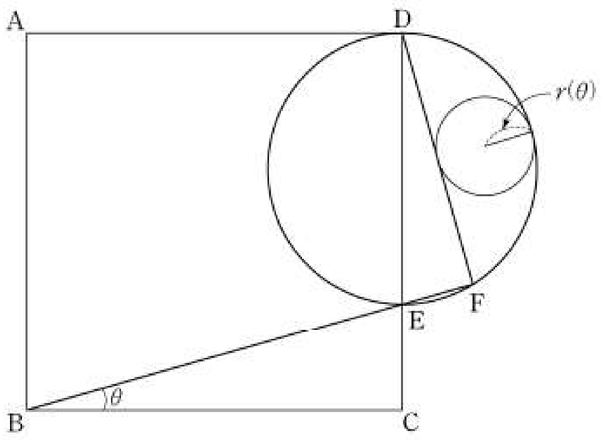
삼각함수의 극한, 다 맞고 가자!

삼각함수의 극한을 푸는 데에는 크게 두가지 과정이 필요하다.
1. 문제에 제시된 길이/각도 구하기
2. 극한 구하기
미적분을 처음 시작하는 친구들은 1,2번 모두 버벅대는 경우가 많다.
그러나 수학 가형이 1~2등급 나오는 친구들은 이것을 껌으로 여기며 쉽게쉽게 풀고 나가는 경우가 대다수이다. 그렇기에
'내가 아직 1~2등급이 안나온다',
'삼각함수의 극한이 아직 나에게는 너무 버겁다'
싶은 학생들은 한번씩 꼭 읽어주길 바란다!
※참고로 짧다면 짧고 길다면 길 칼럼이다. 세줄이상 안 읽는 친구들은 종이 낭비하지말고 이 글의 존재 자체를 그냥 잊어버리자.

일단 문제하나로 예시를 들어 적용시켜보자.

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$

④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

[그림1]2017학년도 9월 평가원_20번

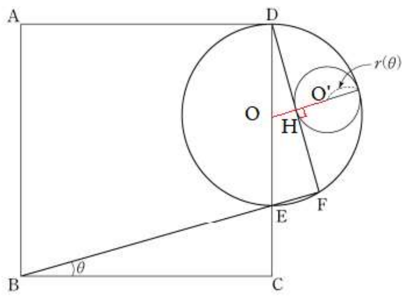
I. 길이/각도 구하기

1. 보조선의 중요성

과외를 하다보면, 여러 단계에서 막히는 학생들을 볼 수 있다.
그 중에서 가장 많은 학생 유형은 “보조선을 못그려서 못푸는 경우”이다.
도형에서 길이나 각도를 구하기 위해 각각의 관계를 확인해야할 때가 있다.
관계를 확인하지 않고, 문제에 제시된 것만 덜렁 보면 절대 우리가 구하고자 하는 것을 얻어낼 수 없다.
관계를 발견하는 것이 핵심이다. 그리고 그 관계를 발견하게 해주는 것이 바로 보조선이다.

<가장 중요한 보조선> a. 두 원의 중심을 잇는 선 b. 원에서 접점까지 이어준 선(외접, 내접 etc) b*. 원에서 접선(직선인 case)까지 내려준 수선

원이 위의 모든 케이스에 포함이 되는 이유는
거의 모든 삼각함수의 극한 문제에는 원이 등장하기 때문이다.
원은 삼각함수가 등장하기에 가장 적합한 형태이다.
이 세가지 보조선은 문제를 보자마자 바로 그려주도록 하자.



[그림2_O와 O’는 큰원과 작은원의 중점. H는 O’에서 선분DF에 내린 수선의 발이다.]

2. 구하는 것을 구하기 위해 구해야 할 것을 찾아라.

너가 구해야하는 것만 찾아라.
괜히 쓸모없고 애꿎은, 억지로 그린 삼각형의 세 변의 길이를 구하려고 시간 낭비하지 말아라.
우리는 다음의 과정으로 하나씩 구해나갈 것이다.
$r(\theta)$-> 큰원의 반지름R과 $\overline{OO'}$의 길이->$\overline{OH}$의 길이->…
점점 구해야하는게 많아지면서 하던 것을 잊고 뜬금없이 $\overline{DH}$나 $\overline{DF}$나 $\overline{EF}$를 구하지 마라. 그럴 시간에 이미 너의 경쟁자들은 21 29 30을 풀고 있다.

3. 주어진 조건을 적용시켜라.

너무 당연한 말이다. “주어진 조건”을 활용해야 한다. 간혹가다 그냥 아무생각없이, 문제에 도형이 어떤 관계에 있는지 다 적어줬는데 싹 다 무시하고 그냥 그림 그대로 풀어버리려는 바보같은 학생들이 있다. 이건 내가 개인적으로 가장 하고 싶었던

말인데, 수능 도형 해석은 "미술작품 해석하기"가 아니다. 해석은 문제에 다 제시되어 있다. 우리는 개떡같이, 존나 성의없게 제시된 해석을 찰떡같은 해석으로 바꿔줘야 한다. 무슨 말이냐 싶을 수 있다.

문제에서는 작은 원을
①[호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원]이라고 정의했다. 졸라 성의없어보이는 이 해석을 우리는
②[$\overline{DF}$와 큰 원에 동시에 접하는 원]이라고 해석하고, 다시
③[큰 원의 반지름의 길이와 작은 원의 지름의 차는 $\overline{OH}$다] 로 바꾸고, 그걸 수식으로 적어낼줄 알아야 한다.

4. 그래도 도저히 안풀린다! 할 때

보조선도 써봤고, 다양한 방식으로 해석도 다 해놨다.
그런데도 안풀리는 문제들이 분명히 있을 것이다.

<도저히 구할수 없을 때> a. 피타고라스의 정리 b. 중학수학 이용하기(feat. 닮음&합동) c. 다 지워보고 2번부터 다시 보기

차례로 얘기해보자.

a. 말로만 들으면 정말 어이없을 수 있다.
하지만 우리는 가끔 좀 더 낮은 차원에서 접근할 필요가 있다.
하도 킬러타령하다보니 막상 풀어보면 쉬울 문제를 너무 어렵게 푸는 친구들이 있다. 웃고 넘길일이 아니다. 너에게도 충분히 일어날 일이다. 모두에게 종종 발견되는 경우다.
풀리지 않는다는걸 뻔히 알면서, 억지로 각도의 관계를 알아내서 삼각함수로 길이 나타내려고 하는 등의 똥꼬쇼는 멈춰라.
보통 그럴때는 그냥 수선 내려서 직각인 삼각형을 만들고, 피타고라스를 적용하면 된다.
막상 적용하려고 할 때 잘 적용되지 않는 코사인의 법칙도 사실 ~~개좁밥~~ 피타고라스의 정리를 이용해서 유도해낸 공식이 아닌가?
이것에 대한 예시는.. 직접 찾아보자. 분명히 하나 나온다.

b. 이건 중학교수학 때부터 많이들 겪었던 난관일거다.
분명 피타고라스의 정리를 이용해서 풀면 될 것 같은데 자꾸 방정식들이 제자리로 빙빙돌아서 난처했던적 있을 거다. 보통 그럴때는 합동/닮음을 찾아내서 풀면 바로 풀렸을 것이다. (필자의 경우 중학생 때 영어학원 뒷자리에서 수학숙제를 하다가 이런문제를 봤었던 기억이 선명히 난다.)
안풀리면, 직각삼각형 안의 직각 삼각형. 맞꼭지각, 엇각, 반드시 확인하면서 닮음/합동의 가능성을 찾아보자. 분명히 실마리가 있을 것이다.
위의 경우에도 닮음/합동인 것을 발견하지 못했다면 결코 풀지 못했을 문제이다.
여기에서 맞꼭지각을 보자마자 "아 닮음/합동인가??" "$\triangle BCE$랑$\triangle DFE$는 닮음이네!" 하면서 풀어내는 과정은 필연적이어야 한다. 그래야 2등급은 나온다.

c. 니가 너무 더럽게 풀면 문제가 가려지니까 당연히 안보인다.
더럽게 푸는게 나쁜건 아니다. 도형문제를 풀다보면 당연히 이런저런 보조선을 그리고, 길이와 각도를 표시하다보니 그림이 더러워지는건 너무 당연하다.
하지만 당연하다고 해서 못푸는건 당연하지 못하다.
합리화할 생각 하지 말고 일단 지워라.
"아니 힘들게 다 그려놓은 보조선 왜 다 지움?? 보조선 그린거랑 길이, 각도 쓴거 다까먹으면 어떡함???"
이라고 생각하는가?
기우다. 그냥 지워라.
어차피 도움이 될 길이와 보조선이었으면 진작에 풀렸다. 피차 도움이 안되니 그냥 과감하게 지워라.
지금 필요한 것은

~~3d로 보는것이다~~ 다르게 보는 것이다. 즉, 큰 그림을 보는 것이다. 3번에서 언급한 바와 같이, 그림이 너무 더러워지게 되면 그림 자체에 집착하게 된다. 그 집착을 과감히 버려야 수능에서 삼각함수 극한을 맞는다.
그리고 진짜 중요한 요소는 바로 도출해낼 수 있거나 너가 기억한다. 장담한다. 제발 걱정하지 말고, 이대로만이라도 연습해줘라.

5. 연습은 치밀하게, 실전은 과감하게

필자가 가르친 학생중에서 스스로 수학 감각이 뛰어났"다고 믿었"던 학생이 있었다. 문제를 풀릴 때 도형의 관계, 닮음관계, 각도 관계 등을 잘 찾아냈던 학생이 있었다.
그런데 그 친구는 잘 "찍은"거지, 잘 "푼"게 아니다.
아무런 근거없이 도형의 관계를 맞춘 것은 너의 실력에 하등 도움이 안된다.
삼각함수의 극한 문제를 풀 때, 도형의 관계를 찍어서 맞췄다면, 그 관계가 어떻게 성립하는것인지 아주 정밀하게 파고들기를 부탁한다. 맞췄어도 찝찝하면 파고들어라.

+)공부를 할 때에는 과목을 막론하고 맞춘 문제보다 틀린 문제가 더 중요하다.
답을 찍어서 맞췄다->틀린 문제
맞췄는데 풀이가 애매한 것 같다->틀린 문제
중간에 막힌 풀이를 뭉개서 풀었다->틀린 문제
저번엔 맞췄는데 이번에는 틀렸다->틀린 문제
단원 이름에 착안하여 발상을 했다->틀린 문제
니 스스로 정확한 논리로 아주 엄밀하게 풀어낸 문제가 아니면 그냥 다 틀린 문제다.
특히 수학의 경우에는 양치기만큼이나 오답공부가 중요하다.
너의 허점을 파고들지 못하면 그건 공부가 아니다.
(앉아있어서, 배고파서 힘든거 말고)힘들어야 진짜 공부다.
마음이 아프고 심란하고 막 짜증나야 한다.
그렇게 꼼꼼하게 해야 비로소 너의 실력은 향상할 것이다.
"님 찍는것도 실력임 ㅋㅋ"
맞다. 하지만 그건 너의 수능실력이 아니고 감각실력이다.
감각실력은 랜덤확률로 수능 때 등장한다. 찍신은 믿지 말자.. 제발.. 데우스 엑스 마키나다..
(다음에 이것과 관련해서 수학공부법에 대해 다뤄보도록 하겠다. 미리 구독 좋아요 부탁드립니다 헥헥)

+)실수하기 좋은 포인트
a. 삼각형의 넓이는 나누기 2
a*. 이미 나누기 2 했으면서 또 하는 멍청이 ~~나임ㅎ~~ 가 있다.
b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ 인데, 변형으로 $\frac{x}{2}$나 $2x$가 나올 때 정확하게 구하는 연습 미리 하자.
c. 수직이등분선을 통해 두 개로 나누어 구하는 경우 다시 2 곱하는거 잊지 말자.

등등 실수는 어떻게든 발생할 수 있으니 조심하자.
실수 많이하는 사람들은 오르비 김지석 선생님의 "실수 줄이는 법" 칼럼이 있으니 한번씩 꼭 정독해주길 바란다.
-이외에도 실수하는 걸 줄이는 다른 방법이 궁금하다면 다음 칼럼을 기다려주시면 감사하겠습니다♡

II. 극한 쉽게 구하기

분명 II를 읽어보는 학생 중에서 "극한 구하는게 머가 어렵노 아 ㅋㅋ" 하는 친구들이 있을거다.
둘 중 하나다. 좁밥이거나 이미 많이 풀어본 애일거다.
이 글이 필요해서 읽는 학생들 대부분은 좁밥인 케이스일거다.
비하하는게 아니고, 진짜 그렇다. 진짜 쉽다 생각한다면 아래 극한들을 각각 눈풀 5~7초 이내에 풀어봐라.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\pi \cos^2\theta}{(\frac{\pi}{2}-\theta)^2 \sin^3\theta}$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{2\theta}{\frac{2\sin\theta\cos\theta \cdot (\pi-\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}}$$

못풀면 넌 좁밥이 맞다.

이런 더러운 식을 보면, 극한을 많이 다뤄보지 않은 학생의 경우 당황하기 마련이다. 그럼 그 기다란 식을 변형하려고 다시 쓰고, 또 쓰면서 어느새 비좁아진 공간을 보며 '시험지가 작은 탓이다 ㅅㅂ'를 시전할 것이다.
작은 시험지를 탓하지 말고, 나를 과외선생님으로 두지 않은 것을 탓해라!ㅈㅅ

1. 특정 값이 되는 값은 바로 바꿔주기

위의 예시를 보면, 곱해지는 것 중에서 0이아닌 상수로 수렴하는 것들이 있다.(ex. 첫번째 극한의 $\sin^3\theta$와 두 번째 극한의 $\pi-\theta,\ 1+\sin\theta+\cos\theta$)

얘들은 무조건 상수로 미리 바꿔주자. 만약에 문제에 묶어낼 수 있는 $\frac{\sin x^n}{x^n}$, $\frac{\tan x^n}{x^n}$ $\frac{1-\cos x}{x^2}$ 등이 있다면 얘들도 같이 숫자로 바꿔놓자.

그리고 어차피 1로 수렴하는 것들을 곱해서 (ex.$\lim_{x\to 0}\cos x$) 번분수를 없애줄거면 그냥 분자 분모 다 곱하지 말고 필요한 곳에만 곱해라.

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}$ 의 경우에도 바보같이 분자 분모에 다 cosx를 곱하지 마라. 분자에만 곱하면 된다.

2. 각도를 정확하게 구할수 없을때는 삼각함수 극한 이용하기

가끔 각도 f(θ)가 있을 때 $\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta}$ 를 구하라는 문제가 나온다.

"아니 tq 각을 식으로 표현 못하는데 어떻게 푸냐 이걸 tqtq"하지말고,
우리가 배운 삼각함수의 극한을 이용해서 살짝만 변형하면 된다.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(f(\theta))}{\theta}\cdot\frac{f(\theta)}{\sin f(\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(f(\theta))}{\theta}\cdot 1=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(f(\theta))}{\theta}$$

이렇게 하면 각도를 길이로 변환했기 때문에 바로 풀어낼 수 있다.

3. 미분계수의 정의 이용하기

x가 0이아닌 다른 값으로 수렴하는 경우가 있다. 이럴때는 0으로 가는 극한으로 아예 치환해서 푸는 방법도 있지만, 미분계수의 정의를 이용해서 바로 푸는 방법 또한 나쁘지 않다.
제일 처음에 제시했던 [그림1]의 문제 또한 미분계수의 정의를 이용해서 풀 수 있다.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{\frac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$ = $\{\frac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)$ 의 $x=\frac{\pi}{4}$ 에서의 미분계수$\}$이다.

4. 방해물을 없애자

이건 보통 논술을 할 때 자주 쓰이는 방법이다. 수학을 풀 때 보통 이런 메커니즘으로 풀려고 하면 조금은 더 수월하게 풀릴 것이다.
걸리적거리는 것들은 제거하려고 노력해보자.
예를 들어 삼각함수의 극한 초반에, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 를 증명해야 했을 것이다.
이 때 우리는 cosx가 장애물이라는 것을 알았기 때문에 cosx를 sinx로 만들기 위해 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ 을 변형한 합차공식을 이용했었다. (기억 안나면 정석이나 집에 있는 개념서를 보아라.)

삼각함수의 극한 활용 문제 또한 마찬가지이다.
예를 들어
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-4\sin^2 x}}{x^2}$ 인 문제가 있다.
우선 루트가 몹시 거슬리기 때문에 유리화를 시켜주면
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-(1-4\sin^2 x)}{x^2\times 2}$ 가 된다. (분모에 합차공식의 짝꿍식을 곱하지 않은 이유는 위의 1번을 참고하자.모르겠으면 쪽지 ㄱㄱ)
여기에서 cosx가 몹시 거슬린단걸 알 수 있다.
바로 이때 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ 를 이용해 sinx만을 이용해서 변형할 수 있다.
극한을 구할 때 거슬리는게 있으면 거슬리는 걸 없애기 위해 너가 아는 다양한 공식들을 이용해보자.