수부등식을 본 상태에서 바로 위의 그래프를 그려낼 수 있을 것이다. 또한 부호변화를 판단할 때 **개별 그래프**를 그려서 판단하는 것이 가장 좋다.

위에서 $(x-2)$는 부호가 변하고, $(x-4)^2$, (x^2-x+1)은 부호가 변하지 않음을 쉽게 알 수 있다. 하지만 $\frac{|x-1|}{x-1}$과 $|x|-3$에 대해서는 부호변화에 대한 판단이 쉽지 않은데, 함수 $y=\frac{|x-1|}{x-1}$과 $y=|x|-3$의 그래프를 따로 그려보면 아래와 같

4) $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 이므로 바로 약분 가능하다.

으므로 $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$은 $x=1$에서 부호가 변하지만 함숫값이 0이 되지 않고,

$y=|x|-3$은 $x=\pm 3$에서 부호가 변하고 함숫값도 0이 됨을 알 수 있다.



따라서 $\dfrac{|x-1|(x-2)(x-4)^2(x^2-x+1)}{(x-1)(|x|-3)} \leqq 0$이 출제 되었을 때,

$x=4$, $x=3$, $x=2$, $x=1$, $x=-3$에 대한 부호변화를 판단하면서 바로 그래프를 그려서 문제를 해결하면 된다.

(단 $x \neq 1$, $x \neq 3$임을 주의하면서 그려야 한다.)

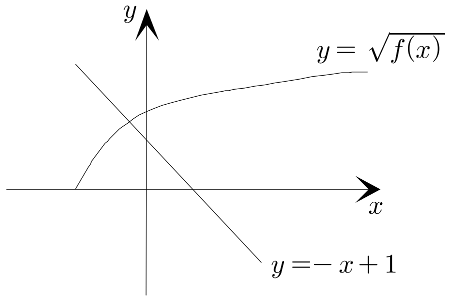
이처럼 분수부등식이 출제 되었을 때, 동치변형을 하지 않고 부호변화만을 생각하면서 그래프를 바로 그려내서 해결하면 빠른 문제 풀이가 가능하다.

(단, 분모 $\neq 0$임을 주의하면서 그려야 한다.)

아래는 여러 가지 인수에 대한 $x=a$에서의 부호변화 여부, 함숫값이 0이 되는지의 여부이다.

	부호변화	0이 된다
$(x-a)$ $(x-a)^3$ $\vdots$	○	○
$(x-a)^2$ $(x-a)^4$ $\vdots$	×	○
$\lvert x-a\rvert$ $\lvert x^2-2x-3\rvert$ $\vdots$	×	○
$\lvert x\rvert-a$	○	○
$\dfrac{\lvert x-a\rvert}{x-a}$	○	×
$x-a+\dfrac{1}{x-a}$	○	×
$x^2\pm x+1$ x^2-2x+2	×	×

01. 함수 $y=\sqrt{f(x)}$의 그래프가 아래와 같다.



무리방정식 $\sqrt{f(x)}=1-x$를 풀면 나오는 실근 α와 무연근 β에 대하여 $\alpha+\beta=5$라 한다. $\sqrt{f(\beta)}-\sqrt{f(\alpha)}$를 구하시오.

02. 다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고르시오.

〈보 기〉

ㄱ. $(x-\alpha)^{2012}f(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)<0$

ㄴ. $(x-\alpha)^{2011}|x-\beta|f(x)\geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-\alpha)f(x)\geqq 0$

ㄷ. $\dfrac{f(x)}{|x-\alpha|}\leqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-\alpha|f(x)\leqq 0$

03. 무리방정식 $\sqrt{x}+x-1=0$의 근을 α라 하고, 무리방정식 $-\sqrt{x}+x-1=0$의 근을 β라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르시오.

<보 기>

ㄱ. $0<\alpha<\beta$

ㄴ. $\alpha\beta=1$

ㄷ. $|\beta-\alpha|^2=5$

04. 무리방정식 $f(x)=g(x)$에 대하여 집합 $\{x\,|\,f(x)=g(x)\}$의 원소는 α, 집합 $\left\{x\,|\,\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2\right\}$의 원소는 α, β라 한다. 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르시오.

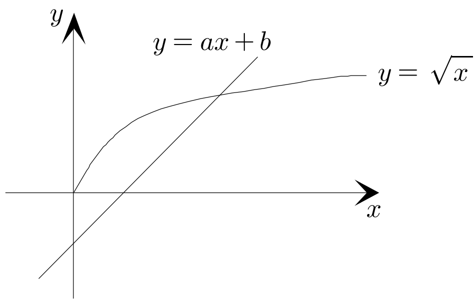
<보 기>

ㄱ. β는 무리방정식 $f(x)=g(x)$의 무연근이다.

ㄴ. $f(\beta)+g(\beta)=0$

ㄷ. $f(\alpha)f(\beta)=-g(\alpha)g(\beta)$

05. 무리함수 $y=\sqrt{x}$, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 아래와 같다.



무리방정식 $\sqrt{x}=ax+b$의 실근이 9이고 무연근이 1이라고 한다. 곡선 $y=-\sqrt{x}$와 직선 $y=ax+b$의 교점의 y좌표를 구하시오.

06. 아래의 분수부등식을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.

$$\frac{|x-1|(x-2)(x-4)^2(x-6)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)}{(x-1)(|x|-5)\left(x^2-2x+2\right)}\leqq 0$$

이 특강의 목표

1. 무리방정식의 무연근 관련 문제를 해결할 수 있다.
2. 동치전개를 습관화해서 방정식과 부등식 문제의 실수 확률을 줄인다.
3. 분수부등식과 고차부등식은 그래프의 개형으로 쉽게 해결할 수 있다.

저자의 특강 *Tip*

심화특강의 문제는 스피드 해법으로만 해설하니
[수능적 해법]은 반드시 스스로 공부해야 해.

빠른 정답

심화특강01 정답	
01	3
02	ㄱ
03	ㄱ,ㄴ,ㄷ
04	ㄱ,ㄴ,ㄷ
05	-1
06	8

심화특강02 분수식의 정리 방법

가분수의 정리

분수식 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$이 있을 때, 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\{f(x)\text{의 최고차수}\} \geq \{g(x)\text{의 최고차수}\}$$

를 만족하면 “가분수”라고 정의하겠다.
수학문제를 풀 때, 가분수를 만나게 되면 분자의 차수가 분모의 차수보다 낮아지도록 식을 정리하면 쉽게 풀리는 경우가 매우 많다. (10에 8은 문제가 더 쉬워진다.)
분수식

$$\frac{x^2+x+1}{x-2}$$

을 간단하게 정리해보자. 여기서 대부분의 학생들이 x^2+x+1을 $x-2$로 나누기 위해서

$$\begin{array}{r l}
 & \phantom{x^2+{}}x+3 \\ \cline{2-2}
x-2\,) & x^2+x+1 \\
 & \underline{x^2-2x} \\
 & \phantom{x^2+{}}3x+1 \\
 & \phantom{x^2+{}}\underline{3x-6} \\
 & \phantom{x^2+3x+{}}7
\end{array}$$

다음과 같이 나눗셈을 해보면 $x^2+x+1=(x-2)(x+3)+7$임을 알 수 있고,

$$\frac{x^2+x+1}{x-2}=\frac{(x-2)(x+3)+7}{x-2}=\frac{7}{x-2}+x+3$$

이렇게 하는데, 이런 학생들은 고1때 배운 “조립제법[1)]” 의의를 다시 한 번 기억해야 한다. 이제 조립제법을 활용해서 나눗셈을 해보면

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 2 & 6 \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{7}
\end{array}$$

이므로 $x^2+x+1=(x-2)(x+3)+7$임을 매우 빠르게 알 수 있다.
이처럼 “일차식”으로 나눌 때는 반드시 조립제법을 활용하도록 하고, “이차식 이상”으로 나눌 때는 어쩔 수 없이 처음에 한 것처럼 직접 나누는 수 밖에 없다.

1) 조립제법은 다항식을 “일차식”으로 나눌 때, 빠르게 나눌 수 있는 방법이다. 그렇게 기억하고 있어야 제대로 활용할 수 있다. 여러분들이 인수분해에서 사용하는 조립제법은 나머지가 0인 경우인데, 평소에 그런 문제에서만 조립제법을 쓰게 되어 원래 조립제법의 의의인 “일차식”으로 나누는 법을 잊어버린 것이다.

부분분수의 빠른 분해 - 헤비사이드의 방법

$$\frac{1}{x(x+1)},\ \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

과 같은 식을 부분분수 분해할 때 대부분

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$
$$\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$$

이 두 가지 공식을 활용해서 분해를 한다. 그런데 여기서 새로운 방법을 배워보자. 일단

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{\triangle}{x}+\frac{\bigcirc}{x+1}$$

라고 쓴다. 그런 다음 $\dfrac{\triangle}{x}$의 $\triangle$를 구할 때, $\dfrac{1}{x(x+1)}$에서 x를 손가락으로 가리면 $\dfrac{1}{\square(x+1)}$ 이고 여기 $\dfrac{\triangle}{x}$의 분모를 0으로 만드는 x값, 즉 $x=0$을 대입하면 $\dfrac{1}{\square(x+1)}=\dfrac{1}{(0+1)}=1$이 된다. 이 값이 곧 $\triangle$의 값이다. 따라서 $\triangle=1$

마찬가지로 $\dfrac{\bigcirc}{x+1}$의 $\bigcirc$을 구할 때, $\dfrac{1}{x(x+1)}$에서 손가락으로 $x+1$을 가리면 $\dfrac{1}{x\boxed{\quad\quad}}$이고 마찬가지로 $\dfrac{\bigcirc}{x+1}$의 분모를 0으로 만드는 x값, $x=-1$을 대입하면, $\bigcirc=-1$임을 알 수 있다. 따라서

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}$$

이다. 마찬가지로

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{\triangle}{x}+\frac{\bigcirc}{x+1}+\frac{\bigstar}{x+2}$$

라고 한 후, $\dfrac{1}{\square(x+1)(x+2)}$에 $x=0$을 대입하면 $\triangle=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{x\boxed{\quad\quad}(x+2)}$에 $x=-1$을 대입하면 $\bigcirc=-1$

$\dfrac{1}{x(x+1)\boxed{\quad\quad}}$에 $x=-2$를 대입하면 $\bigstar=\dfrac{1}{2}$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{x+2}$$ [2)]

이 된다.

2) $\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx$과 같은 적분문제에서는 이런 식으로 분해하는 것이 좋다. 하지만 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$과 같은 극한 문제를 풀 때는

$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

라는 분해를 활용하는 것이 편하다. 이것도 마찬가지로 손가락 가리기 방법을 이용할 수 있다.

$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{\triangle}{n(n+1)}+\dfrac{\bigstar}{(n+1)(n+2)}$

라고 한 후,

마찬가지로 $n(n+1)$을 손가락으로 가리면 $\dfrac{1}{n+2}$인데

$n=0$을 넣을지 $n=-1$을 넣을지 고민이 된다. 여기서 $n=-1$은 뒤에 항과 공통이 되므로 $n=0$을 넣으면 된다. 따라서

$\triangle=\dfrac{1}{2}$이고 마찬가지로

$\bigstar=-\dfrac{1}{2}$이 된다.

마찬가지로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}$임을 증명해보길 바란다.

이러한 방법을 손가락 가리기 법(헤비사이드의 방법)이라고 부른다. 간단한 근거를 들어보면,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{\triangle}{x} + \frac{\bigcirc}{x+1} \quad \cdots \ ①$$

에서 $\triangle$를 구하기 위해 양변에 x를 곱하면

$$\frac{1}{x+1} = \triangle + \frac{\bigcirc}{x+1} \times x \text{ [3]} \quad \cdots \ ②$$

이고, 양변에 $x=0$을 대입하면 $1=\triangle$임을 알 수 있다.

이제 $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$을 분해해보자.

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{\triangle}{x} + \frac{\bigcirc}{x+1} + \frac{\bigstar}{(x+1)^2} \text{ [4]} \quad \cdots \ ③$$

여기서 $\triangle$는 마찬가지로 $\dfrac{1}{x(0+1)^2} = 1$로 구할 수 있고,

$\bigstar$ 또한, $\dfrac{1}{(-1)\boxed{}} = -1$로 구할 수 있다. 이제 $\bigcirc$를 구해야 하는데, 일단 $\bigstar$를 구할 때와 마찬가지로 $(x+1)^2$을 가린 분수식 $\dfrac{1}{x}$을 한 번 미분해서 $x=-1$을 대입하면 된다. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$에 $x=-1$을 대입하면 $\bigcirc = -1$임을 알 수 있다. 근거는 ③식에 $(x+1)^2$을 곱해서 양변 미분해보면 알 수 있다.

마찬가지로 $\dfrac{1}{x(x+1)^3}$을 분해해보길 바란다.[5]

이번에는 $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}$을 분해해보자.

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{\triangle}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

에서 $\triangle = -1$이고, $x^2+x+1=0$을 만족하는 근을 w라 하면

$$\frac{w}{(w+1)\boxed{}} = aw+b$$

3) 사실 ①과 ②식은 동치가 아니다. ②식에 $x \neq 0$이 추가되면 동치라고 할 수 있는데, 사실 $x=0$을 대입 한거 보다, $x \to 0$이라는 극한으로 하면 더 논리적이지만 간단한 설명을 위해 생략한다.

4) 원래 보통 부분분수 분해 할 때, 이차식 분모에 대해서는 다음과 같이 일차식 분자를 잡아야한다.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+3}$$

여기서 a는 헤비사이드의 방법으로 쉽게 찾은 후 통분하여 계수비교를 하면 $bx+c$를 찾을 수 있다.

5) 정답

$$\frac{1}{x(x+1)^3} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^3}$$

에서 $\frac{w}{w+1}=aw+b$인데, $w^2+w+1=0$와 $w^3=1$을 활용하면

$\frac{w}{w+1}=-\frac{1}{w}=-w^2=w+1$이므로, $a=b=1$이다. 따라서

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{-1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

의 결과를 얻을 수 있다.
마지막으로 앞서 배운 방법을 활용하면

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{(x+1)^2}$$
$$\frac{x+1}{x^2(x+2)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{(x+2)^2}$$

임을 알 수 있는데, 여기서 $2x+1=(x)+(x+1)$과 $x+1=\frac{1}{2}\{(x)+(x+2)\}$ (분자는 분모의 인수 합의 상수배로 표현된다)임을 생각해서 일반화 시켜보면

$$\frac{a\{(x+p)+(x+q)\}}{(x+p)^2(x+q)^2}=\frac{\qquad}{(x+p)^2}+\frac{\qquad}{(x+q)^2}$$ [6)]

다음과 같이 분모의 두 일차식의 합의 상수배가 분자에 있으면, 일차항 분모를 생략하고 분해를 해도 상관이 없다는 것을 알 수 있다.
이때까지 배운 분해법은 분자의 차수가 분모의 차수보다 반드시 낮을 때 (즉, 가분수가 아닐 때) 사용하길 바란다. **이제 앞서 배운 가분수의 정리 방법과 부분분수 분해 방법을 같이 사용하면 모든 분수식을 깔끔하게 정리해나갈 수 있다.**

6) 암기해도 되지만, ③에서 배운 원리대로 풀어도 상관없다. 시간을 단축하고 싶다거나, 아직 좀 더 머리에 공간이 있다면 암기하도록 하자.

Actual Fight 분석 및 해제 20쪽

01. 다음 분수방정식을 풀어라.

(1) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+6}{x-3}$

(2) $\frac{6}{x-2}-\frac{24}{x^2-4}=1$

(3) $\frac{x}{x-2}+\frac{x-6}{x-4}=\frac{x-10}{x-8}+\frac{x-4}{x-6}$

02. 다음 분수방정식의 근이 존재하지 않기 위한 조건을 구하시오.

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}+\frac{2a}{x^2-a^2}=1$$

03. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고,

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \ (n \geqq 1)$$

을 만족시킨다. $a_{20} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [2010.9]

04. 다음 급수의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3n+5}{n(n+1)} \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$

05. 분수방정식

$$\frac{x^2+x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}-2$$

의 모든 실근의 합은? [2009.6]

이 특강의 목표

1. 모든 분수식을 빠르게 정리할 수 있다.
2. 헤비사이드의 방법을 논리적으로 설명할 수 있다.

저자의 특강 *Tip*

기본적인 헤비사이드만 익히고
허수나, 제곱과 같은 어려운 헤비사이드는
논리적으로 유도만 할 줄 알아도 충분해.
물론 **유도를 자주해봐서 자연스레 외워지는 것이 최고**지만 ^^

빠른 정답

심화특강02 정답	
01-(1)	$x=0$ or $x=\frac{4}{3}$
01-(2)	$x=4$
01-(3)	$x=5$
02	$a=-1$
03	39
04-(1)	$\frac{3}{4}$
04-(2)	2
04-(3)	1
04-(4)	$\frac{1}{3}$
05	-2