친절한제로스
6평 30번 더 들여다보기 : 설계과정과 교훈

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$$

이고, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\dfrac{\ln 17}{8}$일 때, $2\{f(4)+f(-4)\}-\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

곱의 미분을 기준으로 새롭게 바라볼 수 있니?

(1) 접선의 방정식 : $y=f'(t)(x-t)+f(t)$에서 $g(t)=f(t)-tf'(t)$

(2) $g(t)$를 다르게 바라보기 : $g(t)=f(t)-tf'(t)=(tf)'-2tf'$

(3) 적분 생각해보기 : $g(t)$를 적분한다면 부분적분을 쓸 줄 알아야 함 (tf'의 적분 처리)

3-a. $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} g(t)dt = \left. tf\right|_{a_n}^{a_{n+1}} - \left. 2tf\right|_{a_n}^{a_{n+1}} + 2\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt = -\left. tf\right|_{a_n}^{a_{n+1}} + 2\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt$

3-b. 특징 관찰

정적분과 시그마의 기본 성질

① 첫 번째 항($\left. tf\right|_{a_n}^{b_{n+1}}$)과 두 번째 항 $2\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt$는 **모두 구간확장이 가능**

② 실제 구간확장을 해보자.

힌트는 : $g(t+1)-g(t)$

$[a_n, a_{n+1}]$를 $[a_{n-k}, a_{n+k}]$까지 확장하려면... **쭉 대입해서 더해야 함**.

$\displaystyle\int_{a_{n+k-1}}^{a_{n+k}} g(t)dt = -\left. tf\right|_{a_{n+k-1}}^{a_{n+k}} + 2\int_{a_{n+k-1}}^{a_{n+k}} f(t)dt$

...

$\displaystyle\int_{a_{n-k}}^{a_{n-k+1}} g(t)dt = -\left. tf\right|_{a_{n-k}}^{a_{n-k+1}} + 2\int_{a_{n-k}}^{a_{n-k+1}} f(t)dt$

다 더하면, $\displaystyle\int_{a_{n-k}}^{a_{n+k}} g(t)dt = +(a_{n-k})f(a_{n-k})-(a_{n+k})f(a_{n+k})+2\int_{a_{n-k}}^{a_{n+k}} f(t)dt$ ... (*)

③ 따라서 $a_{n-k}+a_{n+k}=0$로 세팅하면 구해야 하는 값을 예쁘게 묶어서 줄 수 있다.

(*)을 정리하면 $a_{n-k}\times\{f(a_{n-k})+f(a_{n+k})\}+2\displaystyle\int_{a_{n-k}}^{a_{n+k}} f(t)dt$

여기서 $a_{n-k}=-\alpha$로 두면 $-\alpha\{f(-\alpha)+f(\alpha)\}+2\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt$

④ 이 때, 첫 번째 항과 두 번째 항의 계수의 비는 $(-\alpha):2$

⑤ $(-\alpha)$의 값은 2의 배수가 되는 것이 좋으니, 그 후보는 $2, 4, 6, 8, \ldots$이고 적당히 4정도로 설정하면 $-4\{f(-4)+f(4)\}+2\displaystyle\int_{-4}^{4} f(t)dt$를 구하는 것으로 세팅 가능

⑥ 우변을 구해야 하는 것으로 정하면, 좌변을 결정해주어야 함 : a_n, a_{n+1}을 어떻게 설정해줄까? 구간 길이를 어떻게 세팅할 것인가? : 무난하게 1로 주자.

그러면 좌변은 $\displaystyle\int_t^{t+1} g(x)dx$ (**)로 표현됨.

⑦ 적분하기 전의 세상으로 돌려주자 : (**)을 미분하면 $g(t+1)-g(t)$ (***)
⑧ (***)의 결과가 적분 가능한 함수로 주어야하는데, 무엇으로 줄까?
: 미적2의 초월함수는 **지수, 로그, 삼각함수**
: 치환적분을 쓰게 만들고 싶은데+예전에 나온 함수 형태를 활용하자+단순한 형태 지양(합성된 형태 지향)
: $g(t+1)-g(t)=h(t)$라고 하면

(후보1) $h(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{d}{dt}\{\ln(1+t^2)\}$

(후보2) $h(t)=\dfrac{4t^3}{1+t^4}=\dfrac{d}{dt}\{\ln(1+t^4)\}$

(후보3) $h(t)=\dfrac{1}{1+e^{-t}}=\dfrac{d}{dt}\{\ln(1+e^t)\}$

...

⑨ 적나라하게 $g(t+1)-g(t)$를 제시하지 않고, **간접적으로 주고 싶다**. 즉, $g(t+1)-g(t)$ 앞에 곱해진 형태로 포장을 해야하니, **절대로 0이 되는 일이 없는 놈을 양변에 곱하거나 나눌 수 있어야 한다**. 따라서 분수함수의 형태 중 분모가 절대 0이 되지 아니한 녀석으로 하자.

⑩ $h(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$으로 두면 이제 세팅 완료.

(4) 정리

(원래표현) $\displaystyle\int_t^{t+1} g(x)dx=\int_c^t \frac{2x}{1+x^2}dx=-xf\Big|_t^{t+1}+2\int_t^{t+1} f(x)dx$

(제시) $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$, $boundary\ condition$(상수값)
(평가요소)
① $g(t)$를 다르게 볼 수 있니?
② $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$를 보고 적분할 생각을 할 수 있니?
③ ②의 적분을 계산량을 적절히 줄이는 방향으로 할 수 있니?
④ 정적분의 구간확장을 자연스럽게 할 수 있니? (적분의 본질 = 더한다)
⑤ 마지막 계수 잘 보고, 실수안할 수 있니?

(5) 기타 생각
① $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$는 어차피 저 상태로 써먹을 수 없으니 미분 아니면 적분
: 그런데, 미분은 할 수 없음 (문제에 f의 이계도함수가 존재한다는 이야기가 없음)
② $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$에 $g(t)=f(t)-tf'(t)$를 대입한다면 더 깊게 기출분석을 해야 함
: 가로로 6개 이상의 항이 전개되는 방향은 지양되어야 함 + 항상 무얼 하기 전에 생각과 효용을 따져야 함
③ 이 문제가 그다지 좋지 아니한 점
(a) $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$에서 $t=0$을 넣으면 $g(1)=g(0)$이 얻어지는데, 이를 문제 풀이에 활용할 여지가 없다. $t=0$일 때의 접선의 y절편과 $t=1$일때의 접선의 y절편이 같다는 것은 기하학적으로 무엇을 의미하는가? (특별히 의미하는 바가 없다-특정 상황을 의미하지 않음-는 것이 문제이다)
(b) 역대 킬러 30은 '그래프 작도'가 매우 중요한 평가요소였으나 이 문제에서는 '그래프 작도'가 불필요하며 '그래프 작도'를 할 경우 오히려 돌아가게 됨
(c) 이는 주어진 함수방정식 $g(t+1)-g(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$을 만족하는 $g(t)$의 탐색이 고교과정 밖이기 때문임.

(6) 더 생각해볼 문제

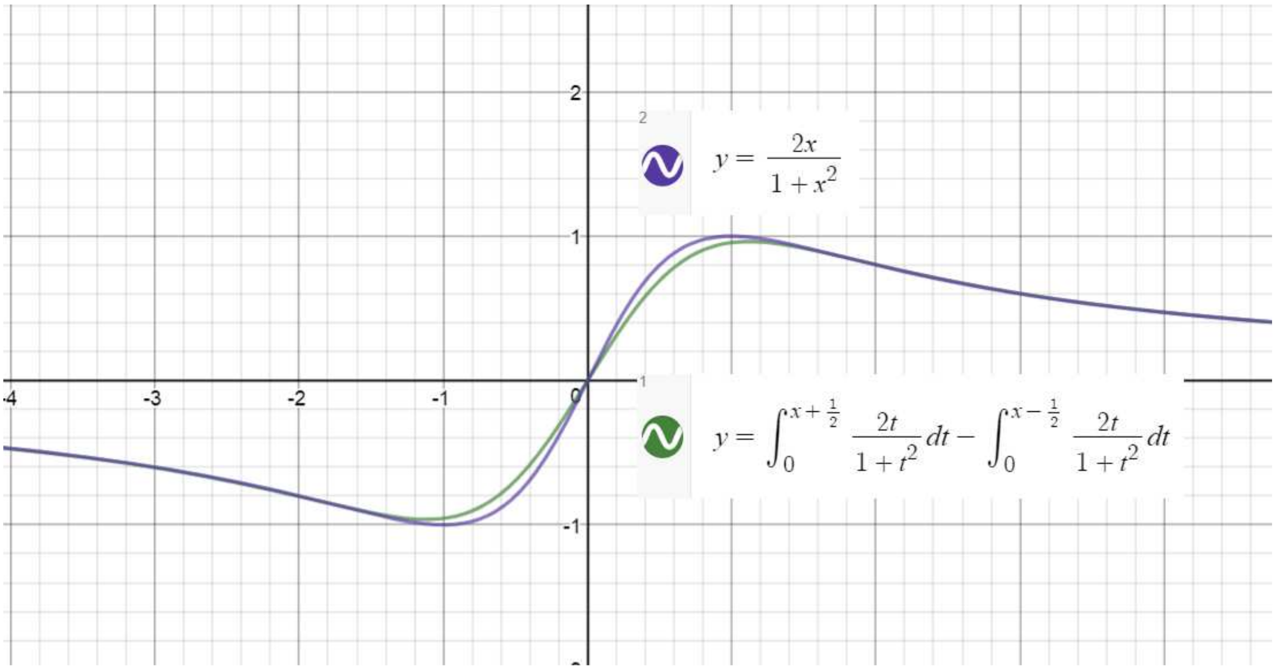
① $f(x+1)-f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$에서 $f(x)$의 정체는 무엇일까? (고교과정 밖, 함수방정식 파트)

② $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2n}{1+n^2}$에서 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{2k}{1+k^2}$으로 적을 수 있다. (정의역 x를 1 이상의 정수 n으로 한정)

※ 등차수열 a_n에 대하여 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이고 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}=\int\{a_1+(n-1)d\}dn+O(n)$ ($O(n)$은 보정을 위한 n에 대한 함수)로부터 시그마와 인테그랄의 유사성을 파악할 수 있다.

따라서 $f(x)=\int\dfrac{2x}{1+x^2}dx+O(x)$의 형태로 아마 표현이 될 것이다.

아래는 $f(x)=\int_0^{x-\frac{1}{2}}\dfrac{2t}{1+t^2}dt$일 때, $f(t+1)-f(t)$와 $\dfrac{2x}{1+x^2}$의 그래프를 그려본 것이다.



③ 교훈 : 함수방정식 함부로 풀려고 도전하지 말자. x되는 수가 있다.

④ 기계적 미분과 적분을 지양하자.

⑤ $f(x+1)-f(x)=g(x)$일 때, $f(x)=\int g(x)dx+O(x)$ 정도로 근사할 수 있다.