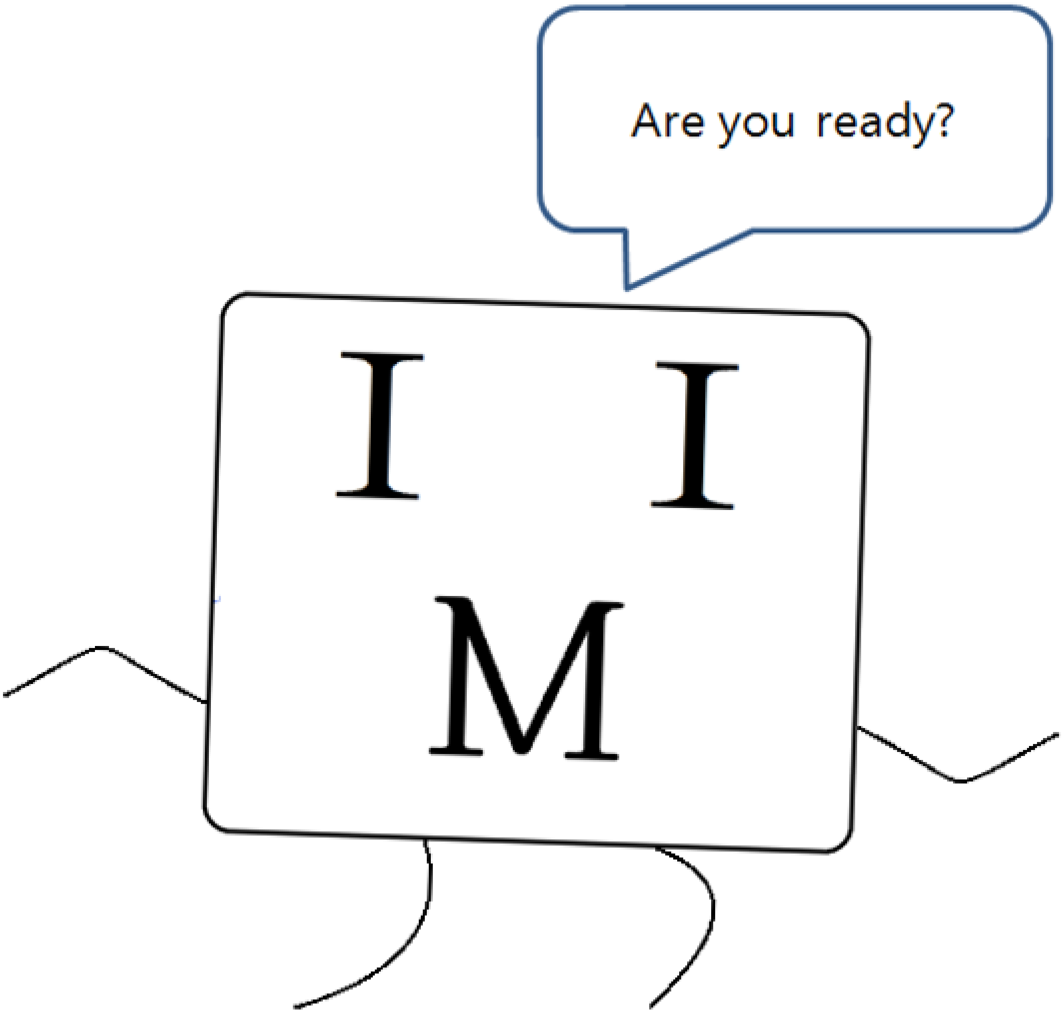


Inessential

Interesting Math Idea

Intuitive

서문

무슨 말을 써야 적당할까 고민했는데 아마 정상적인 머리말은 쓰지 못할 것 같습니다.
일단 가장 중요한, 이 책의 identity부터 소개하고자 합니다. 그것이 이 책(이라고 말하기에는 보잘 것 없긴 한데)를 유용하게 사용하는데 도움이 될 듯해서…….

기본적으로 이 책은 수학 모의고사 1등급, 또는 2등급 이상의 상위권에게 추천 드리는 책입니다. 이유는 내용의 난이도죠. 단원별로 편차가 크긴 하지만, 대체적으로 쉽지 않습니다. 생소하다는 표현이 적절하겠네요.

제목에서도 강조되듯이 이 내용들이 수능에 있어서 꼭 필요한 것이 아닙니다. 또한 다소 직관적인 부분이 있기 때문에 이해가 힘들 수도 있습니다.

수능에 꼭 필요하지 않은데 왜 해야 하냐!

재밌으니까 하죠……. 애초에 재미도 뭣도 없는데 제가 왜 이 책을 쓰고 있겠습니까.

물론 수학 문제 풀 때 시간 단축이 효과적이라는 장점이 있습니다.
근데 그거는 이 스킬들은 체화해야 좀 가능한 거고(어떤 건 보자마자 체화 가능하긴 해요 ㅎ), 이 책 2회독하면 비킬러 50분 컷 ㅆㄱㄴ? 물어보신다면 아니라고 답하겠습니다. 저도 잘 못해요 그건

수능에 도움이 되려면 실모 푸세요 ㅎㅎ 그게 사실 더 공부에 효과적입니다.

이 책의 존재 의도는 그냥 수능 수학을 잘해야겠다! 가 아니라 수학적 사고를 키우고 싶다! 라고 생각하시는 분들께 추천합니다.
논술 수학을 하면 수학적 사고력이 증가해서 실전 상황에서 킬러 풀이에 도전하여 성공할 수 있는 기반이 길러진다 뭐 이런 말이 있잖아요
그거랑 비슷합니다.

말이 번잡하긴 한데 요약하자면
1. 이 책 어렵따 최상위권~상위권이 읽어 달라
2. 풀면서 재미를 추구해라 그러다 보면 수학적 사고력이 길러질 것이다
이 두 가지입니다.

머리말 쓰기 귀찮네요. 시작합니다.

2018.12.9.

오르비 ID 테플로탁슬

0. 이 책 구성 및 사용법

잠만요 할 말 아직 더 있음

각 단원마다 *문제 미리보기 라는 부분이 있을 거고 그 부분을 통해 이번 단원에서 배우는 ~~야매~~기술을 적용할 수 있는 기출 문제 혹은 자작 문제를 드릴 겁니다.

아직 그 기술을 모른 상태에서 한번 풀어 보세요.

그 다음에 제가 간직해두었던 비급을 전수해 드릴 건데 그 기술을 통해서 *문제 미리보기에 나온 문제들을 직접 풀어드릴 겁니다.

여러분 감탄만 하면 이 기술이 여러분 것으로 체화될 수가 없습니다. 직접 써봐야죠.

그래서 그 단원 끝에는 그 풀이가 적용되는 문제들을 따로 놔둘 겁니다.

제가 그 단원에서 언급한 풀이 방식으로 풀지 않으면 안 풀리는 문제도 있습니다……. 일반적인 방법으로 푸려고 하지 마세요.

해설은 생략하고 답만 달아둘게요 ㅎ 정말 모르겠다 싶으면 오르비 아이민 789614 닉 테플로 탁슬에게 쪽지 주세요! 또 중간에 모르겠는 부분 나오면 언제든지 저한테 연락 ㄱㄱ

사실 해설 쓰다가 힘들어서 죽을지도 몰라서……. 책 집필이 이렇게 어려울 줄이야 ㅠㅠ

쨌든 본격적인 내용 이제 시작합니다!

머리말과 여기까지만 구어체 쓰고, 본문은 문어체로 쓰도록 하겠습니다.

1. 음함수 미분? 편미분!

* 문제 미리보기
이번 부분은 자작문제가 필요 없다고 생각합니다.
기출문제만 수록하도록 하겠습니다.

7. 곡선 $e^x - xe^y = y$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $3-e$ ② $2-e$ ③ $1-e$ ④ $-e$ ⑤ $-1-e$

➢2019 수능 가형 7번 문제

11. 곡선 $e^y \ln x = 2y+1$ 위의 점 $(e, 0)$에서의 접선의 방정식을 $y = ax+b$라 할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $-2e$ ② $-e$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{e}$

➢2019 9월 가형 7번 문제

9. 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $1+\ln(e+1)$ ② $2+\ln(e^2+2)$ ③ $3+\ln(e^3+3)$
④ $4+\ln(e^4+4)$ ⑤ $5+\ln(e^5+5)$

➢2019 6월 가형 9번 문제

제 책 내용 대부분이 그렇지만, 이번 단원의 내용을 꼭 알아야 수능 문제들을 풀 수 있는 것은 아닙니다.
하지만 이 방법을 쓰게 되면 간단하고 빠르게 계산이 가능하기 때문에 계산 실수 등이 적어지는 게 아주 큰 장점이라서 소개를 하려고 합니다.

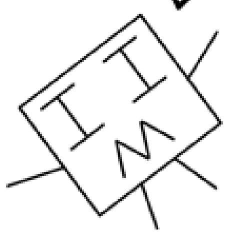
이번 단원에서 소개할 것은 음함수 미분 문제를 대학에서 쓰는 편미분이라는 방법을 통해서 계산을 단축하는 기술입니다.

편미분에 대해서 먼저 이야기해 보겠습니다. 어떤 문자 x에 대해서 편미분을 한다는 것은 x를 제외한 다른 모든 변수들을 상수 취급한 채로 x에 대해서만 미분을 한다는 겁니다. 기호로는 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)$로 표현할 수 있습니다.
백문이 불여일견이므로 예시를 들어 드리겠습니다.
$f(x,y)=x^2y+1$이면 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)=2xy$입니다. x에 대해서만 미분한 형태임을 알 수 있습니다.
하나 더
$f(x,y)=x^3y^2+xy+2x+1$이면 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)=3x^2y^2+y+2$입니다.

y에 대해서도 편미분할 수 있습니다.
$f(x,y)=x^3y^2+xy+2x+1$이면 $\frac{\delta}{\delta y}f(x,y)=2x^3y+x$입니다.

편미분의 개념을 알게 되었으니, 편미분을 통해 음함수 미분을 표현해 보겠습니다.
공식 보여드립니다.

➢ $f(x,y)=0$이라는 식에 대해서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\frac{\delta}{\delta y}f(x,y)}$이다.



형태상으로 복잡해 보이지만 실제로는 간단합니다.

문제 미리보기에 나온 문제들을 풀어보도록 하겠습니다.

7. 곡선 $e^x - xe^y = y$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는?
[3점]

① $3-e$ ② $2-e$ ③ $1-e$ ④ $-e$ ⑤ $-1-e$

이 문제에서 $f(x,y)=0$의 형태로 바꾸면 $e^x - xe^y - y = 0$입니다.

즉 $f(x,y) = e^x - xe^y - y$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\dfrac{\delta}{\delta y}f(x,y)} = -\dfrac{e^x - e^y}{-xe^y - 1} = \dfrac{e^x - e^y}{xe^y + 1}$입니다.

0,1을 대입하면 답은 3번임을 알 수 있습니다.

11. 곡선 $e^y \ln x = 2y+1$ 위의 점 $(e, 0)$에서의 접선의 방정식을 $y = ax+b$라 할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $-2e$ ② $-e$ ③ -1 ④ $-\dfrac{2}{e}$ ⑤ $-\dfrac{1}{e}$

저는 이 문제 현장에서 응시할 때 모양 보고 순간 '아 극혐 자연로그 씌워야지'라는 생각이 바로 나서 자연로그 씌워서 정리했습니다.

그러면 $f(x,y) = y + \ln(\ln x) - \ln(2y+1)$가 되므로

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\dfrac{\delta}{\delta y}f(x,y)} = -\dfrac{\dfrac{1}{x\ln x}}{1 - \dfrac{2}{2y+1}}$이므로 여기에 바로 e,0을 대입해주면 기울기가 $\dfrac{1}{e}$임을 알 수 있습니다. 후속 계산은 생략하고 답은 5입니다.

9. 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $1+\ln(e+1)$ ② $2+\ln(e^2+2)$ ③ $3+\ln(e^3+3)$
④ $4+\ln(e^4+4)$ ⑤ $5+\ln(e^5+5)$

$f(x,y) = e^x - e^y - y$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\dfrac{\delta}{\delta y}f(x,y)} = -\dfrac{e^x}{-e^y - 1} = \dfrac{e^x}{e^y + 1}$이며 따라서

$\dfrac{e^x}{e^y+1} = 1$이고 $e^x - e^y = 1$이므로 y=1, x=$\ln(e+1)$이므로 답은 1번입니다.

직접 해보시면 빠르다는 게 체감될 겁니다.

물론 체화를 위해서는 노력이 약간 필요하지만 제가 소개할 기술들 중에서는 그나마 체화가 쉬운 기술입니다.
자 아래 문제 2개로 연습해봅시다!

24. 곡선 $2x+x^2y-y^3=2$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

➢2018 수능 가형 24번 문제

24. 곡선 $5x+xy+y^2=5$ 위의 점 $(1,-1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

➢2018 9월 가형 24번 문제

다음 챕터로 넘어가겠습니다.

2. 미분방정식

* 문제 미리보기

21. $\frac{3}{5} < x < 4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➢2018 4월 가형 21번 문제

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

➢2016 수능 B형 30번 문제

이번 단원에서는 미분방정식으로 풀 수 있는 문제들을 다뤄 보겠습니다.
2019 수능 21번도 간단한 형태의 미분방정식 문제인데 난이도가 비킬러급으로 매우 쉽게 출제되었습니다.
이 문제입니다.

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $2\{f(x)\}^2 f'(x)=\{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다. (나) $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$, $f(6)=2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

(가)에서 주어진 것이 미분방정식입니다. 양변 적분하고 싶게 생겼습니다.
저런 미분방정식은 너무 풀기가 쉽습니다. 출제 의도가 명백히 드러나기 때문입니다.

미분방정식은 간단히 말하자면 x, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$...등으로 이루어진 방정식입니다. 사전상의 정의로는 좀 더 복잡하지만 수능 및 기출문제에서 나오는 문제들은 이 정도로만 정의를 이해해도 문제없습니다.

여기 간단한 미분방정식들 보여드립니다.
①$f'(x)=3$ ②$f'(x)=3f(x)$ ③$f'(x)=3(f(x))^2$
3개 다 비슷한 형태를 띠고 있습니다.
한 번 풀어보겠습니다.
① 쉽습니다. 양변 적분하면 $f(x)=3x+C$(단, C는 적분상수)입니다.
② 비슷한 다른 예시를 들어 보겠습니다. $f'(x)=f(x)$ 라는 식이 있다고 칩시다. 미분해도 같은 꼴이 나오므로 $f(x)=ke^x$일거라는 예상이 가능합니다. 실제로도 $f'(x)=f(x)$를 만족하는 모든 $f(x)$는 $f(x)=ke^x$꼴입니다.
$f'(x)=3f(x)$의 $f(x)$을 구해보겠습니다. 식을 변형하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=3$으로 나타낼 수가 있습니다. 그런데 여기서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln f(x))'$이므로 $(\ln f(x))'=3$입니다.
따라서 ①에 의해서 $\ln f(x)=3x+C$입니다. 즉 $f(x)=e^{3x+C}$입니다.
③ 이것도 비슷하게 변형하면 풀립니다. $-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}=-3$로 변형하면 $(\frac{1}{f(x)})'=-3$임을 알 수 있고 따라서 $f(x)=\frac{1}{-3x+C}$입니다.

이런 게 바로 미분방정식입니다.

사실 고교 과정에서 미분방정식을 정식적으로 배우는 것이 아니기에 직접적으로 미분방정식과 관련된 문제를 내려면 저 위의 문제처럼 대놓고 묻는 바를 드러내거나 미분방정식 풀이가 아닌 다른 풀이가 존재하는 경우가 대부분입니다.

하지만 미분방정식 풀이가 재미도 있고, 재미도 있고. 재미도 있고…….
재미만 있는 것 같습니다. 숙련되지 않는다면 정석적으로 하시는 게 나을 수도 있습니다.

21. $\frac{3}{5}<x<4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2<g(1)<\frac{5}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)$를 구해 봅시다.
양변을 변형하면 $x^3(f(x))^2f'(x)+x^2(f(x))^3=1$입니다.
양변에 3을 곱하면 $3x^3(f(x))^2f'(x)+3x^2(f(x))^3=3$입니다. 이제 좌변 우변을 적분해 버리면 $x^3(f(x))^3=3x+C$의 형태가 됩니다. 물론 C는 적분상수입니다.
$f(1)=2$니까 $C=5$입니다. 따라서 $f(x)=\frac{\sqrt[3]{3x+5}}{x}$임을 알 수 있습니다.

보기의 선지를 확인하자 $g(x)$에 대해 다루고 있으므로 $x^3(f(x))^3=3x+5$ 라는 식에서 x를 $g(x)$로 치환하여 정리합시다.
$x^3(g(x))^3=3g(x)+5$ 가 되고, 적당히 변형하면 ㄴ선지에 나온 식이 됩니다.
따라서 ㄴ은 옳은 선지임을 알 수 있습니다!

나머지 선지는 어렵지 않으므로 스스로 해결해 주시기 바랍니다. 귀찮아서 그렇습니다.
ㄱ은 식에 대입하면 나올 것이고 ㄷ은 사이값 정리 쓰면 됩니다.

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

이 문제도 풀어보겠습니다.

(나) 조건을 정리합시다. 양변 미분하면 $f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$이므로 $f(x) = 2$이거나 $\frac{f'(x)}{\sqrt{4-2f(x)}} = 1$임을 알 수 있습니다.

이 상태에서 잘 만져주면 $\frac{-2f'(x)}{2\sqrt{4-2f(x)}} = -1$입니다. 이렇게 한 이유는 $(\sqrt{4-2f(x)})' = \frac{-2f'(x)}{2\sqrt{4-2f(x)}}$이기 때문입니다.

이렇게 양변 적분 가능하게 만든 후 적분하면 $\sqrt{4-2f(x)} = -x + C$가 됩니다.

또한 $f(0) = 0$임을 (나) 조건에서 확인할 수 있습니다. 따라서 $C = 2$입니다.

즉 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$이거나 $f(x) = 2$임이 나왔습니다. $f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$이므로 $f'(x)$는 언제나 양수거나 0입니다.

따라서 $x \le 2$일 때 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$이고 $x > 2$일 때 $f(x) = 2$입니다. $x > 2$일 때 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$일 수 없는 이유는 $f'(x)$가 0 이상이기 때문입니다.

전체 그래프가 구해졌으니 적분해서 푸시면 됩니다.

미분방정식이 교육과정에 있진 않지만, 그 개념이 들어간 문제들은 정말 많습니다!

교육과정에 나온 방식대로 풀어도 문제없지만, 미분방정식 풀이도 알아두면 유용할 수 있습니다.

다음 쪽에 있는 문제들로 연습해 봅시다!

(참고로 연습용 문제라서 제 자작문제는 조금 괴상망측한 면이 있습니다)

정의역이 $x>0$인 미분 가능한 함수 $y=f(x)$위의 점 P$(t, f(t))$에서 접하는 접선이 있다. 그 접선의 y절편이 $t\cos(\ln t)$으로 표현된다. $y=f(x)$는 $(e^{\pi}, 0)$을 지난다. 이때 $f(x)$를 구하시오.

➢테플로탁슬 자작문제

모든 실수에서 정의된 미분 가능한 함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $2f'(x)=f(x)-\dfrac{2}{f(x)}$

(나)$f(2)=\sqrt{3}$

이때 $f(x)$를 구하시오.

➢테플로탁슬 자작문제(교육청 기출 변형)

다음 챕터로 넘어갑니다.

후기

일단 책을 완성한 본인 심영정을 소개하자면

~~닷씨는 안하겠쏘!!!~~

농담입니다. 아니 전부 농담은 아닙니다.
책 하나 쓰는 게 이렇게 힘든 일일 줄 몰랐습니다. 그래도 완성하고 나니까 뿌듯하네요.
제가 글을 잘 썼는지 모르겠습니다. 이해가 되셨는지요... 이해가 안되면 저에게 연락을 해주십쇼. 질문 받아드리겠습니다.

이 책으로 번 돈은 아마도 여러 생필품 및 식료품 판매 기업에 기부될 것입니다. 물론 무상 기부는 아니고 그 기업이 대가로 생필품과 식료품을 저희에게 제공하게 될 겁니다.
네, 쉽게 말해서 벌은 돈 가지고 먹고 싶은 것 사고 싶은 것 사고 먹고 할 것이라는 의미입니다.

이것도 반쯤 농담입니다. 이 책으로 번 돈은 부모님께 드릴 예정입니다.

아따 나름 후기라고 써보는데 쓸 말이 없어버리네 큰일이다
그럼 뭐 짧게 쓰죠 길게 쓸 필요도 없으니

이 책을 읽어준 여러분에게 감사하고 도움이 되었으면 좋겠습니다.
언젠가 다시 다른 책으로 찾아 뵙...기는 싫은데 뭐 생각해 볼게요.

이상!

마지막으로 제 책을 검토해 주신 많은 분들(치대조아, 허닝, SNaUman, DHMO, Epi economics, 오.적.현., NT850XAX-GD7A)께 감사합니다.

2019.1.25.
수학빌런 테플로탁슬 올림