E.T's Eight Technics.

Ver. 2019

Five Technic.

통계 기본기로 뿌셔뿌셔☆

한번 보면 정리되는 통계로 부담감 없애기

－ E . T －

통계 레시피

1. 정규분포와 대칭성

2. 통계적 추정

3. 증명, 빈칸 채우기

- E . T -

1. 정규 분포와 대칭성

Question. 01

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 8인 정규분포를 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \le k) + \mathrm{P}(X \le 100 + k) = 1$
(나) $\mathrm{P}(X \ge 2k) = 0.0668$

m의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, k는 상수이다.)

[4점] [2018 7월 교육청][1]

Question. 02 (Question. 01 유제)

두 연속확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(am,\ b\sigma^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 0) = \mathrm{P}(Y \geq 0)$
(나) $\mathrm{P}(X \leq 1) + \mathrm{P}(Y \geq 2) = 1$

이때, $a+b$의 값은? (단, $a>0, b>0$)

[4점][2010년 11월 대전교육청]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Question. 03

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 $F(x)=\mathrm{P}(X \leq x)$라 하자. m이 자연수이고 $0.5 \leq F\left(\frac{11}{2}\right) \leq 0.6915$, $F\left(\frac{13}{2}\right)=0.8413$일 때, $F(k)=0.9772$를 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[4점] [2017 10월 교육청]

Question. 04 (Question. 03 유제)

어느 지역 학생들의 1일 인터넷 사용시간 X는 평균이 m분, 표준편차가 30분인 정규분포를 따른다. 이 지역 학생들을 대상으로 9명을 임의추출하여 조사한 1일 인터넷 사용시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 함수 $G(k)$, $H(k)$를

$$G(k) = P(X \leq m + 30k)$$

$$H(k) = P(\overline{X} \geq m - 30k)$$

라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2011년 평가원]

[보 기]

ㄱ. $G(0) = H(0)$　　ㄴ. $G(3) = H(1)$

ㄷ. $G(1) + H(-1) = 1$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Question. 05

양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $H(t)$는 평균 20, 표준편차 t인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$H(t)=P(X \leqq 15)$$

이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

(단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $P(0 \leqq Z \leqq 1)=0.3413$, $P(0 \leqq Z \leqq 2)=0.4772$이다.)

[4점][2009년 평가원]

[보 기]

ㄱ. $H(2.5)=P(Z \geqq 2)$

ㄴ. $H(2)<H(2.5)$

ㄷ. $H(5)<5H(2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Question. 06

어느 과자 공장에서 생산되는 과자의 무게는 평균이 $16g$, 표준편차는 $0.3g$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서는 과자의 무게가 $15.25g$이하이면 불량품으로 판정한다.
표준정규분포표를 이용하여 이 공장에서 생산된 과자가 불량품일 확률을 구하면 p라 할 때, $10000p$의 값을 구하시오.

[표준정규분포표]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[4점][2006년 교육청]

Question. 07 (Question. 06 유제)

어느 회사에서는 신입사원 300 명에게 연수를 실시하고 연수 점수에 따라 상위 36 명을 뽑아 해외 연수의 기회를 제공하고자 한다.
신입사원 전체의 연수 점수가 평균 83 점, 표준편차 5 점인 정규분포를 따른다고 할 때, 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최소 점수를 아래 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

(단, 연수 점수는 최소 0 점에서 최대 100 점 사이의 정수이다.)

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.1	0.36
1.2	0.38
1.3	0.40

[4점][2005년 평가원]

2. 통계적 추정

Question. 08

모평균 75, 모표준편차 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 양의 상수 c가

$$\mathrm{P}(|\mathrm{Z}|>\mathrm{c})=0.06$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[4점][2007년 수능]

[보 기]

ㄱ. $\mathrm{P}(\mathrm{Z}>\mathrm{a})=0.05$인 상수 a에 대하여 $c>a$이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} \leq \mathrm{c}+75)=0.97$

ㄷ. $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}}>\mathrm{b})=0.01$인 상수 b에 대하여 $c<b-75$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Question. 09

어느 회사에서 생산되는 비누의 무게는 정규분포를 따르며, 무게가 100g미만인 것은 불량품으로 판정한다. 회사에서는 판매 촉진을 위해 비누를 4개씩 포장하여 만든 세트 상품을 판매하기로 하였다. 각 세트 상품은 그 안에 들어 있는 비누 무게의 평균이 100g미만인 경우에 불량품으로 판정된다고 할 때, 상품 1000세트 중 1세트의 비율로 불량품이 생긴다고 한다. 회사에서 생산된 비누 1개를 검사할 때, 불량품으로 판정될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 포장지의 무게는 무시한다.) [4점][2009년 교육청]

<표준정규분포표>

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

① 0.001 ② 0.006 ③ 0.023 ④ 0.067 ⑤ 0.159

Question. 10 (Question. 09 유제)

어느 학교 학생들의 통학 시간은 평균이 50 분, 표준편차가 σ 분인 정규분포를 따른다. 이 학교 학생들을 대상으로 16 명을 임의추출하여 조사한 통학 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}\left(50 \le \overline{X} \le 56\right) = 0.4332$일 때, σ 의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

4점][2013년 평가원]

Question. 11

다음은 어느 회사의 직원 중 임의로 선택한 100명의 출근 소요 시간을 조사한 표이다.

소요 시간	인원수(명)
30분 미만	4
30분 이상 60분 미만	16
60분 이상 90분 미만	50
90분 이상 120분 미만	30
합계	100

이 결과를 이용하여 얻은 이 회사의 전체 직원 중 출근 소요 시간이 60분 이상 120분 미만인 직원의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$일 때, $5000(b-a)$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

[4점] [2016 10월 교육청]

① 392 ② 784 ③ 1176 ④ 1568 ⑤ 1960

Question. 12 (Question. 11 유제)

어느 농장에서 출하되는 수박의 무게는 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수박 중 169개를 임의 추출하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $[a,\ b]$이고, n개를 임의 추출하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[c,\ d]$이다. $b-a=d-c$일 때, n의 값을 구하시오.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.6)=0.99$로 계산한다.)

[4점][2014년 8월 영남권]

Question. 13

어느 도시의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 80%가 이 중앙공원을 이용한 경험이 있다고 답하였다.
이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a,\ b]$이다. $b-a=0.098$일 때, n의 값을 구하시오.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

[4점][2014학년도 수능]

Question. 14 (Question. 13 유제)

A 여론 조사 기관에서 어떤 드라마의 시청률을 조사하기 위해 임의로 추출한 1000명을 대상으로 조사한 결과 100명이 시청하였다고 한다. 이 결과를 이용하여 전체 시청자의 시청률을 신뢰도 95%로 신뢰구간을 구하였더니 $[a, b]$이었다. $b-a \leq 0.002$를 만족시키려면 최소한 p명을 임의 추출하여 조사해야 한다. 이때, $\sqrt{p}$의 값을 구하시오. (단, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$)

3. 증명, 빈칸 채우기

Question. 15

서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, 꺼낸 순서대로 1부터 7까지의 번호를 부여한다. 4개의 흰 공에 부여된 번호 중 두 번째로 작은 번호를 확률변수 X라 할 때, 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를 N이라 하면 N은 서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $N=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=2$일 때,

번호 2가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개,
번호 2가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 3개를
나열하는 경우의 수는 $1\times\dfrac{5!}{2!\times3!}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{10}{N}$

(ii) $X=3$일 때,

번호 3이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 1개,
번호 3이 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 2개를
나열하는 경우의 수는 $2!\times\dfrac{4!}{2!\times2!}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{12}{N}$

(iii) $X=4$일 때,

번호 4가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 2개,
번호 4가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를
나열하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{\boxed{\text{(나)}}}{N}$

(iv) $X=5$일 때,

확률질량함수의 성질에 의하여
$\mathrm{P}(X=5)=1-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=2}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=$ $\boxed{\text{(다)}}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+5c$의 값은?

[4점] [2018 7월 교육청]

① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

Question. 16

2이상의 자연수 n에 대하여 $1 \le a < b \le n$, $1 \le c < d \le n$을 만족하고, 좌표평면 위의 네 직선 $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 직사각형의 둘레의 길이가 $2n$이 되도록 자연수 a, b, c, d를 택한다. 다음은 $b-a$의 값을 확률변수 X라 할 때 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{n}{2}$임을 보이는 과정이다.

> 확률변수 X가 가질 수 있는 가장 작은 값은 1, 가장 큰 값은 $\boxed{(가)}$이다.
>
> $X=k$일 때, $b-a=k$이므로 $1 \le a \le n-k$이고,
>
> $d-c=n-k$이므로 $1 \le c \le \boxed{(나)}$이다.
>
> 그러므로 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{(n-k)\times\boxed{(나)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{\boxed{(가)}}(n-i)\times i}$이다.
>
> 따라서
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{\boxed{(가)}}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$
>
> $$=\frac{6}{\boxed{(다)}}\sum_{k=1}^{\boxed{(가)}}\{k\times(n-k)\times\boxed{(나)}\}$$
>
> $$=\frac{n}{2}$$
>
> 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{h(7)}{f(8)\times g(6)}$의 값은? [4점] [2017 10월 교육청]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Question. 17

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 x_1, x_2, x_3이라 하고, 이 세 수 x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값과 최솟값의 차를 확률변수 X라 하자.

예를 들어 $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{5}{36}$이다. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정의 일부이다.

> 세 수 x_1, x_2, x_3을 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)과 같이 나타내자.
> 세 수 x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값을 p, 최솟값을 q라 하고
> $p-q=k$라 하자.
> (1) $k=0$일 때
> 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이고,
> $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6^3}\times\boxed{\text{(가)}}$
> (2) $k\neq0$일 때
> i) $k=1$을 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $5\times\left(\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}\right)$
> 이다.
> ii) $k=2$를 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $4\times\left(\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+3!\right)$이다.
> ⋮
> 그러므로 $1\le k\le5$일 때, 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
> $(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\times3!\right\}$
> 이고
> $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\times3!\right\}$ (1), (2)에
> 의하여 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
> $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\frac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}\left(\boxed{\text{(다)}}\right)=\frac{35}{12}$

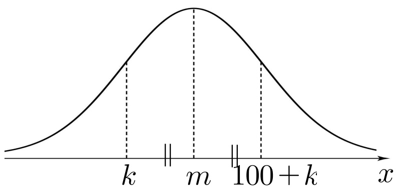
위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{f(5)\times g(3)}{a}$의 값은? [4점] [2017 7월 교육청]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

[정답 및 해설]

1) [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제 해결하기

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 8^2)$을 따른다.
조건 (가)를 만족시키는 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$m-k=(100+k)-m,\ k=m-50$

$\mathrm{P}(X \geq 2k)=\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{m-100}{8}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{m-100}{8}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{m-100}{8}\right)=0.4332$

$\dfrac{m-100}{8}=1.5$

따라서 $m=112$

2) 정답 ②

$P(X \geqq x)=P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} \geqq \dfrac{x-m}{\sigma}\right)=P\left(Z \geqq \dfrac{x-m}{\sigma}\right)$

$P(Y \geqq y)=P\left(\dfrac{Y-am}{\sqrt{b}\,\sigma} \geqq \dfrac{y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)=P\left(Z \geqq \dfrac{y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$

이므로

(가)에서 $-\dfrac{m}{\sigma}=-\dfrac{am}{\sqrt{b}\,\sigma}$ $\quad\therefore\ a=\sqrt{b}$ ....①

(나)에서 $1=P(X \leqq 1)+P(Y \geqq 2)$

$=P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} \leqq \dfrac{1-m}{\sigma}\right)+P\left(\dfrac{Y-am}{\sqrt{b}\,\sigma} \geqq \dfrac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$

$=P\left(Z \leqq \dfrac{1-m}{\sigma}\right)+P\left(Z \geqq \dfrac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$

이므로 $\dfrac{1-m}{\sigma}=\dfrac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}$ ....②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2,\ b=4$ 이다

3) 27. [출제의도] 표준정규분포표를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

$F(x)=\mathrm{P}(X \leq x)=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{x-m}{\sigma}\right)$

$F\left(\dfrac{13}{2}\right)=0.8413,\ \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)=0.3413$ 이므로

$\dfrac{\frac{13}{2}-m}{\sigma}=1,\ \sigma=\dfrac{13}{2}-m$ ······ ㉠

$0.5 \leq F\left(\dfrac{11}{2}\right) \leq 0.6915$ 이므로

$0 \leq \dfrac{\frac{11}{2}-m}{\sigma} \leq 0.5$ ······ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하여 정리하면

$\dfrac{9}{2} \leq m \leq \dfrac{11}{2}$ 이고 m이 자연수이므로

$m=5,\ \sigma=\dfrac{3}{2}$

$F(k)=0.9772$ 이므로

$\dfrac{k-5}{\frac{3}{2}}=2,\ k=8$

4) 정답 ③

[출제의도] 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

X는 정규분포 $N(m, 30^2)$을 따르므로
크기가 9인 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{30}{\sqrt{9}}=10$

따라서, $\overline{X}$는 정규분포 $N(m,\ 10^2)$을 따른다.

$G(k)=P(X \leq m+30k)=P\left(Z \leq \dfrac{m+30k-m}{30}\right)$

$=P(Z \leq k)$

$H(k)=P(\overline{X} \geq m-30k)=P\left(Z \geq \dfrac{m-30k-m}{10}\right)$

$=P(Z \geq -3k)$

ㄱ. $G(0)=P(Z \leq 0)=0.5$

$H(0)=P(Z \geq 0)=0.5$

$\therefore\ G(0)=H(0)$ (참)

ㄴ. $G(3)=P(Z \leq 3)=0.5+P(0 \leq Z \leq 3)$

$H(1)=P(Z \geq -3)=P(-3 \leq Z \leq 0)+0.5$

$=P(0 \leq Z \leq 3)+0.5$

$\therefore\ G(3)=H(1)$ (참)

ㄷ. $G(1)=P(Z \leq 1),\ H(-1)=P(Z \geq 3)$ 이므로

$G(1)+H(-1)=P(Z \leq 1)+P(Z \geq 3)$

$=1-P(1 \leq Z \leq 3)$

$P(1 \leq Z \leq 3)>0$ 이므로

$G(1)+H(-1)<1$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

5) 정답 ③

$H(t)=P\left(\dfrac{X-20}{t} \leqq \dfrac{15-20}{t}\right)=P\left(z \leqq \dfrac{-5}{t}\right)$

ㄱ. $H(2.5)=P(z\leqq\dfrac{-5}{2.5})=P(z\leqq-2)=P(z\geqq 2)$ 이므로
참이다.

ㄴ. $H(2)=P(z\leqq-2.5)$ 이므로 $\therefore H(2)<H(2.5)$ 참

ㄷ

$H(5)=P(z\leqq-1)=0.5-P(0\leqq z\leqq 1)=0.1587$

$5H(2)<5H(2.5)=5\times P(z\leqq-2)$

$=5\times(0.5-P(0\leqq z\leqq 2))=5\times 0.0228=0.1140$

거짓

6) 정답 62

과자의 무게를 확률변수 X라 하면

$P(X\leqq 15.25)=P\left(\dfrac{X-16}{0.3}\leqq\dfrac{15.25-16}{0.3}\right)$

$=P(Z\leqq-2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

$\therefore\ 10000\times 0.0062=62$

7) 정답 89

신입사원 전체의 연수점수는 정규분포 $N(83\,,5^2)$ 을 따르고 300 명의 상위 36 명은 $\dfrac{36}{300}\times 100=12\%$ 이므로 전체에서 상위 12% 안에 드는 최소점수를 a 라 하면

$P(X\geqq a)=P\left(Z\geqq\dfrac{a-83}{5}\right)=0.12$

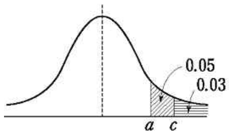
따라서 $P\left(0\leqq Z\leqq\dfrac{a-83}{5}\right)=0.38$ 이므로 주어진 표에서

$\dfrac{a-83}{5}=1.2$

$\therefore\ a=83+5\times 1.2=89$

8) 정답 ⑤

ㄱ.

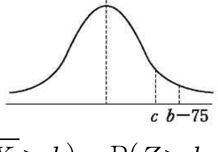


$\mathrm{P}(Z>c)=0.03<0.05=\mathrm{P}(Z>a)$이므로

$c>a$ $\therefore$참

ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X}\leqq c+75)=\mathrm{P}(Z\leqq c)=0.97$ $\therefore$참

ㄷ.



$\mathrm{P}(\overline{X}>b)=\mathrm{P}(Z>b-75)$

$=0.01<0.03=\mathrm{P}(Z>c)$이므로

$b-75>c$ $\therefore$참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

9) 정답 ④

비누 1개의 무게에 대한 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면 비누를 4개씩 묶은 제품의 무게의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\mathrm{m},\ \left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따른다. 따라서 $P(\overline{X}<100)=0.001$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}<100)=\mathrm{P}\left(Z<\dfrac{100-m}{\dfrac{\sigma}{2}}\right)=\mathrm{P}\left(Z<\dfrac{2(100-m)}{\sigma}\right)$

$=0.5-P\left(0<Z\leqq\dfrac{2(100-m)}{\sigma}\right)=0.001$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}\left(0<Z<-\dfrac{2(100-m)}{\sigma}\right)=0.499$이므로

$-\dfrac{2(100-m)}{\sigma}=3$이다. 즉, $\dfrac{100-m}{\sigma}=-1.5$이다.

그러므로 비누 1개를 검사했을 때 불량품으로 판정될 확률은 다음과 같다.

$P(X<100)=P\left(Z\leqq\dfrac{100-m}{\sigma}\right)=P(Z<-1.5)$

$=0.5-P(0<Z<1.5)=0.5-0.433=0.067$

따라서 구하는 확률은 0.067이다.

10) 정답 16

모집단의 통학시간 $X\sim\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$

표본의 크기 $n=16$ 이므로 표본평균 $\overline{X}\sim\mathrm{N}\left(50,\ \left(\dfrac{\sigma}{4}\right)^2\right)$

$\mathrm{P}(50\leq\overline{X}\leq 56)=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{24}{\sigma}\right)=0.4332$

$\dfrac{24}{\sigma}=1.5\quad\therefore\ \sigma=16$

11) 17. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

표본비율 $\hat{p}=\dfrac{80}{100}=\dfrac{4}{5}$ 이고 표본의 크기는 100 이므로 출근 소요 시간이 60 분 이상 120 분 미만인 직원의 비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\frac{4}{5}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}\leq p\leq\frac{4}{5}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}$$

$$5000(b-a)=5000\times2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}$$
$$=5000\times2\times1.96\times\frac{4}{100}$$
$$=784$$

12) 정답 100

[출제의도] 모평균의 추정을 이용하여 수학외적문제 해결하기

각각의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.6\times\frac{\sigma}{\sqrt{169}}$, $2\times2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이고

$9\times2.6\times\frac{\sigma}{\sqrt{169}}=2\times2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}=10$

$\therefore\ n=100$

13) 정답 256

표본의 크기가 n일 때, 중앙공원을 이용한 경험이 있는

주민의 표본비율은 $\hat{p}=0.8$이므로

중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 모비율 p를 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$$\left[0.8-1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}},\ 0.8+1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\right]$$

따라서 $b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.098$에서

$\sqrt{n}=\frac{2\times1.96\times0.4}{0.098}=16$

$\therefore\ n=256$

14) 정답 588

표본비율은 $\hat{p}=\frac{100}{1000}=0.1$이고, 표본비율 $\hat{p}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(p,\ \frac{0.1\times0.9}{1000}\right)$을 따른다. 따라서, 표본의 크기가 n일 때, 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$에서

$b-a=2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 이다. 따라서

$2\times1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le0.002$에서

$\sqrt{n}\ge588$이므로 $\sqrt{p}=588$이다.

15) **[출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정** 추론하기

공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를 N이라 하면 N은 서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은

검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$N=\boxed{35}$이고, 확률변수 X가 가질 수 있는

값은 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=2$일 때,

번호 2가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개,

번호 2가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와

검은 공 3개를 나열하는 경우의 수는

$1\times\frac{5!}{2!\times3!}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{10}{N}$

(ii) $X=3$일 때,

번호 3이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와

검은 공 1개, 번호 3이 부여된 흰 공

뒤에 흰 공 2개와 검은 공 2개를 나열하는

경우의 수는 $2!\times\frac{4!}{2!\times2!}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{12}{N}$

(iii) $X=4$일 때,

번호 4가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와

검은 공 2개, 번호 4가 부여된 흰 공

뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를

나열하는 경우의 수는 $\boxed{9}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{\boxed{9}}{N}$

(iv) $X=5$일 때,

확률질량함수의 성질에 의하여

$$\mathrm{P}(X=5)=1-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=2}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{\frac{16}{5}}$

$a=\dfrac{7!}{4!\times3!}=35$, $b=\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=9$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{10}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{9}{35}$	$\dfrac{4}{35}$	1

$c=2\times\dfrac{10}{35}+3\times\dfrac{12}{35}+4\times\dfrac{9}{35}+5\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{16}{5}$

따라서 $a+b+5c=60$

16) 19. [출제의도] 이산확률변수의 평균을 구하는 과정을 추론한다.

a와 b는 $1\le a<b\le n$을 만족하는 자연수이고

$b-a$의 값이 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 가장 작은 값은 1, 가장 큰 값은 $\boxed{n-1}$이다.

$X=k$일 때, $b-a=k$에서

$a=b-k$이므로 $1\le a\le n-k$이고,

$d-c=n-k$에서 $c=d-n+k$인데

c는 자연수이고 $d\le n$이므로 $1\le c\le\boxed{k}$이다.

$1\le a\le n-k$, $1\le c\le k$에서

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{(n-k)\times\boxed{k}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{\boxed{n-1}}(n-i)\times i}$$

$\mathrm{P}(X=k)$의 분모를 계산하면

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\times i=\sum_{i=1}^{n-1}(ni-i^2)=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}\left\{k\times\frac{6(n-k)\times\boxed{k}}{n(n-1)(n+1)}\right\}\\&=\frac{6}{\boxed{n(n-1)(n+1)}}\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}\{k\times(n-k)\times\boxed{k}\}\\&=\frac{n}{2}\end{aligned}$$

$f(n)=n-1$, $g(k)=k$, $h(n)=n(n-1)(n+1)$에서

$$\frac{h(7)}{f(8)\times g(6)}=\frac{7\times6\times8}{7\times6}=8$$

17) [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

세 수 x_1, x_2, x_3을 순서쌍 (x_1,x_2,x_3)과 같이 나타내자.

x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값을 p, 최솟값을 q, 나머지 수를 r, $p-q=k$ $(k=0,1,\cdots,5)$라 하면 순서쌍 (x_1,x_2,x_3)의 개수는 p, q, r를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(1) $k=0$일 때

세 수가 모두 같으므로

순서쌍 (x_1,x_2,x_3)의 개수는 $\boxed{6}$이고,

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6^3}\times\boxed{6}$

(2) $k\ne0$일 때 $(1\le k\le5)$

순서쌍 (p,q)의 개수는 각각의 k에 대하여 $6-k$이고

i) $k=1$일 때

순서쌍 (x_1,x_2,x_3)의 개수는

$5\times\left(\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}\right)$

ii) $2\le k\le5$일 때

① $r=p$ 또는 $r=q$인 경우

p, p, q와 p, q, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}$

② $r\ne p$이고 $r\ne q$인 경우

r의 개수는 각각의 k에 대하여 $k-1$이고

p, r, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3\mathrm{P}_3=3!$이므로 $(k-1)\times3!$

①, ②에 의하여

순서쌍 (x_1,x_2,x_3)의 개수는

$(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+(k-1)\times3!\right\}$

그러므로 $1\le k\le5$일 때,

순서쌍 (x_1,x_2,x_3)의 개수는

$(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+(\boxed{k-1})\times3!\right\}$

(예를 들어)

$k=3$인 경우

(p,r,q)는 $(4,r,1)$, $(5,r,2)$, $(6,r,3)$

이므로 개수는 3

(p,r,q)가 $(4,r,1)$일 때

① $r=4$ 또는 $r=1$인 경우

4, 4, 1과 4, 1, 1을 일렬로 나열하는

방법의 수는 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}$

② $r \neq 4$이고 $r \neq 1$인 경우

r는 3 또는 2이므로 r의 개수는 2

p, r, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3\mathrm{P}_3 = 3!$이므로 $2 \times 3!$

①, ②에 의하여

4, r, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!$

$(5, r, 2)$, $(6, r, 3)$일 때에도 같은 방법으로

구하면 각각 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!$

그러므로 $k=3$인 경우

순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는

$3\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+2\times 3!\right)$

그러므로

$$\mathrm{P}(X=k)$$
$$=\frac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+\left(\boxed{k-1}\right)\times 3!\right\}$$

(1), (2)에 의하여 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$
$$= \frac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}\left(\boxed{6k^2-k^3}\right) = \frac{35}{12}$$

$a=6$, $f(k)=k-1$, $g(k)=6k^2-k^3$

따라서 $\frac{f(5)\times g(3)}{a}=\frac{4\times 27}{6}=18$