2012학년도 대학수학능력시험 대비

2011년도 9월 고3 평가원 모의고사 정답 및 해설

수리 가형

수리'가'형 정답

1	④	2	①	3	④	4	⑤	5	④
6	②	7	①	8	①	9	②	10	②
11	⑤	12	⑤	13	④	14	③	15	⑤
16	③	17	③	18	②	19	①	20	④
21	③	22	21	23	40	24	22	25	35
26	52	27	15	28	19	29	45	30	392

해 설

1. 정답: ④

출제의도: 로그의 계산

$\log \quad 2+\log_2\frac{4}{3}=\log_2(12\times\frac{4}{3})=\log_2 2^4=4$

2. 정답: ①

출제의도: 벡터의 내적 계산

두 벡터 $\vec{a}=(x+1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -x)$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이다.

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=x+1-2x=0$

$\therefore x=1$

3. 정답: ④

출제의도: 역행렬을 구할수 있는지를 묻는 문제

행렬 $\quad = \left.\begin{matrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{matrix}\right)$의 역행렬 A^{-1}을 구하면

$A^{-1}=\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$이다.

따라서 $3A^{-1}=3\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$이다.

행렬 $3A^{-1}$의 모든 성분의 합은 1이다.

4. 정답: ⑤

출제의도: 확률의 연산

두 사건 A, B가 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$을 만족한다.

조건에서 $P(A^c)=\frac{6}{7}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{7}$이므로 $P(B)=x$라 하면

$P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$,

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{7}x$이다.

확률의 덧셈의 성질에 의하여

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{5}{7}=\frac{1}{7}+x-\frac{1}{7}x$

$\frac{6}{7}x=\frac{4}{7} \qquad \therefore\ x=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 $P(B)=\frac{2}{3}$이다.

5. 정답: ④

출제의도: 삼각함수의 덧셈정리

직선 $y=-2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라 하면

$\tan\alpha=-2$이고,

직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라 하면

$\tan\beta=1$이다.

이때, 두 직선이 이루는 예각을 θ라 하면

$|\tan\theta| = |\tan(\alpha-\beta)| = \left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{-2-1}{1+(-2)\cdot 1}\right|=3$

이다.

6. 정답: ②

출제의도: 원형배열의 경우의 수

A, B가 이웃하므로 A, B를 한 묶음으로 보면

$(A,\ B)$, C, D, E, F를 원형으로 배열한 후 A, B의 자리를 바꾸면 된다.

$\therefore\ (5-1)!\times 2!=48$

7. 정답: ①

출제의도: 로그함수와 실생활 응용문제

한 메뉴안에 선택할수 있는 항목이 개 있는 경우, 항목을 1개 선택하는 데 걸리는 시간 (초)가 다음을 만족한다.

$T=2+\frac{1}{3}log\ (n+1)$

따라서 메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n개씩 있을 때 걸리는 시간은

$T=10\ 2+\frac{1}{3}log_2(n+1)\Big)\leq 30$이다.

정리하면 $\frac{1}{3}log_2(n+1)\leq 1$

$n+1\leq 8$

$n\leq 7$

따라서 n의 최대값은 7이다.

8. 정답: ①

출제의도: 일차변환의 합성

두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면

$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이다.

이때, $f\circ g$가 나타내는 일차변환의 행렬은 AB이다.

따라서 점 $(-1,\ 1)$이 옮겨지는 점을 구하면

$AB\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$이다.

9. 정답: ②

출제의도: 초월함수의 연속

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{3x}-1}{x(e^x+1)} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x(e^x+1)}=\lim_{x\to 0}\Big\{\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{e^x+1}\Big\}=1\times\frac{3}{2}=a$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

10. 정답: ②

출제의도: 조건부 확률의 계산

이 학교의 남학생일 사건을 A, 여학생일 사건을 A^c 라 하면

$P(A)=\frac{2}{5}$, $P(A^c)=\frac{3}{5}$이다.

또, 자격증을 가지고 있는 학생일 사건을 B, 자격증을 가지고 있지 않은 학생일 사건을 B^c라 하면 $P(B)=\frac{7}{10}$, $P(B^c)=\frac{3}{10}$이다.

조건에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$이므로

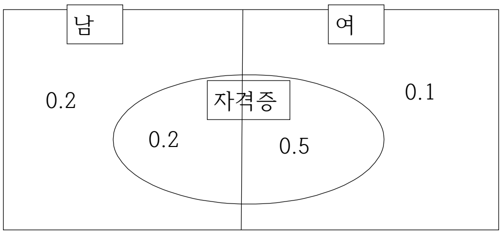
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A\cup B)=\frac{9}{10}$이다.

$P(A^c\mid B^c)=\frac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)}=\frac{P((A\cup B)^c)}{P(B^c)}=\frac{1}{3}$

(별해)

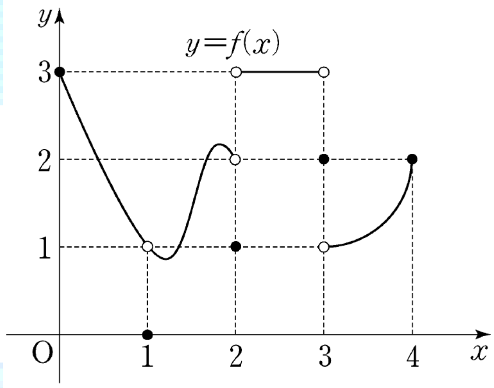
벤 다이어그램으로 접근하면,



즉, $\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$

11. 정답: ⑤

출제의도: 함수의 극한



$\lim_{x\to +0}f(f(x))=\lim_{x\to 3-0}f(x)=3$

$\lim_{x\to 2+0}f(f(x))=f(3)=2$

$\lim_{x\to +0}f(f(x))+\lim_{x\to 2+0}f(f(x))=5$

12. 정답: ⑤

출제의도: 무리방정식

양변을 제곱하면

$f(-x)+5=\{f(-x)\}^2-2f(-x)+1$

$\{f(-x)\}^2-3f(-x)-4=0$

$f(-x)=4,\ -1$

$f(-x)\geq 1$이므로, $f(-x)=4$

$\therefore$ $f(-x)$는 $x=2$에 대칭인 함수이므로,

$\frac{\alpha+\beta}{2}=2$, $\alpha+\beta=4$

13. 정답: ④

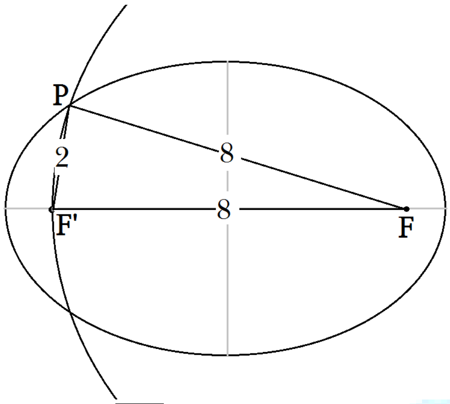
출제의도: 타원의 정의를 이용한 삼각형의 넓이 구하기

초점의 좌표를 $\pm c, 0)$라 두면 $c = 5^2 - 3^2 = 16$

$\therefore\ c = 4 \quad \therefore\ F' = 2c = 8$

또한, $PF + PF' =$ 장축의 길이 $= 10$ 이고

$\overline{FF'}$ 처럼 $\overline{PF}$ 도 원의 반지름이므로 $\overline{PF} = 8$, $\overline{PF'} = 2$



$\triangle FPF'$에서 $\overline{PF'}$ 를 밑변으로 보면 높이는 $8^2 - 1^2 = 3\ \ 7$ 이고 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

14. 정답: ③

출제의도: 행렬의 연산

두 조건을 만족하는 행렬 A, B에 대하여

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$이므로 $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$라 하면

조건 (가)에서 $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $a_1 - a_2 = 0$, $a_3 - a_4 = 0$이다.

$\therefore\ a_1 = a_2 = x$라 하고, $a_3 = a_4 = y$라하면

행렬 $B = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}$이다.

조건 (나)에서

$AB = 2A$, $BA = 4B$이므로 대입하여 연립하면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$에서 $x + y = 2$이고,

$\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}$에서 $x + ax = 4x$, $y + ay = 4y$이다.

두 식을 더하면

$x + y + a(x + y) = 4(x + y)$에서 $a = 3$이다.

$\therefore\ A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & 1+x \\ a+y & a+y \end{pmatrix}$

따라서 $A + B$의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합을 구하면

$1 + x + a + y = 1 + 2 + 3 = 6$이다.

[다른 풀이]

조건 (나)에서 $A(B - 2E) = O$, $B(A - 4E) = O$이므로

$A(A - 4E) = O$을 만족한다.

$\therefore\ A^2 - 4A = O$에서 $1 + a = 4$이므로 $a = 3$이다.

또, $B(B - 2E) = O$을 만족하므로

$B^2 - 2B = O$이다.

$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - q \\ r - s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $p = q$, $r = s$이다.

$\therefore B = \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$이므로 $p + r = 2$

따라서 $A + B$의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합을 구하면

$1 + p + a + r = 1 + 2 + 3 = 6$이다.

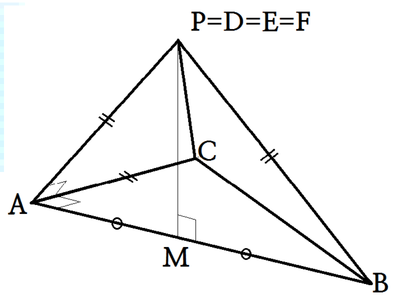
15. 정답: ⑤

출제의도: 공간도형의 위치관계

ㄱ. 전개도를 다시 접으면 $P = D = E = F$이고, 그림과 같은 사면체가 된다.

$\triangle CAP$는 $CA = \overline{PA}$인 직각 이등변 삼각형이므로

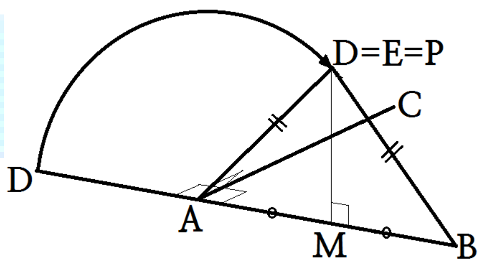
$CP = \sqrt{2}\,AP = \sqrt{2}\,BP$ (참)



ㄴ. 네 점 A, B, C, P 는 한 평면을 이루지 않고 사면체를 이루므로 AB와 직선 CP는 꼬인위치에 있다. (참)

ㄷ. 전개도를 접어서 다시 사면체를 만들게 되면 $\overline{AC}$를 접는 선으로하여 $\triangle ACD$를 접게 되고 $AD \perp \overline{AC}$이므로 점 D는 $\overline{AC}$를 회전축으로 하여 회전한다. 따라서, 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 $\overline{AB}$위에 떨어진다.

또한 $\overline{PA} = PB$이므로 그 수선의 발은 $\overline{AB}$의 중점이 된다. (참)



따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

16. 정답: ③

출제의도: 여러 가지 함수의 적분

A $= \int_0^k x\sin x\,dx$, B$= \int_k^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\sin x\right) dx$

A=B 이므로,

$$\int_0^k x\sin x\,dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\,dx - \int_k^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$

$^{k}\ sinx\,dx+\int_{k}^{\frac{\pi}{2}} xsinx\ dx=\int_{k}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xsinx\ dx=\int_{k}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx$

$[-xcosx]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ dx=\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}-k)$

$1=\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}-k)$

$k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$

17. 정답: ③

출제의도: 표본평균의 분포

$: N(m,30^2)$

$X : N(m,10^2)$

$G(k)=P(x\le m+30k)$
$\quad =P(z\ \le k)$

$H(k)=P(x\ge m-30k)$
$\quad =P(z\ \ge -3k)$

ㄱ.

$G(0)=P(z\le 0)=0.5$
$H(0)=P(z\ge 0)=0.5$

(참)

ㄴ.

$G(3)=P(z\le 3)$
$H(1)=P(z\ge -3)$

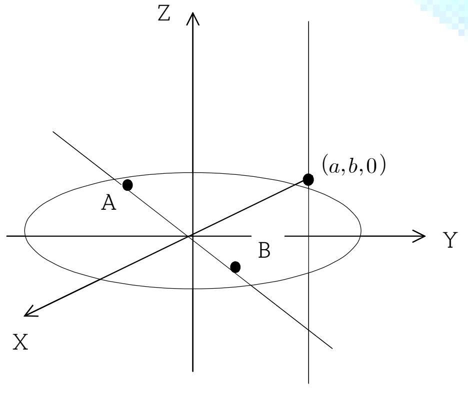
(참)

ㄷ.

$G(1)+H(-1)=P(z\le 1)+P(z\ge 3)<1$ (거짓)

18. 정답: ②

출제의도: 공간도형의 방정식



직선 AB를 구하면, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ $\cdots$ ①

$(a,b,0)$을 지나고 z축에 평행인 직선은

$x=a,\ y=b$ $\cdots$ ②

①,②를 연립하여 교점을 구하면,

$\frac{a-1}{1}=\frac{b-1}{2}$ $\quad\therefore 2a-2=b-1$
$b=2a-1$ $\cdots$ ③

또, $(a,b,0)$ 은 $x^2+y^2=13$ 위의 점 이므로

$\therefore a^2+b^2=13$ $\cdots$ ④

③,④를 연립하여 구하면,

$a=-\frac{6}{5}$, $b=-\frac{17}{5}$ $\quad\therefore a+b=-\frac{23}{5}$

19. 정답: ①

출제의도: 점화식의 풀이과정 증명

모든 자연수 n에 대하여

$4a_{n+1}-1=4\times\frac{3a_n-1}{4a_n-1}-1=2-\frac{1}{4a_n-1}$이다.

$a_1=1$이고

수열 $b_n\}$을

$b_1=1,\ b_{n+1}=(4a_n-1)b_n\ (n\geqq 1)$----(*)

이라하면

⋮

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$이다.

즉, $\{b_n\}$은 등차수열이므로 공차 $d=b_2-b_1$이고

$b_2=(4a_1-1)b_1=3$이므로 $d=2$이다.

$\therefore\ b_n=1+(n-1)2=\ 2n-1$

$\therefore\ f(n)=2n-1$

(*)에 의하여 $2n+1=(4a_n-1)(2n-1)$

$4a_n-1=\frac{2n+1}{2n-1}$

$4a_n=\frac{2n+1}{2n-1}+1=\frac{4n}{2n-1}$

$\therefore\ a_n=$ (나) $\frac{n}{2n-1}$

$\therefore\ g(n)=\frac{n}{2n-1}$

따라서 $f(n)=2n-1,\ g(n)=\frac{n}{2n-1}$이므로

$f(14)\times g(5)=27\times\frac{5}{9}=15$이다.

20. 정답: ④

출제의도: 여러 가지 함수의 정적분

(가) 조건에서

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\int_{0}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=1$ 을 이용하면,

$\int_{0}^{x} f(t)dt=1-\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ 이고, 이를 (나)조건에 대입하자.

$\cos x \quad {}^{x} f(t)dt$

$= \cos x\left(1 - \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt\right) = \cos x - \cos x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

이므로, (나)조건에 의해,

$\cos x - \cos x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

$\cos x = \cos x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt + \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

$\cos x = (\cos x + \sin x) \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

$\therefore \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \dfrac{\cos x}{\cos x + \sin x}$

양변을 미분하면,

$f(x) = \dfrac{\sin x(\sin x + \cos x) + \cos x(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2}$ 이므로,

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$

21. 정답: ③

출제의도: 다항함수의 미분

ㄱ. (가)에 의해 $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$, $f(\gamma) = \gamma$ 이므로

$f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$, $f(f(\beta)) = f(\beta) = \beta$, $f(f(\gamma)) = f(\gamma) = \gamma$ 이다.

(참)

ㄴ. $f(f(x)) = \{f(x) - x\}g(x) + h(x)$라 두면,

$(\alpha) = f(f(\alpha)) - \ f(\alpha) - \alpha\}g(\alpha)$
$= \alpha - (\alpha - \alpha)g(\alpha)$
$= \alpha$
마찬가지로
$h(\beta) = \beta$, $h(\gamma) = \gamma$

…… ①

한편, $f(x) - x$가 3차 다항식이므로 나머지인 $h(x)$는 2차이하의 다항식이고

①은 방정식 $h(x) = ax^2 + bx + c = x$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다는 뜻이므로 $a = c = 0$, $b = 1$이 되어 항등식이 될 수밖에 없다.

따라서, $h(x) = x$이다. (참)

ㄷ. (나)와 (다)에 의해 $f'(3) = 0$, $f(f(3)) = 5$이고 $h(x) = x$이므로

$f(f(x)) = \{f(x) - x\}g(x) + x$ …… ②

양변을 미분하여

$f'(f(x))f'(x) = \{f'(x) - 1\}g(x) + \{f(x) - x\}g'(x) + 1$ …… ③

②에서 $x = 3$일 때,

$f(f(3)) = \{f(3) - 3\}g(3) + 3$

$\therefore\ 5 = (7 - 3)g(3) + 3$

$\therefore\ g(3) = \dfrac{1}{2}$

③에서 $x = 3$일 때,

$f'(f(3))f'(3) = \{f'(3) - 1\}g(3) + \{f(3) - 3\}g'(3) + 1$

$\therefore\ f'(7) \times 0 = (0 - 1) \times \dfrac{1}{2} + (7 - 3)g'(3) + 1$

$\therefore\ g'(3) = -\dfrac{1}{8}$ (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄴ 이다.

22. 정답: 21

출제의도: 로그함수의 미분

$f(x) = \ln(2x - 1)$이므로 $f'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$

$\therefore f'(10) = \dfrac{2}{19}$

$\therefore p + q = 21$

23. 정답: 40

출제의도: 연속확률 분포

$f(x) = ax + b\ (0 \le x \le 1)$가 확률밀도함수이므로

$\int_0^1 (ax + b)dx = \left[\dfrac{1}{2}ax^2 + bx\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}a + b = 1$ …… ①

$(X) = \int_0^1 x(ax + b)dx = \left[\dfrac{1}{3}ax^3 + \dfrac{1}{2}bx^2\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{2}b = \dfrac{7}{12}$ …… ②

①, ②에서 $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore 80ab = 40$

24. 정답: 22

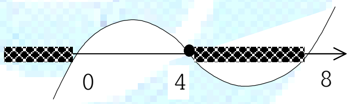
출제의도: 분수 부등식

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 8} \le 0$

$\dfrac{x - 4}{x(x - 8)} \le 0$

$x(x - 4)(x - 8) \le 0\ (x \ne 0,\ x \ne 8)$

이므로,



이 범위에서 자연수 x는 4,5,6,7 이므로, 합은 22

25. 정답: 35

출제의도: 수열의 극한의 성질

수열 $a_n\}$, $\{b_n\}$이 조건

$\lim_{n\to\infty}(n + 1)a_n = 2$, $\lim_{n\to\infty}(n^2 + 1)b_n = 7$을 만족하므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(10n + 1)b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(10n + 1)(n^2 + 1)b_n}{(n + 1)a_n} \times \frac{(n + 1)}{(n^2 + 1)}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}(n^2 + 1)b_n}{\lim_{n\to\infty}(n + 1)a_n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{(10n + 1)(n + 1)}{(n^2 + 1)}$$

$$= \frac{70}{2} = 35$$

26. 정답: 52

출제의도: 이차곡선의 접선구하기

점 (a,b)이 쌍곡선 위의 점이므로 $\dfrac{a^2}{12} - \dfrac{b^2}{8} = 1$ …… ①

또한, 쌍곡선 $\frac{x}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 (a,b)에서의 접선은 $\frac{ax}{12} - \frac{by}{8} = 1$이고, 이 접선이 타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$의 넓이를 이등분하므로 타원의 중심인 $(2,0)$을 지나야 한다.

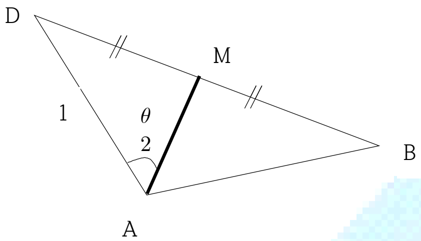
$\therefore \frac{2a}{12} = 1 \quad \therefore a = 6$

① 에서 $\frac{6^2}{12} - \frac{b^2}{8} = 1 \quad \therefore b^2 = 16$

$\therefore a^2 + b^2 = 52$

27. 정답: 15

출제의도: 삼각함수를 이용한 도형의 넓이의 최대값 구하기



$\triangle$ABD에서 DB에 수직이등분선 M을 그으면,

$\angle$DAM=$\frac{\theta}{2}$ 이고, M=sin$\frac{\theta}{2}$, DB=2sin$\frac{\theta}{2}$ 가 된다.

즉, $BC = CB = \overline{DB}$ =2sin$\frac{\theta}{2}$ 인 정삼각형 $\triangle$BDC가 된다.

사각형 ABCD = $\triangle$BDC + $\triangle$ABD 이므로,

전체넓이 S = $\frac{3}{4}(2\sin\frac{\theta}{2})^2 + \frac{1}{2}sin\theta$ 가 된다.

S = $\frac{\sqrt{3}}{4}(4\sin^2(\frac{\theta}{2})) + \frac{1}{2}sin\theta$ = $\sqrt{3}(\frac{1-\cos\theta}{2}) + \frac{1}{2}sin\theta$

= $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta$

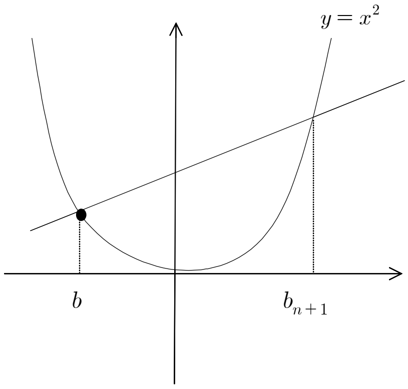
$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(\theta - \frac{\pi}{3})$

즉, $\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 일 때 최대이므로, $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

$\sin\theta = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 즉, $60\sin^2\theta = 15$

28. 정답: 19

출제의도: 등비수열의 극한



$a_n = 12(\frac{1}{3})^{n-1}$ 이고,

기울기가 a_n 이고, $_n(-b_n, b_n{}^2)$ 을 지나는 직선을 l이라 하면,

l 은 $y - (b_n)^2 = a_n(x + b_n)$ 이고,

l과 $y = x^2$와의 교점을 구하면,

$x^2 - (b_n)^2 = a_n(x + b_n)$

$x^2 - a_n x - b_n(a_n + b_n) = 0$

$(x + b_n)(x - (a_n + b_n)) = 0$ 에서 $a_n + b_n = b_{n+1}$

즉, $b_{n+1} - b_n = a_n$ 이므로 b_n은 계차수열.

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 12(\frac{1}{3})^{n-1}$

따라서, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1 + \frac{12}{1 - \frac{1}{3}} = 19$

29. 정답: 45

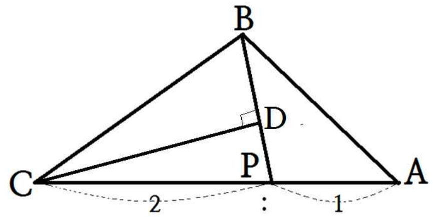
출제의도: 이면각을 활용한 정사영의 넓이

$\triangle$ BC의 넓이가 9이고 $CP : AP = 2:1$이므로 $\triangle CPB$의 넓이는 6이다.

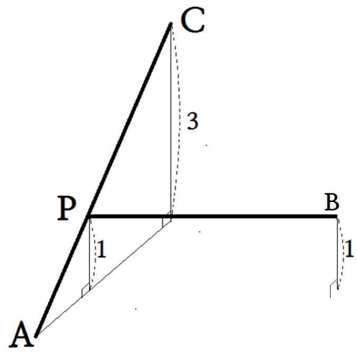
또한 점 C에서 PB에 내린 수선의 발을 D라하면

$\triangle CPB$의 넓이 $= \frac{1}{2}\overline{BP}\ CD = \frac{1}{2}\times 4\times \overline{CD} = 6$

$\therefore\ \overline{CD} = 3$



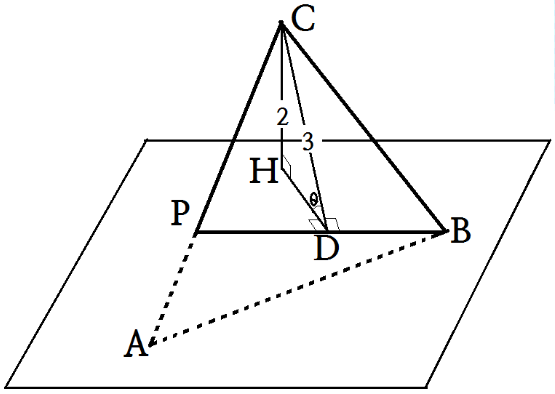
한편, 점 C에서 평면 α까지의 거리가 3이고, 점 P가 선분 $\overline{AC}$의 $1:2$외분점이므로 점 P에서 평면 α까지의 거리는 1이고 $\overline{PB}$는 평면 α와 평행이 된다.



$\overline{PB}$가 평면 α에 포함되도록 $\triangle ABC$를 평면 α방향으로 1만큼 평행이동하고 점C에서 평면 α에 수선의 발 H를 내리면 $\overline{PB}$가 $\triangle ABC$와 평면 α의 교선이 되고 $\overline{CH} = 2$이다.

다음 그림에서

$\overline{CD}\perp\overline{PB}$이고 $\overline{CH}\perp\alpha$ 이므로 $HD\perp\overline{PB}$ ($\because$삼수선정리)이며 $\triangle ABC$와 평면 α 사이의 각은 $\theta = \angle CDH$가 된다.



$\therefore \sin\theta = \frac{2}{3}$

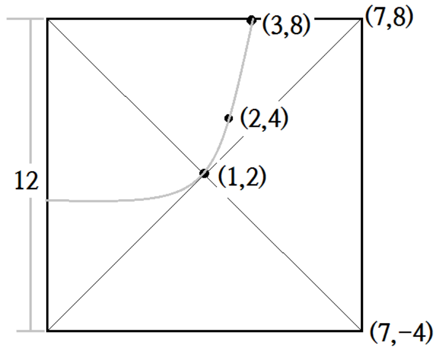
$\therefore \cos\theta = \frac{5}{3}$

$\therefore S^2 = (9\cos\theta)^2 = (3\sqrt{5})^2 = 45$

30. 정답: 392

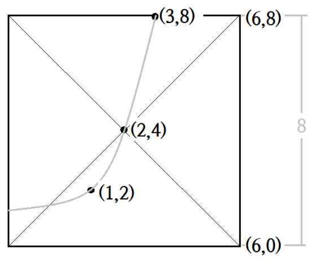
출제의도: 수열의 발견적 추론

i) $n=1$일 때,



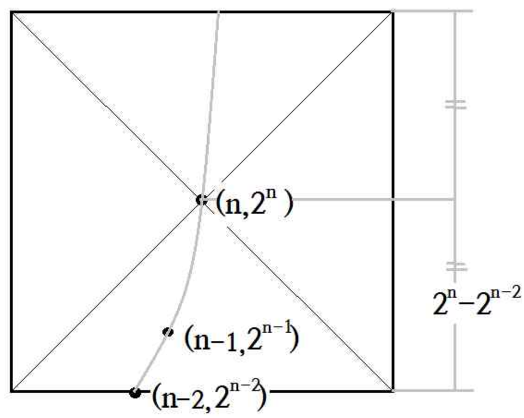
$a\ = (8-2)\times 2 = 12$

ii) $n=2$일 때,



$\therefore a_2 = (8-4)\times 2 = 8$

iii) $n\geq 3$일 때,



$\therefore a_n = (2^n - 2^{n-2})\times 2 = 3\times 2^{n-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{7} a_k = 12+8+3(1+2+2^2+2^3+2^4) = 392$