청의미의 기출 학습법

made by 이원엽

목차

1. 기본 개념은 아이디어를 떠올리는데 도움을 준다!

1) 직관보다는 최대한의 논리로 연습하세요.

여러분이 직관을 쓰는 이유는, 참 간단합니다. 분명 눈에는 보이는데 그 이유를 모르니까요.
그렇다 하더라도 여러분은 최대한의 논리로 기출문제를 대하시고 연습하셔야 합니다.

구 $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $z=-1$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. x축을 포함하는 평면 α와 구 $x^2+y^2+z^2=4$가 만나서 생기는 원이 C와 오직 한 점에서 만날 때, 평면 α의 한 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$라 하자. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(출처 : 2006학년도 수능)

이 문제를 접근할 때 보통 그림을 그리시면, x축을 기준으로 평면 를 돌려보게 됩니다.
그 때, 접할 때를 찾게 되고, x=0일 때의 점을 특이점으로 생각하게 됩니다.
실제로 잘은 모르겠지만 우리는 그 점에서 접한다고 생각합니다.

여러분께서는, 잘 모르겠지만 이럴 것 같아서 풀이를 진행하는 경우가 많이 있을 겁니다.

반드시 이런 문항에 대해서 그 이유를 최대한 따져가며 정리하셔야 합니다.

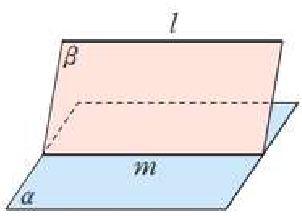
문제를 풀 때는, 직관이든 뭐든 다 쓰셔야 하는 게 맞습니다.
실제로 잘 모르겠지만 접할 것 같다면, 그리고 풀이가 잘 안 보인다면, 그렇게 진행하셔야지요.
다만, 지금 공부할 때마저도 그렇게 하셔야하냐는 것입니다.
기출을 분석하는 과정마저도 기본에 충실하지 못하면, 기출을 분석해서 나아짐이 없습니다..

이 문제의 해법을 담은 교과서 예제는 다음과 같습니다.

직선 l과 평면 α가 평행하면, 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α의 교선 m은 직선 l과 평행함을 보여라.

직선 l과 평면 α는 평행하므로 만나지 않는다. 따라서 직선 l은 평면 α 위에 있는 직선 m과 만나지 않는다.
그런데 직선 l과 직선 m은 같은 평면 β 위에 있다.
즉, 두 직선 l, m은 한 평면 위에 있고 만나지 않으므로

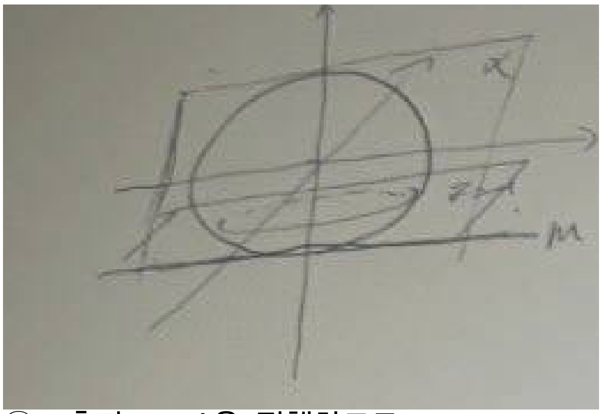
$l \,/\!/\, m$



이 예제의 증명은, 두 직선의 위치관계가 평행, 만남, 꼬인 위치의 3가지가 있음을 이해하고, 한 평면을 이루지 않는 꼬인 위치를 배제한 후, 만나는 경우까지 배제하면서 증명합니다.

그래서, 우리는 직선과 평면이 평행하면, 그 직선을 포함하는 평면과, 평행했던 평면이 이루는 교선과도 직선이 평행함을 알 수 있습니다.

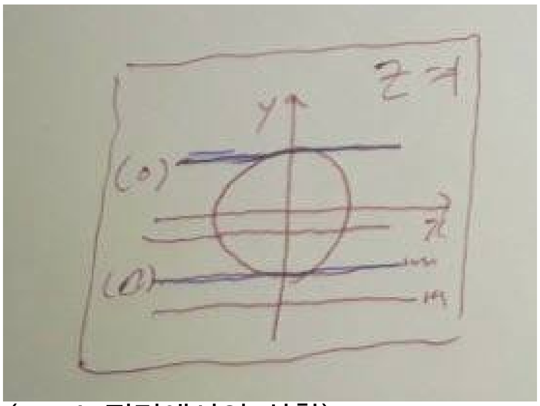
이제 수능문제에 접근해봅시다.



① x축과 z=-1은 평행하므로

② 예제에 의해 x축과 와 z=-1이 만나는 교선은 반드시 평행합니다.

★x축과 평행한 z=-1위에 있는 직선이 반드시 원과 한 점에서 만날 때를 상상하면 됩니다!



(z=-1 평면에서의 상황)

이 때의 좌표는 $(0,\ \ 3,-1)$ 혹은 $(0,-\sqrt{3},-1)$ 입니다.

결과적으로는 x축을 중심으로 평면 α를 돌려서 접했을 때가 맞았네요!

예제에 나와있는 대로, 평면 z=-1과 직선 x축이 평행할 경우,

x축을 지나는 평면 α가 z=-1과 이루는 교선과도 x축이 평행하기 때문입니다!

그러나 이런 사항을 알고 분석하는 것과 아닌 것의 차이는 큽니다!

이 차이가 확실한 기출분석과 아닌 기출분석의 차이임을 이해하시길 바랍니다.

이유를 모르고서 답만 맞는다고 실력은 절대 늘지 않습니다!

2) 예제 풀이의 근거를 이해하면, 기출 풀이도 이해할 수 있습니다.

① 함수의 극한 개념에 대한 예제 풀이와 기출 풀이.
다음은 미적분 1 교과서의 함수의 극한 예제문제입니다.

예제 2

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2+1}$ (2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$

(출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)

여러분은 이 문제를 어떻게 푸시나요?
당연히, (1)번 문제는 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 동시에 나눠줍니다.
(2)번 문제는 유리화를 하게 되지요.

그렇다면 그 근거는 어디에 있나요?

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

③ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=\alpha-\beta$

④ $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq0$)

(출처 : 미래엔 미적분 1 교과서)
바로 이것입니다. (1)번 문제의 원리는, 분모의 최고차항으로 나누기 때문에

분모는 반드시 0이 아닌 값으로 수렴할 수밖에 없다![1]

라는 것입니다. 이렇게, 예제 풀이는 개념과 밀접한 연관성을 가질 수밖에 없지요.
(2)번의 예제는 반드시 분자의 유리화를 해야 합니다.
그러나 우리는 분모의 유리화의 이유[2]는 익히 알고 있지만, 분자의 유리화는 들어본 적이 없습

1) 분모는 0이 아닌 수로 수렴하는 함수가 되며, 성질 ⑤에 의해 분자가 수렴하면 극한값을 구할 수 있습니다.
2) 이걸 모르지 않으리라 생각합니다만, 무리수와는 달리 통분할 때 유리수는 반드시 하나의 수로 표현됩니다.

니다! 그리고 그 이유도 사실 모릅니다. 왜 분자의 유리화를 해야 할까요?

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+8}-\sqrt{x^2-8x-24}\right)$$

다음 극한의 값을 구하려 합니다. 극한을 구할 수는 없습니다!
두 함수가 모두 발산하므로 함수의 극한에 대한 성질을 이용할 수 없습니다.
$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+8}-\sqrt{x^2-8x-24})(\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-8x-24})}{\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-8x-24}}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x+32}{\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-8x-24}}$ 속는 셈 치고 유리화를 시켜보았습니다.
이제, 분모를 보시면, 이차식의 제곱근입니다.
x로 분모와 분자를 나눠보시면 다음과 같습니다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12+\frac{32}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{8}{x}-\frac{24}{x^2}}}$$

생각해봅시다. 이제는 분모와 분자 모두 수렴하는 함수로 변형되었습니다!

이제, 우리는 극한값의 계산 파트에서 가장 중요한 사실을 이해하게 됩니다.

어떻게든 수렴하는 함수로 만드는 게 가장 중요하겠구나!

이제 예전 기출문제를 한번 보면서 어떻게 연결되는지 생각해봅시다!

2006년 6월 가형 10번 문항입니다!

Q.두 다항함수 (x), $f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

(가) $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$
(나) $f_i'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}$ $(i=1,\ 2)$
(다) $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교한다.

이 문제를 어떤 식으로 접근해야할까요? 생각해봅시다.
(나)의 극한값이 존재한다고 하였습니다. 즉 수렴한다는 것이죠.

우리는 $f_1(x)$, $f_2(x)$에 대한 정보를 (가)조건과 (다)조건만으로는 알 수 없습니다.
결국 극한값을 계산해서 풀어야하는데, 분모에 X=0을 대입하면 0이 되어버립니다.

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$

③ $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = \alpha - \beta$

④ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$

⑤ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

다시 한 번 봅시다. ⑤의 성질 때문에, 분모가 0으로 수렴할 수는 없습니다.
이것을 파악한다면 우리의 목표는 명확합니다.

분모가 0이 되지 않도록 식을 변형해볼 방법이 없을까?

어떻게 변형할 수 있을까요? 분모와 분자에 같은 수를 나누면 식이 성립합니다.
그렇다면 x로 나누어보면 되지 않을까요?

$${}'(0) = \lim_{x \quad 0} \frac{\frac{f_i(x)}{x} + 2k}{\frac{f_i(x)}{x} + k}$$ 로 말입니다.

적어도 분모에 k는 남게 됩니다. k는 상수이므로 일단 수렴할 것입니다.
이제 $\frac{f_i(x)}{x}$ 부분만 극한을 보내어 수렴하는지만 생각해보면 되지 않을까요?
이것은 정확하게 극한이 x=0일 때의 미분계수, 즉 $f_i'(0)$으로 수렴하게 되며
수렴하는 함수에 대한 극한값의 계산에 의해서 극한값을 계산할 수 있게 됩니다.
계산은 생략하겠습니다.

이렇듯, 교과서의 예제 풀이에는 개념의 원리가 녹아있으며,
그 개념의 원리로 문제가 풀린다는 사실을 기억하셔야 합니다.

기출 분석을 하실 때, 이런 사항을 고려하셔서 분석하시면 좋을 것입니다.

② 방정식의 실근 개수의 개념에 대한 예제풀이와 기출문제 풀이

이번 예제는 이것입니다! 바로 방정식의 실근 개수와 함수의 그래프지요.[3]

방정식 $\ln x - kx = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

풀이 방정식 $\ln x - kx = 0$에서 $\ln x = kx$, $\frac{\ln x}{x} = k$

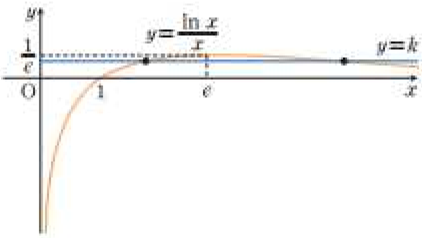
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = \frac{\ln x}{x}$의 그래프와 직선 $y = k$의 교점의 개수이다.

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$라 하고, $f'(x) = 0$인 x의 값을 구하면 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 즉, $x = e$

한편, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$이다.

$x > 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ (극대)	↘



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{e}$이다.

(출처 : 미래엔 미적분 2 교과서)

이 문제에 대하여 예제는 왜 $\ln \quad = kx$ 그대로 그리지 않고 $\frac{\ln x}{x} = k$로 변형해서 표현했을까요?

이 이유는 몇 가지가 있습니다.

① 교과서에서는 평행이동을 배웠으며, 회전이동을 배우지 않았습니다.

② 교과서에서는 미분 가능한 함수가 극값을 가질 때, $'(x) = 0$이라 합니다.

y=k는 x축과 평행한 직선이기 때문에 미분계수가 항상 0이며, 극값에 접합니다.

극값에 접하는 곳에서 실근이 변할 가능성이 있기 때문에, 개수 파악이 용이합니다.

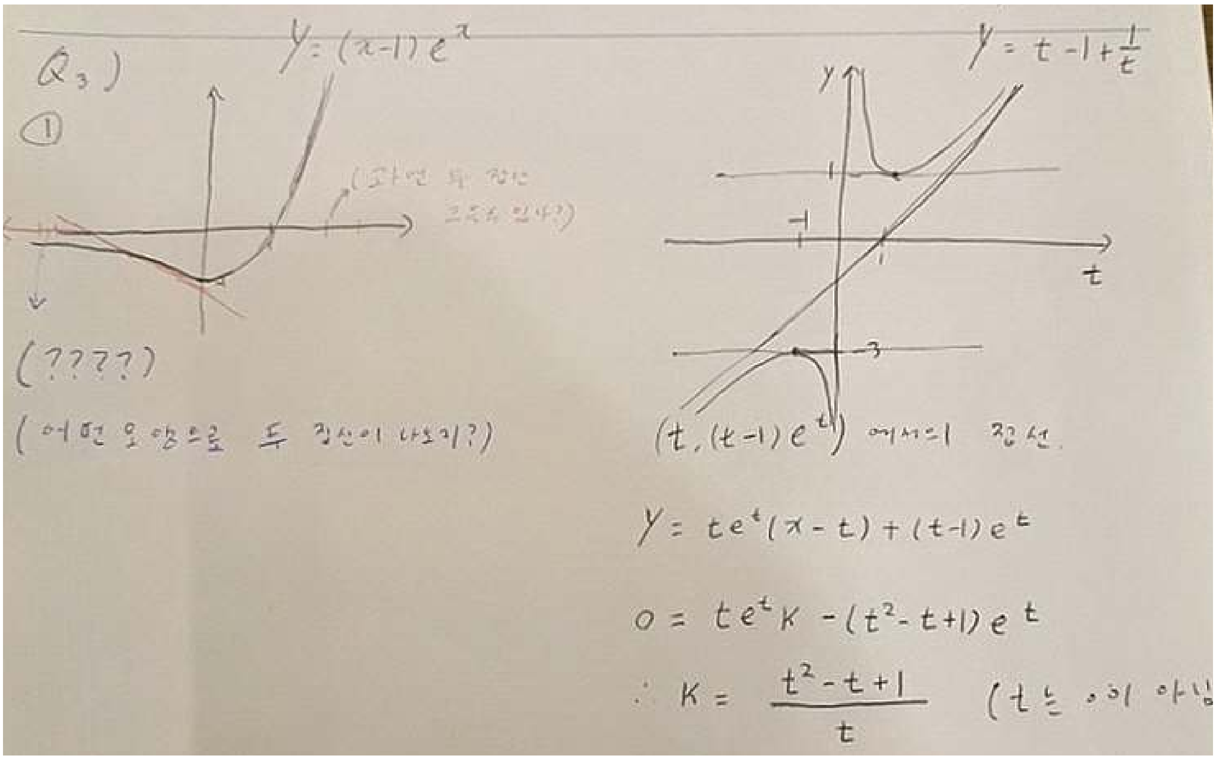
다음도 교과서에 수록된 문제 중 하나입니다.

---

3) 제가 참 좋아하는 풀이법 중 하나입니다. 이해가 쉽고 간단한 장점이 있습니다. 그러나 그래프를 좀 더 어려운 것을 그려내야 한다는 단점 또한 존재하는 풀이법입니다. 실제로 y=ln x 그래프와 y=kx 그래프를 그리는 것이 쉽지요.
하지만 그래프 그리기에 관하여서는 미분법의 활용을 배우셨다면 어떤 그래프라도 두려워하시면 안됩니다.

x축 위의 점 (k,0)에서 곡선 $y=(x-1)e^x$에
두 개의 접선을 그을 수 있도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.
(단, $\lim_{x\to -\infty}(x-1)e^x=0$)

(출처 : 미래엔 미적분 2 교과서)
이 문제의 손풀이는 다음과 같습니다.



이 풀이의 문제점은 존재합니다.4)
하지만, 평행이동을 해서 값을 구하는 것이 회전이동을 통해 구하는 것보다 수월함을 이해할 수 있습니다.
이렇게 일관된 풀이를 갖고 한번 문제의 풀이에 접근해보도록 합시다!

4) 문제점은, 저 t 값은 접점의 x값을 말하는 것으로 접점의 개수와 접선의 개수가 같음을 먼저 전제해야합니다.
그러나 함수 그래프 내에서 접선이 겹치는 경우도 분명 있을 수 있습니다. 겹치는 경우라면, 접점 2개가 모두 하나의 접선을 지칭하게 되지요. 그 판정은, [2014수능 30번에서의 공통접선 이야기]라는 제목의 게시글을 참고하시길 바랍니다.

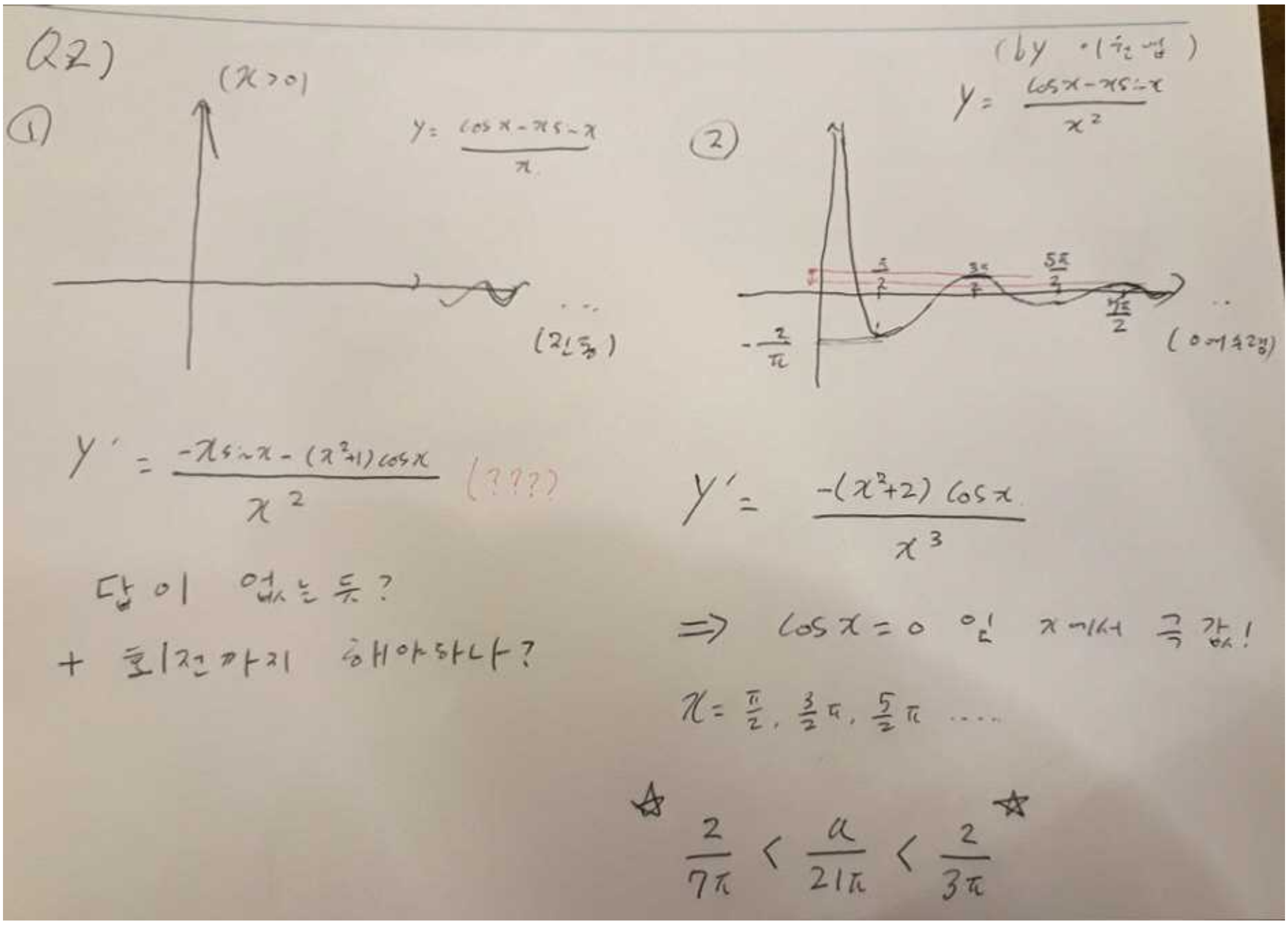
$x>0$일 때, x에 대한 방정식

$$\frac{\cos x}{x}=\sin x+\frac{a}{21\pi}x$$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 개수는? [4점]

① 6　　② 7　　③ 8

④ 9　　⑤ 10

(2014년 EBS 수능완성 수록 문항)



이 또한, 교과서의 예제풀이를 적용하였을 때 장점으로,

y=m은 x축과 평행한 직선이기 때문에 미분계수가 항상 0이며, 극값에 접한다!

라는 사실을 여러분은 보실 수 있을 것입니다.5)

교과서의 예제풀이의 이유는 기본 개념에서 찾을 수 있으며, 이것이 기출풀이까지 연결됩니다!

이제, 기출문제까지 이러한 관점을 넓혀보도록 합시다!

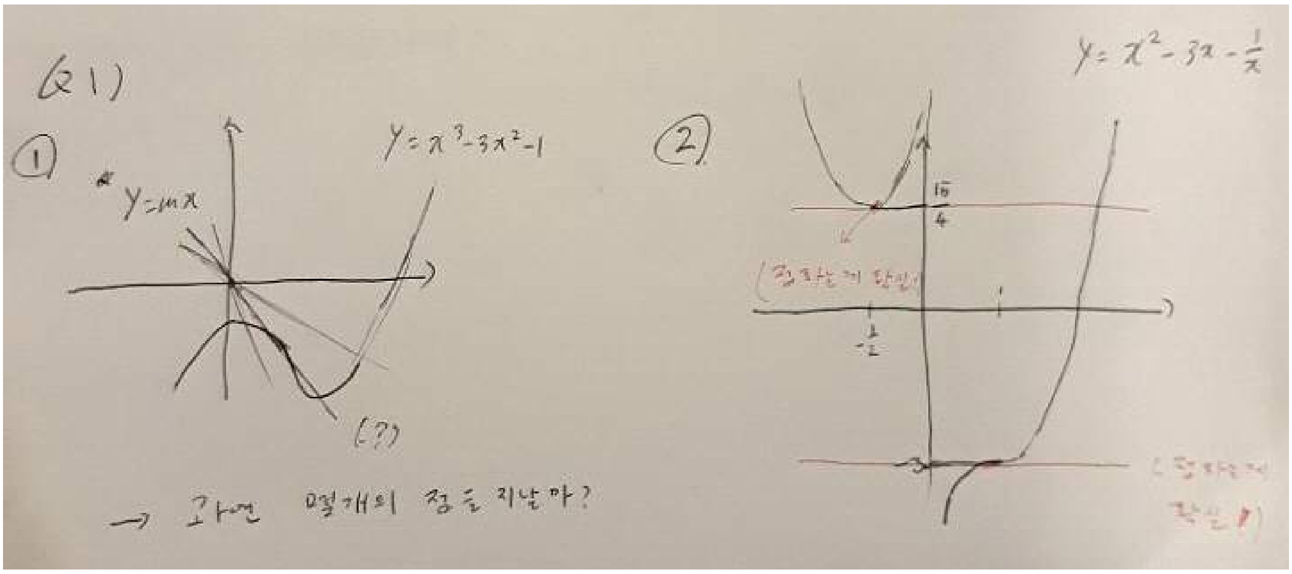
5) 이 문제를 감히 평가해보자면, 사실 교과서의 풀이대로 따르지 않으면 그래프를 그리지 못하도록 설계했습니다. 즉, 풀이의 의도가 참 다분한 문항이기는 합니다. 그러나 이때의 저는 이 문항을 풀면서 '역시 교과서!'라고 감탄했더랍니다.

실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty\ ,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?

① -3 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 6

(출처 : 2012학년도 수능)



y=m은 x축과 평행한 직선이기 때문에 미분계수가 항상 0이며, 극값에 접합니다.
극값에 접하는 곳에서 실근이 변할 가능성이 있기 때문에, 개수 파악이 용이합니다.

왼쪽과 같이 풀기 위해서는, 회전하면서 풀어야합니다.
그러나 과연 어디에 접할지를 알 수 없지요. 어디에서 실근이 변할지 명확하지 않습니다.
y=m과 같은 직선과 달리, y=mx는 기울기가 계속 달라지기 때문입니다.

이 문제에서, 빨간색 펜으로 접하는 게 확실한 부분을 표시해두었습니다.
교과서 예제 관점의 풀이가 유용하다는 것을 느끼시길 바랍니다.

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

(출처 : 2014학년도 수능)

이 문제의 풀이는 생략합니다. 한번, 교과서의 풀이로 접근해보세요!
이 문제에서는 접점의 개수와 접선의 개수가 같습니다![6)]
즉, 교과서의 풀이로 접점의 x좌표 개수만 구할 수 있다면, 접선의 개수가 나오겠지요!

직접 한번 문제에 접근해보시길 바랍니다!

6) 원래는 이 또한 그래프를 그려가며 직접 보여야합니다. 접선의 개수와 접점의 개수가 같음을 보이는 칼럼은 제 게시글인 2014수능 30번에서의 공통접선 이야기를 참고하시길 바랍니다. 어느 정도의 직관이 필요한 사항이지만, 이것 또한 최대한 논리적으로 생각할 수 있으리라 생각합니다.

2. 빠른 풀이를 하고 싶니?

1) 자신이 무엇을 하고 있는지는 알고 풀이를 써내려가야 해요.

이 말은, 긴 풀이에 익숙하냐는 말과 똑같다고 생각하시면 됩니다.
적어도, 자신이 왜 이 풀이를 하고 있는지는 확실하게 하셔야 합니다. 모르시면 속도 말할 때 아니에요.
그 이유는 물론 교과서적으로 설명 가능해야 합니다! 기출문제 30번 문항을 보면서 한번 이해해봅시다.

30. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와

함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

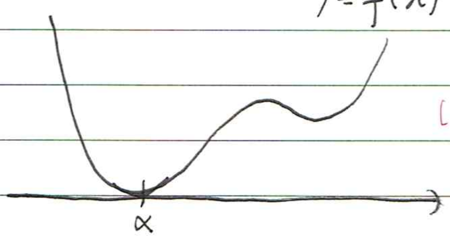
$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

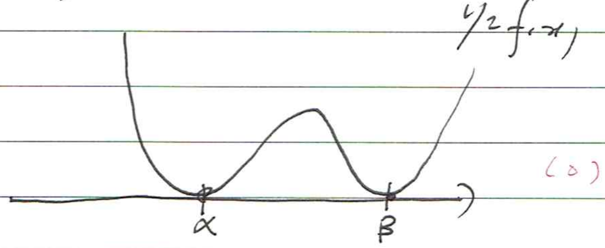
(출처 : 2019학년도 9월 평가원)

우리는 f(x)를 구할 수 밖에 없겠습니다. [7]

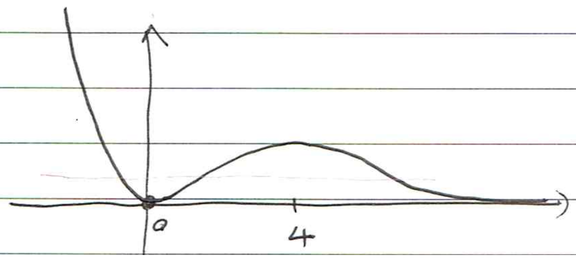
일단, h(x)의 조건을 만족하도록 하는 f(x)의 특징을 파악해보도록 합시다.

2019 수학 가형 9월 30번

1)


2)


☆ $y=g(x)=2x^4e^{-x}$ $\left(g'(x)=2x^3e^{-x}(4-x)\right)$



7) 목적을 잊지 마시길 바랍니다. 이 문제의 목적은 f(x)의 식을 찾는 것임을 끝까지 잊지 마세요!

그래프를 그리면 위와 같습니다. 최솟값이 0이므로 극솟값은 반드시 0일겁니다.
도함수의 활용 - 방정식, 부등식에의 활용 단원에서는 f(x)=a인 x의 해의 개수를 많이 물어보곤 합니다.
그럴 때, 우리는 y=f(x)와 y=a 그래프의 교점의 개수를 해의 개수로 생각했습니다.

(가) 조건의 의미는, f(x)가 0이 되도록 하는 x값을 g(x) 함수가 4개 가져야한다는 뜻입니다.
즉, f(x)가 0이 되도록 하는 x값이 하나뿐이라면, g(x)=α인 x가 4개여야 하고,
f(x)가 0이 되도록 하는 x값이 α와 β라면, g(x)=α, g(x)=β인 **서로 다른 x값**이 4개여야 합니다.

g(x)=α인 x는 최대 3개이므로, 그림에서 1) 그래프와 같이, 극솟값이 0인 점이 하나면 안 됩니다.
2)의 그래프를 따라야, x의 값이 4개가 될 가능성이 있습니다.

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 그리고, g(x)=α, g(x)=β의 해의 개수의 합은 4개.

여기까지 (가) 조건을 도함수의 활용 중, 방정식의 활용 단원 개념을 이용한 분석입니다.
이 풀이에는 이상이 없습니다.

① 최솟값이 0임을 반영한 사차함수 그래프 개형과 미분법을 통한 y=g(x)의 개형.
② 합성함수 개념을 이용하여 추론한 g(x)의 해의 개수 조건.
③ 방정식과 부등식에의 미분의 활용 단원을 고려한 사차함수 그래프 개형의 확정.

이 세 가지 모두 배운 개념을 이용한 것입니다.
배운 개념을 활용했으며, (가) 조건을 활용했으며, f(x)의 개형을 대략 유추했습니다.
우리는 최종적으로 f(x)의 식을 구해야하기 때문에 이 과정은 유의미하다고 생각할 수 있습니다.
분석을 함에 있어서 ① 목적에 맞는 개념 사용과, ② 논리의 흐름이 적절한지 항상 점검하세요.

(나) 조건을 해석해봅시다.
g(x)=α, g(x)=β의 해의 개수의 합은 4개이므로,
2개, 2개 / 1개, 3개 / 3개, 1개 의 세 가지 경우가 있습니다.

하지만, g(x)의 해가 2개인 경우는 g(x)=g(4)인 경우로, 한 가지 경우입니다.
α=β인 경우는 모순이므로[8], 1개, 3개 혹은 3개, 1개일 겁니다.

---

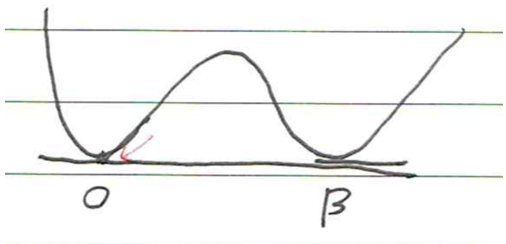
8) 서로 다른 실근의 개수가 4개여야 합니다. α=β이면 실근의 개수가 겹치게 되는 것을 이해하셔야합니다.

(1) 1개, 3개인 경우,   는 0일 수밖에 없습니다.
0 〈   〈 g(4)여야 3개인데, β보다 α가 작습니다.

(2) 3개, 1개인 경우 0 〈 α 〈 g(4)이며 β **〉 g(4)**[9]입니다.

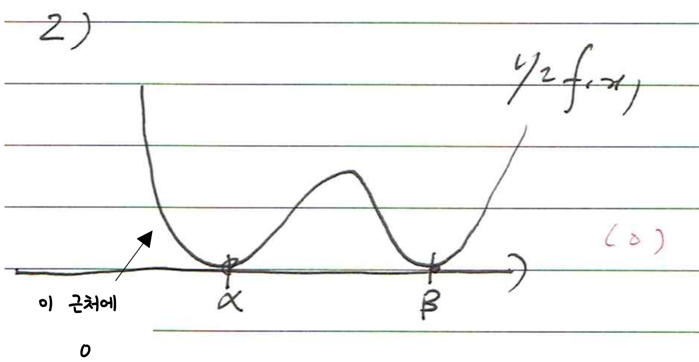
두 가지 모두 가능하므로, y=h(x)가 0에서 극소인지 생각합시다.

극솟값의 정의는, 그 주변의 함숫값보다 작은 함숫값을 말하며
미분 가능한 함수에 대해서, f'(x)=0이며 그 좌우로 도함수의 부호가 마이너스에서 플러스로 바뀔 때를 말합니다.



$'(x)=f'(g(x))g'(x)$이며,
g(x)는 0 근처에서 (+)→0→(+)로 바뀌며
g'(x)는 0 근처에서 (-)→0→(+)로 바뀝니다.

f'(g(x))는 (1)의 경우, g(x)가 0보다 큰 상태에서 0으로 가까이 갑니다.
그래서 기울기가 (+)→0→(+)로 바뀝니다.
즉, $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$의 부호는 (-)→0→(+)로 바뀌며
x=0에서 극소인 것을 확인할 수 있습니다.



(2)의 경우, α보다 0이 더 왼쪽에 위치하므로
f'(g(x))는 항상 음수입니다.
$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$의 부호는 (+)→0→(-)
즉, 극대입니다.
즉, $f(x)=\frac{1}{2}x\ (x-\beta)^2$입니다.

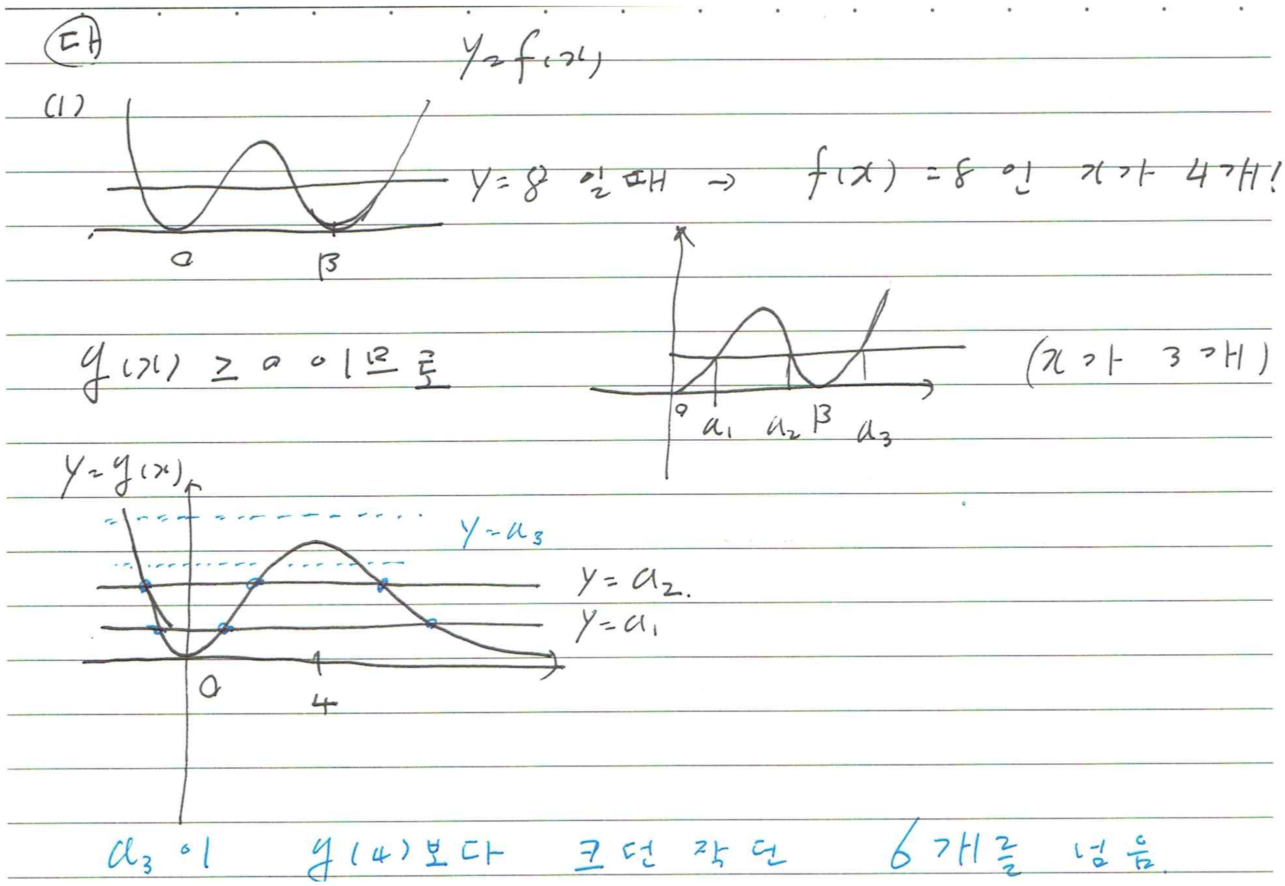
여기까지, 방정식에의 미분의 활용, 극대, 극소의 정의를 이용한 분석입니다.
① 근의 개수의 합이 4개임을 알고 경우를 나누어서 방정식 개념을 적용.
② 극솟값의 개념을 이용하여 f(x)에 대한 정보를 더 알아냄.[10]

또한, 극소라는 정보 외에는 (나) 조건에 별다를 게 없기 때문에, 이 분석은 적절합니다.

---

9) 이 조건 또한, 기억하셔야 할 조건 중 하나입니다. (1)의 경우인 **0 〈   〈 g(4)**을 기억하고 다음으로 진행합니다.
10) 이 문제의 목적은 f(x)의 식을 찾는 것입니다. 잊지 않으셔야 한다고 말씀 드렸습니다.

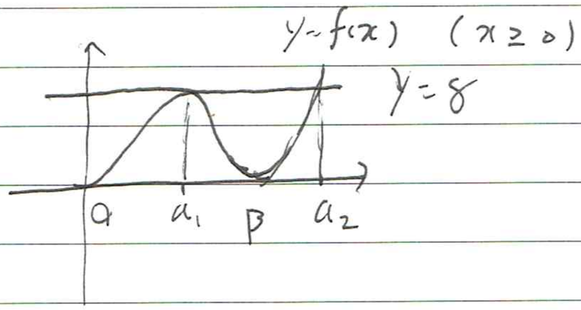
(다) 조건을 해석해봅시다.
g(x)는 0 이상이기 때문에, f(x)도 x가 0이상인 부분만 생각해주면 됩니다.
케이스는 3개로 나눕니다.
f(x)=8인 x가 3개일 때, 2개일 때, 1개일 때로 (1), (2), (3)을 나눕시다.



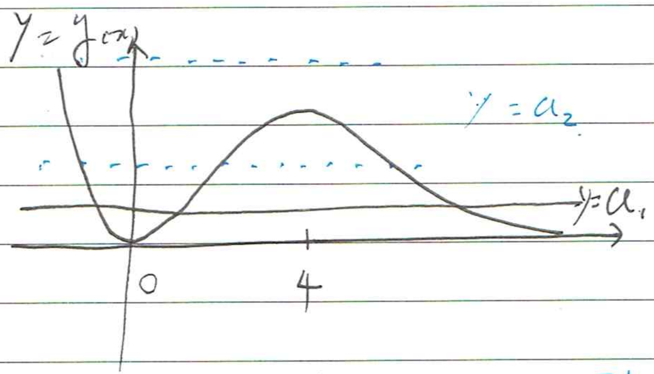
(1)의 경우, $, a_2, a_3$이 될 수 있는 g(x)값의 개수는 최소 7개, 최대 9개입니다.[11]
그러므로 (다) 조건을 만족하지 않습니다.

11) **0 〈 〈 g(4)** 이므로, a_1, a_2 까지는 반드시 극댓값보다 작은 위치에 있습니다. 이후에도 이 부등식이 분석에 쓰입니다.

(2)



(x가 2개)

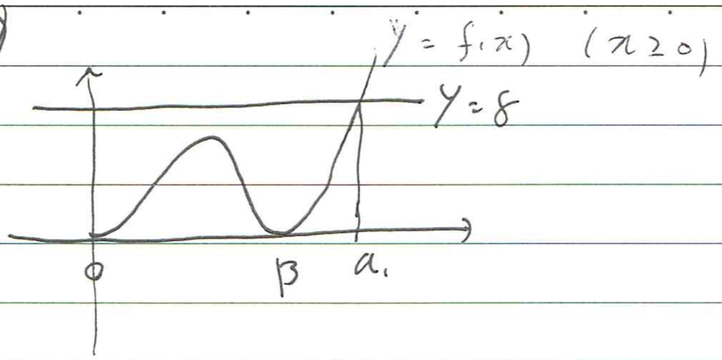


a_2가 g(4)보다 작으면 만족!

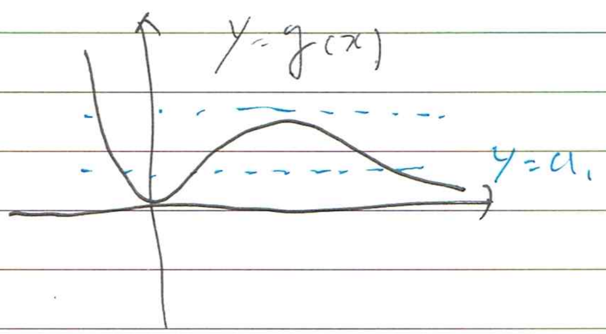
이 경우, y=g(x)에서 극댓값보다 가 작으면, 6개의 값이 생깁니다.

이 때, 실전에서는 극댓값보다 a_2가 작은지 직접 증명하거나, (3)의 케이스를 살펴봅니다.

(3)



x가 1개



실근 최대 3개.

(3)의 케이스는 실근 최대 3개로, (다)를 만족하지 않습니다.

이 사실을 종합해보면, y=8이 f(x)의 극댓값이어야만 성립하는 경우가 생김을 볼 수 있습니다.
물론, 가 g(4)보다 작음을 증명해야 하지만, 가능한 경우가 없기 때문에 확신을 갖고 계산해 주면 됩니다.

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$에서 $f'(x)=x(x-\beta)(2x-\beta)$이므로, $a_1=\frac{\beta}{2}$

이제, 극댓값이 8이기 때문에, f(x)를 구할 수 있겠습니다!

대입하면, $f(\frac{\beta}{2})=\frac{1}{2}(\frac{\beta}{2})^4=8$ 즉 β=4입니다. $f'(5)=5(5-4)(10-4)=30$입니다.

여기까지는 방정식에의 미분의 활용과 합성함수의 개념을 이용한 분석입니다.
① y=f(x)와 y=8의 교점의 개수는 3개, 2개, 1개가 될 수 있습니다.
② $(x)=f(g(x))$에서, g(x)의 값을 f(x)에 대입하여 8이 되는 값의 개수를 물어봅니다.
③ 0과 β 사이에 있는 값에 대해서는 항상 y=g(x)가 3개의 근을 가집니다.
이를 통해서 (2)가 옳은 케이스임을 알아내면 문제가 풀리게 됩니다.

실전에서는 증명을 할 시간이 없을 수 있으나, 기출 공부를 할 때는 증명해야합니다.
a_2가 g(4)보다 작음을 증명해보면 다음과 같습니다.

$(x)=\frac{1}{2}x\ (x-4)^2$**이며 a_2는 f(x)=8의 해입니다.**

$\frac{1}{2}x^2(x-4)^2=8$

$x^2(x-4)^2=16$**이므로,** $(x^2-4x)=4$**이거나** $(x^2-4x)=-4$**입니다.**

전자의 경우, $x^2-4x-4=0$**의 두 개의 해 중, 큰 것이** a_2**입니다.**

후자의 경우 $x^2-4x+4=0$**은 해가 x=2 뿐이므로 모순입니다.**

근의 공식에 따라 $a_2=2+\quad 8$ **이며, g(4)는 바로 대입해서 값을 구하면**

$512e^{-4}$**입니다.**

이제, $2+2\sqrt{2}<512e^{-4}$**이 성립하면 증명 완료입니다.**

$$(1+\sqrt{2})e^4<256$$
$$e^4<256(\sqrt{2}-1)$$
$$(2.71...)^4<256(0.414...)$$
$$(2.71...)^4<3^4<256\times(0.4)<256(0.414...)$$

이므로, 증명 완료입니다.

여러분이 긴 풀이를 할 때, 흔히 저지르는 실수는
1. 풀이를 써내려가다 갑자기 논리를 잃는 것.
2. 풀이에 쓰인 개념이 목적에 맞는지 아닌지 모르는 것.
이 두 가지 현상이 실제로 일어난다면, 애초에 이 부분부터 연습하셔야합니다.

속도가 중요한 것이 아닙니다. 풀이 한줄 다음 한줄의 이유를 이해하지 못하시면 안됩니다.

여기까지, 기출 학습에서의 교과서적 사고의 이유를 제시했습니다.

이 이후는 기출 풀이와 공부한 것의 정리에 대해서 다룰 예정입니다.

청의미의 기출 학습법 part. 2를 기대하세요!

(칼럼에 수록된 그림의 출처는 명시되어 있으며, 이 칼럼은 이원엽이 비영리적인 목적으로 작성하였습니다.)