1) 답 3

[해설] 표본공간 S의 부분집합인 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여 $A \cup A^C = S$이고, 두 사건 A와 B_n이 서로 배반사건이면

$A \cap B^n = \varnothing$임을 이용한다.

한 개의 주사위를 던지는 시행에 대한 표본공간 S는

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4의 약수인 눈의 수가 나오는 사건이 A이므로

$A = \{1, 2, 4\}$

이때 $A \cup A^C = S$이므로

$A^C = \{3, 5, 6\}$

한편, n 이하의 눈의 수가 나오는 사건이 B_n이므로

$B_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

이때 사건 A^C과 사건 B_n이 서로 배반사건이 되려면 $A \cap B^n = \varnothing$이어야 하므로 자연수 n의 값은 1, 2이다.

따라서 6 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 $1+2=3$

2) 답 ④

[해설] $(A \cap B^C)^C = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로

$B = (A \cup B) \cap (A \cap B^C)^C$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$= \{1, 4, 6, 7, 8\}$

따라서 사건 B의 원소의 개수는 5이다.

3) 답 30

[해설] 사건 A_2는 2의 배수가 적혀 있는 구슬이 나오는 사건이므로

$A_2 = \{2, 4, 6, 8, \cdots, 18, 20\}$

사건 A_3은 3의 배수가 적혀 있는 구슬이 나오는 사건이므로

$A_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

사건 $A_2 \cap A_3$은 6의 배수가 적혀 있는 구슬이 나오는 사건이므로

$A_2 \cap A_3 = \{6, 12, 18\}$ㅋ

이때 사건 $A_2 \cap A_3$과 사건 A_n이 서로 배반사건이 되려면 $(A_2 \cap A_3) \cap A_n = \varnothing$이어야 하므로 10 이하의 자연수 n의 값은 5, 7, 8, 10이다.

따라서 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은

$5+7+8+10=30$

4) 답 ③

[해설] 사건 A의 수학적 확률 $\mathrm{P(A)}$를 구할 때는 일어날 수 있는 모든 경우의 수와 사건 A가 일어나는 경우의 수를 구하고 다음을 이용한다.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

세 명이 각각 주사위를 1개씩 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6 \times 6 \times 6 = 216$

세 명 중 같은 눈의 수가 나오는 2명을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이고, 이 3가지의 각 격우에 대하여 같은 눈의 수와 다른 눈의 수를 정하는 경우의 수는

${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$

이므로 같은 눈의 수가 나온 주사위가 2개인 경우의 수는

$3 \times 30 = 90$

따라서 구하는 확률은

$\frac{90}{216} = \frac{5}{12}$

5) 답 ③

[해설] 두 개의 주사위 $\mathrm{A, B}$를 동시에 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6 \times 6 = 36$

$a+b$가 짝수가 되려면 a, b가 모두 홀수이거나 a, b가 모두 짝수이어야 한다.

또한, ab가 짝수가 되려면 a, b 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 $a+b$와 ab가 모두 짝수가 되려면 a, b가 모두 짝수이어야 하므로 이 경우의 수는

$3 \times 3 = 9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

6) 답 ⑤

[해설] 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 두 번의 시행에서 나오는 모든 경우의 수는

${}_{10}P_2 = 10 \times 9 = 90$

$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{3a+2b}{6}$ $\cdots$ ㉠

a가 홀수이면 $3a+2b$도 홀수이므로 $\frac{3a+2b}{6}$는 자연수가 될 수 없다.

그러므로 a는 짝수이다.

또한, a가 짝수이면 ㉠에서 $\frac{a}{2}$가 자연수이므로 $\frac{b}{3}$도 자연수이어야 한다.

그러므로 b는 3의 배수이다.

이때 6은 짝수이면서 3의 배수이므로 $\frac{a}{2} + \frac{b}{3}$가 자연수인 경우의 수는

$5 \times 3 - 1 = 15 - 1 = 14$

따라서 구하는 확률은

$\frac{14}{90} = \frac{7}{45}$

7) 답 ③

[해설] 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어날 확률을 구할 때는 확률의 덧셈정리 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$를 이용한다. 특히, 두 사건 A, B가 서로 배반사건일 경우에는 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$를 이용한다.

1부터 6까지의 자연수 중 서로 다른 네 수를 택한 후 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_6P_4$이다.

임의로 택한 네 자리 자연수가 $a > b > c$를 만족시키는 사건을 A, $b > c > d$를 만족시키는 사건을 B라 하면 $a > b > c$ 또는 $b > c > d$를 만족시킬 확률은 $P(A \cup B)$이다.

(ⅰ) $a > b > c$를 만족시키는 경우

1부터 6까지의 자연수 중에서 세 개를 택하여 큰 수부터 차례로 a, b, c라 하고, 남은 3개의 자연수 중에서 한 개를 택하여 d라 하면 되므로 이 경우의 수는

${}_6C_3 \times 3$

따라서 $P(A) = \frac{{}_6C_3 \times 3}{{}_6P_4} = \frac{1}{6}$

(ⅱ) $b > c > d$를 만족시키는 경우

1부터 6까지의 자연수 중에서 세 개를 택하여 큰 수부터 차례로 b, c, d라 하고, 남은 3개의 자연수 중에서 한 개를 택하여 a라 하면 되므로 이 경우의 수는

${}_6C_3 \times 3$

따라서 $P(B) = \frac{{}_6C_3 \times 3}{{}_6P_4} = \frac{1}{6}$

(ⅲ) $a > b > c > d$를 만족시키는 경우

1부터 6까지의 자연수 중에서 세 개를 택하여 큰 수부터 차례

로 a, b, c, d라 하면 되므로 이 경우의 수는
${}_6C_4$
따라서 $P(A\cap B)=\frac{{}_6C_4}{{}_6P_4}=\frac{{}_6C_2}{{}_6P_4}=\frac{1}{24}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$

8) 답 ④

[해설] 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는
$6\times6\times6=216$
$(a-2b)(b-c)=0$에서 $a=2b$ 또는 $b=c$
이때 $a=2b$인 사건을 A, $b=c$인 사건을 B라 하면 등식 $(a-2b)(b-c)=0$을 만족시키는 사건은 $A\cup B$이다.
(ⅰ) $a=2b$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 1),\ (4,\ 2),\ (6,\ 3)$
이고, 이 3가지의 각 격우에 대하여 c의 경우의 수는 6이다.
따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $3\times6=18$이므로
$P(A)=\frac{18}{216}$
(ⅱ) $b=c$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$는
$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$
이고, 이 6가지의 각 격우에 대하여 a의 경우의 수는 6이다.
따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $6\times6=36$이므로
$P(B)=\frac{36}{216}$
(ⅲ) $a=2b=2c$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는
$(2, 1, 1),\ (4, 2, 2),\ (6, 3, 3)$
의 3가지이므로
$P(A\cap B)=\frac{3}{216}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{18}{216}+\frac{36}{216}-\frac{3}{216}=\frac{17}{72}$$

9) 답 53

[해설] '적어도 ~일 확률', '~이상일 확률', '~이하일 확률', '~가 아닐 확률' 등을 구할 대는 여사건의 확률 $P(A^C)=1-P(A)$를 이용하면 편리하다.

한 개의 주사위를 세 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는
$6\times6\times6=6^3$
a, b, c가 $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{a}$를 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$를 만족시키는 사건이다.
$\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$, 즉 $a^2=bc$를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는 다음과 같다.
(ⅰ) $a=1$일 때, $(1, 1, 1)$로 1개
(ⅱ) $a=2$일 때, $(2, 1, 4),\ (2, 2, 2),\ (2, 4, 1)$로 3개
(ⅲ) $a=3, 4, 5, 6$일 때, $(3, 3, 3),\ (4, 4, 4),\ (5, 5, 5),\ (6, 6, 6)$으로 4개
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a^2=bc$를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $1+3+4=8$이므로
$P(A^C)=\frac{8}{6^3}=\frac{1}{27}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$
이므로 $p=27,\ q=26$
즉, $p+q=27+26=53$

10) 답 ⑤

[해설] 15개의 탁구공 중에서 동시에 두 개를 꺼내는 모든 경우의 수는
${}_{15}C_2=\frac{15\times14}{2\times1}=105$
적어도 하나의 노란색 탁구공을 꺼내는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 흰색 탁구공만 두 개를 꺼내는 사건이다.
이때 흰색 탁구공 5개 중에서 동시에 두 개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$이므로 $P(A^C)=\frac{10}{105}=\frac{2}{21}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{21}=\frac{19}{21}$

11) 답 ⑤

[해설] 5개의 공 중에서 동시에 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
주머니에서 임의로 동시에 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 두 수의 곱이 홀수인 사건이다.
이때 두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수이어야 하므로 이 경우의 수는
${}_3C_2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$
따라서 $P(A^C)=\frac{3}{10}$ 이므로 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

12) 답 8

[해설] $4\le a+b\le5$에서
$a+b=4$ 또는 $a+b=5$
$a+b=4$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$
$a+b=5$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$
$4\le a+b\le5$를 만족시키는 사건이 A이므로
$A=\{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$
따라서 사건 A를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$에서 ab의 값은 $3, 4, 6$이다.
이때 사건 A와 등식 $ab=n$을 만족시키는 사건 B_n이 서로 배반사건이 되려면 $A\cap B_n=\varnothing$이어야 하므로 6 이하의 자연수 n의 값은 $1, 2, 5$이다.
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 $1+2+5=8$

13) 답 ①

[해설] 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$
이때
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\{2P(A)+P(B)\}-P(A)$
이므로
$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-P(A)\qquad \therefore\ P(A)=\frac{1}{12}$
$P(B)=\frac{1}{3}-2P(A)=\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$
따라서 구하는 값은
$P(A)P(B)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$

[다른 풀이]

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$
이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$P(A)+P(B)=\dfrac{1}{4}$ $\cdots$ ㉠

$2P(A)+P(B)=\dfrac{1}{3}$ $\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $P(A)=\dfrac{1}{12}$, $P(B)=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 값은

$P(A)P(B)=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{72}$

14) 답 ①

[해설] 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

부등식

$4\le(a-2)(b-1)\le6$ $\cdots$ ㉠

을 만족시키는 사건을 A라 하자.

(ⅰ) $(a-2)(b-1)=4$일 때,

$a-2$	1	2	4	
$b-1$	4	2	1	

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 5)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 2)$로 이 경우의 수는 3이다.

(ⅱ) $(a-2)(b-1)=5$일 때,

$a-2$	1	5
$b-1$	5	1

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 6)$으로 이 경우의 수는 1이다.

(ⅲ) $(a-2)(b-1)=6$일 때,

$a-2$	1	2	3	6
$b-1$	6	3	2	1

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$으로 이 경우의 수는 2이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 부등식 ㉠을 만족시키는 경우의 수는

$3+1+2=6$

따라서 구하는 확률은 $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

15) 답 ③

[해설] 7명의 학생이 앞에서부터 일렬로 앉는 경우의 수는 $7!$

(ⅰ) A, B가 가장 앞자리와 가장 뒷자리를 제외한 다섯 자리 중 두 자리에 앉는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2$

(ⅱ) A, B가 앉고 남은 다섯 자리에 A, B를 제외한 5명의 학생이 앉는 경우의 수는

$5!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 가장 앞자리와 가장 뒷자리를 제외한 자리에 A, B가 앉는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2\times5!$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_2\times5!}{7!}=\dfrac{5\times4}{7\times6}=\dfrac{10}{21}$

16) 답 ⑤

[해설] 집합 X의 10개의 원소 중에서 임의로 서로 다른 세 원소를 택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

택한 세 원소 중 소수인 원소를 적어도 한 개 포함하는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 소수인 원소를 하나도 포함하지 않는 사건이다.

집합 X의 원소 중 소수 2, 3, 5, 7을 제외하고 남은 6개의 원소 중 세 원소를 택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이므로

$P(A^C)=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

17) 답 ④

[해설] 집합 X에서 X로의 함수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3$

$f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $f(1)f(2)f(3)=6$인 경우

$6=1\times2\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3\ne6$

(ⅱ) $f(1)f(2)f(3)=12$인 경우

$12=2\times2\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

(ⅲ) $f(1)f(2)f(3)=18$인 경우

$18=2\times3\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수인 경우의 수는

$6+3+3=12$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{3^3}=\dfrac{4}{9}$

18) 답 ④

[해설] 두 원소 $a,\ b(a\in A,\ b\in B)$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$10\times10=100$

집합 A의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$A_0=\{6,\ 12,\ 18\}$

$A_1=\{4,\ 10,\ 16\}$

$A_2=\{2,\ 8,\ 14,\ 20\}$

집합 B의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 1, 2인 집합을 각각 B_1, B_2라 하면

$B_1=\{2^2,\ 2^4,\ 2^6,\ 2^8,\ 2^{10}\}$

$B_2=\{2,\ 2^3,\ 2^5,\ 2^7,\ 2^9\}$

따라서 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $a\in A_1$, $b\in B_2$일 때,

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$3\times5=15$

(ⅱ) $a\in A_2$, $b\in B_1$일 때,

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$4\times5=20$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우의 수는

$15+20=35$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{35}{100}=\dfrac{7}{20}$

19) 답 ②

[해설] 서로 다른 5개의 공 중에서 중복을 허락하여 차례로 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_5\Pi_4=5^4$

$b^2+c^2=20$에서

$b=2,\ c=4$ 또는 $b=4,\ c=2$

$b=2,\ c=4$이고 $a \le b,\ c \le d$인 사건을 A, $b=4,\ c=2$이고 $a \le b,\ c \le d$인 사건을 B라 하면 $b^2+c^2=20$이고 $a \le b,\ c \le d$인 사건은 $A \cup B$이다.

(ⅰ) $b=2,\ c=4$일 때,

$a \le b,\ c \le d$를 만족시키는 a의 값은 $1,\ 2$이고, d의 값은 $4,\ 5$이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 경우의 수는 $2\times2=4$이므로

$P(A)=\dfrac{4}{5^4}$

(ⅱ) $b=4,\ c=2$일 때,

$a \le b,\ c \le d$를 만족시키는 a의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 4$이고, d의 값은 $2,\ 3,\ 4,\ 5$이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 경우의 수는 $4\times4=16$이므로

$P(B)=\dfrac{16}{5^4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건 $A,\ B$는 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{4}{5^4}+\dfrac{16}{5^4}=\dfrac{4}{125}$

20) 답 ④

[해설] 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$f(a)f(b)=0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 $f(a)f(b)\ne0$, 즉 $f(a)\ne0$이고 $f(b)\ne0$

이때

$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)\ne0$

$f(b)=b^2-5b+6=(b-2)(b-3)\ne0$

이므로 $a,\ b$의 값은 각각 $1,\ 4,\ 5,\ 6$ 중 하나이어야 한다.

따라서 $f(a)\ne0$이고 $f(b)\ne0$을 만족시키는

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $4\times4=16$이므로

$P(A^C)=\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$

[다른 풀이]

$f(a)=0$인 사건을 A, $f(b)=0$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)=0$에서

$a=2$ 또는 $a=3$

따라서 $f(a)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2\times6=12$이므로

$P(A)=\dfrac{12}{6^2}=\dfrac{1}{3}$

같은 방법으로 $P(B)=\dfrac{1}{3}$이다.

한편, $f(a)=f(b)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2\times2=4$

따라서 $P(A\cap B)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{9}$$

21) 답 ③

[해설] 9개의 구슬을 임의로 3개씩 3묶음으로 나누어 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는

$${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\dfrac{1}{3!}\times3!$$

$$=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$

$=1680$

상자에 들어 있는 세 구슬에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되려면 세 상자에 들어 있는 구슬이 다음과 같아야 한다.

(홀수 3개), (홀수 1개, 짝수 2개), (홀수 1개, 짝수 2개) ⋯ ㉠

(ⅰ) 홀수 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$를 3개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times2\times1\times\dfrac{1}{2}$$

(ⅱ) 짝수 $2,\ 4,\ 6,\ 8$을 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{4\times3}{2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2}=3$$

(ⅰ)에서 나눈 홀수 1개, 홀수 1개와 (ⅱ)에서 나눈 짝수 2개, 짝수 2개로 (홀수 1개, 짝수 2개), (홀수 1개, 짝수 2개)인 두 묶음을 만드는 경우의 수는 2이다.

따라서 9개의 구슬로 ㉠과 같이 3묶음으로 나누는 경우의 수는 $10\times3\times2=60$이고, 이 3묶음을 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는 $3!$이므로 구하는 확률은

$$\dfrac{60\times3!}{1680}=\dfrac{3}{14}$$

22) 답 ④

[해설] 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$

함수 f가 $f(1)f(2)f(3)=0$ 또는 $f(4)\ge0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은

$f(1)f(2)f(3)\ne0$이고 $f(4)<0$

(ⅰ) $f(1)f(2)f(3)\ne0$인 경우

$f(1),\ f(2),\ f(3)$의 값은 0이 될 수 없으므로 집합 $\{-2,\ -1,\ 1\}$의 원소 중에서 결정되어야 한다.

따라서 $f(1)f(2)f(3)\ne0$을 만족시키도록 $f(1),\ f(2),\ f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3$

(ⅱ) $f(4)<0$인 경우

$f(4)$의 값은 집합 $\{-2,\ -1\}$의 원소 중에서 결정되어야 하므로 $f(4)<0$을 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$P(A^C)=\dfrac{3^3\times2}{4^4}=\dfrac{27}{128}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{27}{128}=\dfrac{101}{128}$

23) 답 5

[해설] 자연수 p에 대하여 $x=p$일 때 부등식

$y\le x^2+\dfrac{1}{2}x$

를 만족시키는 자연수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를

$a_p(p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라 하면 자연수 k에 대하여

(ⅰ) $p=2k-1$일 때,

$a_p=a_{2k-1}=(2k-1)^2+\dfrac{1}{2}(2k-1)-\dfrac{1}{2}=4k^2-3k$

(ⅱ) $p=2k$일 때,

$a_p=a_{2k}=(2k)^2+\dfrac{1}{2}\times2k=4k^2+k$

또한, $x=p$일 때, $y=x$를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 b_p라 하면 $b_p=1$

따라서 확률 P_{2m}은

$$P_{2m}=\frac{\sum_{k=1}^{2m}1}{\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})}=\frac{2m}{\sum_{k=1}^{m}\{(4k^2-3k)+(4k^2+k)\}}$$
$$=\frac{2m}{\sum_{k=1}^{m}(8k^2-2k)}$$
$$=\frac{2m}{8\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}-2\times\frac{m(m+1)}{2}}$$
$$=\frac{6}{(m+1)(8m+1)}$$
이므로

$\frac{6}{(m+1)(8m+1)}=\frac{1}{41}$에서 $(m+1)(8m+1)=246$

$8m^2+9m-245=0$, $(8m+49)(m-5)=0$

이때 m은 자연수이므로 $m=5$

24) 답 ④

[해설] 주머니 A, B에서 뽑은 공이 각각 흰 공, 검은 공인 사건을 X, 주머니 A, B에서 뽑은 공이 각각 검은 공, 흰 공인 사건을 Y, 주머니 A, B에서 뽑은 공이 서로 다른 색인 사건을 Z라 하면

$\mathrm{P}(X)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}=\frac{6}{15}$, $\mathrm{P}(Y)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}=\frac{2}{15}$이므로

$\mathrm{P}(Z)=\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)=\frac{6}{15}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$

한편, $\mathrm{P}(X\cap Z)=\mathrm{P}(X)$이므로 구하는 조건부확률 $\mathrm{P}(X|Z)$는

$$\mathrm{P}(X|Z)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Z)}{\mathrm{P}(Z)}=\frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{3}{4}$$

25) 답 ⑤

[해설] 회원 10명 중 임의로 선택한 세 명이 모두 같은 중학교를 졸업한 회원인 사건을 X, 모두 A 중학교를 졸업한 회원인 사건을 Y, 모두 B 중학교를 졸업한 회원인 사건을 Z라 하면

$\mathrm{P}(Y)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(Z)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$

$\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(Y\cup Z)=\mathrm{P}(Y)+\mathrm{P}(Z)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}=\frac{1}{5}$

한편, $\mathrm{P}(Y\cap X)=\mathrm{P}(Y)$이므로 구하는 조건부확률 $\mathrm{P}(Y|X)$는

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(Y\cap X)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$$

26) 답 79

[해설] 학생 40명 중 임의로 택한 한 학생이 긴팔 셔츠를 입은 학생일 사건을 A, 긴바지를 입은 학생일 사건을 B라 하자.

학생 40명 중 임의로 택한 한 학생이 긴팔 셔츠를 입었을 때, 이 학생이 긴바지를 입었을 확률 p_1은

$$p_1=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{40}}{\frac{14}{40}}=\frac{3}{7}$$

학생 40명 중 임의로 택한 한 학생이 긴바지를 입었을 때, 이 학생이 반팔 셔츠를 입었을 확률 p_2는

$$p_2=\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{14}{40}}{\frac{20}{40}}=\frac{7}{10}$$

따라서 $70(p_1+p_2)=70\times\left(\frac{3}{7}+\frac{7}{10}\right)=79$

27) 답 ③

[해설] 동전을 던져서 앞면이 나오는 사건을 A, 주머니에서 흰 공이 2개 나오는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 동전을 던져서 앞면이 나오는 경우 : $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

동전을 던져서 앞면이 나오면 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공이어야 하므로 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

(ⅱ) 동전을 던져서 뒷면이 나오는 경우 : $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$

동전을 던져서 뒷면이 나오면 주머니에서 꺼낸 3개의 공이 흰 공 2개, 검은 공 1개이어야 하므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$

28) 답 ③

[해설] 주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오는 사건을 A, 주머니에서 서로 다른 색의 공이 나오는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오는 경우

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오면 주머니에 흰 공을 1개 넣는다.

따라서 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{45}$

(ⅱ) 주사위를 던져서 3이상의 눈이 나오는 경우

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

주사위를 던져서 3 이상의 눈이 나오면 주머니에 검은 공을 1개 넣는다.

따라서 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{8}{45}+\frac{2}{5}=\frac{26}{45}$

29) 답 13

[해설] 소수인 눈의 수가 나오는 사건이 A이므로

$A=\{2,\ 3,\ 5\}$ $\cdots$㉠

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

n 또는 $n+1$의 눈의 수가 나오는 사건이 B_n이므로
$B_n=\{n,\ n+1\}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

$\mathrm{P}(B_n)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

사건 A와 사건 B_n이 서로 독립이 되려면

$\mathrm{P}(A\cap B_n)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_n)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

이어야 하므로 사건 $A\cap B_n$의 원소의 개수가 1이어야 한다.
따라서 이를 만족시키는 5 이하의 자연수 n의 값은 ㉠, ㉡에서 1, 3, 4, 5이므로 그 합은 $1+3+4+5=13$

30) 답 ②

[해설] 짝수가 나오는 사건이 A이므로 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

10 이하의 자연수 n에 대하여 n의 양의 약수의 개수를

k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$라 하면 $\mathrm{P}(B_n)=\dfrac{k}{10}$

이때 두 사건 A, B_n이 서로 독립이어야 하므로

$\mathrm{P}(A\cap B_n)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_n)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{k}{10}$ $\cdots$㉠

를 만족시켜야 한다.
따라서 $k=2$ 또는 $k=4$이어야 한다.
(ⅰ) $k=2$, 즉 n의 양의 약수의 개수가 2인 경우

㉠에서 $\mathrm{P}(A\cap B_n)=\dfrac{1}{10}$이므로

n은 짝수인 약수 1개와 홀수인 약수 1개를 가져야 한다.
따라서 $n=2$
(ⅱ) $k=4$, 즉 n의 양의 약수의 개수가 4인 경우

㉠에서 $\mathrm{P}(A\cap B_n)=\dfrac{2}{10}$이므로

n은 짝수인 약수 2개와 홀수인 약수 2개를 가져야 한다.
따라서 $n=6$ 또는 $n=10$
(ⅰ), (ⅱ)에서 n의 값은 2, 6, 10이고, 그 개수는 3이다.

31) 답 ②

[해설] $n(A)=a$라 하면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{a}{10}$

$n(B)=9-n(A)=9-a$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{9-a}{10}$

$n(A\cap B)=2$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

한편, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{1}{5}=\dfrac{a}{10}\times\dfrac{9-a}{10}$, $20=a(9-a)$, $(a-4)(a-5)=0$

$a=4$ 또는 $a=5$

이때 $\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$이므로 $\dfrac{a}{10}>\dfrac{9-a}{10}$에서 $a>\dfrac{9}{2}$이다.

따라서 $a=5$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{10}$

32) 답 ⑤

[해설] 두 양궁선수 A, B가 과녁을 향하여 각각 한 개의 화살을 쏠 때 명중시키는 사건을 각각 X, Y라 하면 두 선수 중 한 명만 명중시키는 사건은 $(X\cap Y^C)\cup(X^C\cap Y)$이다.

또한, 두 사건 X, Y가 서로 독립이면 두 사건 X와 Y^C, 두 사건 X^C과 Y도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y^C)=\mathrm{P}(X)(1-\mathrm{P}(Y))$

$=\dfrac{4}{5}\times\left(1-\dfrac{9}{10}\right)=\dfrac{4}{50}$

$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y)=(1-\mathrm{P}(X))\mathrm{P}(Y)$

$=\left(1-\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{9}{50}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\cap Y^C)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\dfrac{4}{50}+\dfrac{9}{50}=\dfrac{13}{50}$

33) 답 ③

[해설] 두 종류 A, B의 행운권에 당첨되는 사건을 각각 X, Y라 하고, 적어도 한 종류의 행운권에 당첨되는 사건을 Z라 하면 Z의 여사건 Z^C은 두 종휴의 행운권에 모두 당첨되지 않는 사건이다.
이때 두 사건 X, Y가 서로 독립이므로 두 사건 X^C과 Y^C도 서로 독립이다. 따라서

$\mathrm{P}(Z^C)=\mathrm{P}(X^C\cap Y^C)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y^C)$

$=\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{8}$

$\mathrm{P}(Z)=1-\mathrm{P}(Z^C)=1-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{8}$

34) 답 4

[해설] 주머니에서 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 X, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 Y라 하자.
(ⅰ) 흰 공이 적어도 1번 나오는 사건을 Z라 하면 Z의 여사건 Z^C은 2번 모두 검은 공이 나오는 사건이다.
이때 두 사건 X, Y가 서로 독립이므로 두 사건 X^C과 Y^C도 서로 독립이다. 따라서

$\mathrm{P}(Z^C)=\mathrm{P}(X^C\cap Y^C)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y^C)$

$=\dfrac{3}{n+3}\times\dfrac{3}{n+3}=\dfrac{9}{(n+3)^2}$

$p_1=1-\mathrm{P}(Z^C)=1-\dfrac{9}{(n+3)^2}$

(ⅱ) 검은 공이 적어도 1번 나오는 사건을 W라 하면 W의 여사건 W^C은 2번 모두 흰 공이 나오는 사건이다.
이때 두 사건 X, Y가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(W^C)=\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y)$

$=\dfrac{n}{n+3}\times\dfrac{n}{n+3}=\dfrac{n^2}{(n+3)^2}$

$p_2=1-\mathrm{P}(W^C)=1-\dfrac{n^2}{(n+3)^2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$p_1-p_2=\dfrac{n^2}{(n+3)^2}-\dfrac{9}{(n+3)^2}$

$=\dfrac{n^2-9}{(n+3)^2}=\dfrac{(n-3)(n+3)}{(n+3)^2}$

$=\dfrac{n-3}{n+3}=\dfrac{1}{7}$

이므로 $7(n-3)=n+3$, $6n=24$, $n=4$
따라서 자연수 n의 값은 4이다.

35) 답 ③

[해설] 한 개의 주사위를 6번 던질 때, 사건 A가 4번, 사건 A^C이 2번 일어날 확률이다.
한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수인 눈의 수가 나오는 사건이 A이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이때 $p=\mathrm{P}(A)$, $q=\mathrm{P}(A^C)$이라 하면 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_4p^4q^2={}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=15\times\frac{16}{3^6}=\frac{80}{243}$$

36) 답 ③

[해설] 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나온 횟수를 a라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $5-a$이므로

$a>5-a$

$a>\frac{5}{2}$

a는 횟수이므로 $a=3,\ 4,\ 5$

(ⅰ) $a=3$, 즉 앞면이 나온 횟수가 3일 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$$

(ⅱ) $a=4$, 즉 앞면이 나온 횟수가 4일 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

(ⅲ) $a=5$, 즉 앞면이 나온 횟수가 5일 확률은

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

37) 답 ②

[해설] 네 명의 학생 중 적어도 두 명의 학생이 A지역을 택하는 사건을 X라 하자.

네 명의 학생이 세 지역 중 임의로 한 지역을 택하는 사건은 서로 독립이므로 독립시행의 확률에 의하여 사건 X^C의 확률을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) 네 명 모두 A지역을 택하지 않을 확률

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

(ⅱ) 네 명 중 한 명만 A지역을 택할 확률

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\mathrm{P}(X^C)=\frac{16}{81}+\frac{32}{81}=\frac{48}{81}=\frac{16}{27}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^C)=1-\frac{16}{27}=\frac{11}{27}$$

38) 답 ②

[해설] 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

사건 A의 여사건 A^C은 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건, 즉 두 눈의 수가 모두 홀수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

사건 $A\cap B$는 두 눈의 수가 모두 짝수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

39) 답 ⑤

[해설] 집합 X를 택하는 사건을 A, 택한 집합의 원소 중에서 택한 원소가 짝수인 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 집합 X를 택하는 경우

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

집합 X에서 꺼낸 원소가 짝수이어야 하므로 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(ⅱ) 집합 Y를 택하는 경우

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$

집합 Y에서 택한 원소가 짝수이어야 하므로 $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

40) 답 ⑤

[해설] $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{13}{16}$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{16}$ $\cdots$ ㉠

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\{\mathrm{P}(B)\}^2$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{3}\{\mathrm{P}(B)\}^2=\frac{3}{16}$

$\{\mathrm{P}(B)\}^2=\frac{9}{16}$

$0<\mathrm{P}(B)<1$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

41) 답 ④

[해설] 2의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건이 A, 3의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건이 B이므로 곱사건 $A\cap B$는 6의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건이다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ $\cdots$㉠

이때 주머니 안에 들어 있는 6의 배수가 적혀 있는 공의 개수를 x라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{12}$ $\cdots$ ㉡

이므로 ㉠, ㉡에서 $\frac{1}{3}=\frac{x}{12}$, $x=4$

따라서 주머니 안에 들어 있는 6의 배수가 적혀 있는 공의 개수는 4이다.

42) 답 15

[해설] 한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 n번 나올 확률은

$${}_8\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{8-n}={}_8\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

${}_8\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{7}{32}$에서 ${}_8\mathrm{C}_n=56$

이때 $56=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}={}_8\mathrm{C}_3$이므로

${}_8\mathrm{C}_n={}_8\mathrm{C}_3$ 또는 ${}_8\mathrm{C}_n={}_8\mathrm{C}_5$

따라서 $n=3$ 또는 $n=5$이므로 모든 자연수 n의 값의 곱은 $3\times5=15$

43) 답 15

[해설] 학생 60명 중 임의로 선택한 한 명이 일본을 방문한 적이 있는 학생인 사건을 A, 중국을 방문한 적이 있는 학생인 사건을 B라 하자.

일본, 중국을 방문한 적이 있는 학생의 수가 각각 30, 20이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

학생 60명 중 임의로 선택한 한 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생이었을 때, 이 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생일 확률 p_1은

$$p_1=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{P}(A\cap B)$$

학생 60명 중 임의로 선택한 한 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생이었을 때, 이 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생일 확률 p_2는

$$p_2=\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{3}}=3\mathrm{P}(A\cap B)$$

이때 $p_1+p_2=\dfrac{5}{4}$이므로

$$2\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{4}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

따라서 60명의 학생 중 일본과 중국을 모두 방문한 적이 있는 학생의 수는

$$60\times\mathrm{P}(A\cap B)=60\times\frac{1}{4}=15$$

44) 답 640

[해설] 2000명 중 임의로 선택한 한 명이 남자인 사건을 A, 홈팀을 응원하는 관람객인 사건을 B라 하자.

조사한 2000명 중 남자가 1200명이고 여자가 800명이었으므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5}$$

조사한 2000명 중 임의로 선택한 한 명이 남자였을 때, 이 남자가 홈팀을 응원할 확률이 $\dfrac{2}{5}$이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{5}$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

조사한 2000명 중 임의로 선택한 한 명이 여자였을 때, 이 여자가 원정팀을 응원할 확률이 $\dfrac{4}{5}$이므로 이 여자가 홈팀을 응원할 확률은 $\dfrac{1}{5}$이다.

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$$

따라서 조사한 2000명 중 임의로 선택한 한 명이 홈팀을 응원할 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{6}{25}+\frac{2}{25}=\frac{8}{25}$$

이므로 조사한 2000명 중 홈팀을 응원하는 관람객 수는

$$2000\times\mathrm{P}(B)=2000\times\frac{8}{25}=640$$

45) 답 25

[해설] 상자 A에서 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 사건을 X, 상자 B에서 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 사건을 Y라 하자.

이때 두 상자 A, B에서 각각 1개씩 택한 구슬이 같은 색인 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(ⅰ) 상자 A, B에서 모두 흰 구슬이 나오는 경우

두 사건 X, Y는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y)=\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}=\frac{a}{100}\left(1-\frac{2a}{100}\right)$$

(ⅱ) 상자 A, B에서 모두 검은 구슬이 나오는 경우

두 사건 X^C, Y^C은 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(X^C\cap Y^C)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y^C)$$
$$=\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}=\frac{2a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 같은 색의 구슬이 나올 확률이

$$\frac{a}{100}\left(1-\frac{2a}{100}\right)+\frac{2a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)$$

이므로 $\dfrac{a}{100}=p$로 놓으면

$$p(1-2p)+2p(1-p)=\frac{1}{2}$$

$$8p^2-6p+1=0,\ (2p-1)(4p-1)=0$$

$p=\dfrac{1}{4}$ 또는 $p=\dfrac{1}{2}$

따라서 $p=\dfrac{1}{4}$일 때, $\dfrac{a}{100}=\dfrac{1}{4}$에서 $a=25$이고

$p=\dfrac{1}{2}$일 때, $\dfrac{a}{100}=\dfrac{1}{2}$에서 $a=50$이다.

이때 $a=50$이면 상자 B에는 흰 구슬이 없으므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $a=25$

46) 답 ①

[해설] 주어진 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수가 2인 사건을 X라 하자.

(ⅰ) 주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수이고, 동전의 앞면이 나온 횟수가 2일 확률

주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수인 사건을 A라 하면 $A=\{1,\ 4\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$\mathrm{P}(X|A)$는 동전을 3번 던져서 앞면이 나온 횟수가 2일 확률이므로

$$\mathrm{P}(X|A)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(A\cap X)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(X|A)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

(ⅱ) 주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 짝수이고, 동전의 앞면이 나온 횟수가 2일 확률

주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 짝수인 사건을 B라 하면 $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$\mathrm{P}(X|B)$는 동전을 4번 던져서 앞면이 나온 횟수가 2일 확률이므로

$$\mathrm{P}(X|B)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(B\cap X)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(X|B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

47) 답 17

[해설] 학생 30명 중 임의로 선택한 한 명이 볼펜을 받은 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하자.

볼펜을 받은 학생이 10명이고, 연필을 받을 학생이 20명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

볼펜을 받은 여학생의 수를 x라 하면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{30}$이고, 학생 30명 중 임의로 선택한 한 학생이 볼펜을 받았을 때, 그 학생이 여학생일 확률이 $\frac{3}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{x}{30}}{\frac{1}{3}}=\frac{x}{10}=\frac{3}{5}$$

$x=6$

따라서 볼펜을 받은 남학생의 수는 $10-6=4$이고, 연필을 받은 남학생의 수는 $18-4=14$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$이고, 학생 30명 중 임의로 선택한 한 학생이 연필을 받았을 때, 그 학생이 남학생일 확률은

$$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=7$이므로

$p+q=10+7=17$

48) 답 69

[해설] 동전의 앞면이 나온 횟수 a와 주사위에서 2이하의 눈의 수가 나온 횟수 b에 대하여 부등식

$3a<b$ $(a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ b=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

를 만족시키는 경우는

$a=0$, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 또는 $a=1$, $b=4$

이고 각 경우의 확률은 다음과 같다.

(ⅰ) $a=0$, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$인 경우

$a=0$이면 동전의 앞면이 나온 횟수가 0이므로 이 확률은

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}$$

$b=1,\ 2,\ 3,\ 4$이면 주사위에서 2 이하의 눈의 수가 적어도 한 번 나오는 경우이므로 이 확률은

$$1-{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^4=1-\frac{16}{3^4}=\frac{65}{3^4}$$

따라서 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2^4}\times\frac{65}{3^4}=\frac{65}{6^4}$

(ⅱ) $a=1$, $b=4$인 경우

$a=1$이면 동전의 앞면이 나온 횟수가 1이므로 이 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{2^4}$$

$b=4$이면 주사위에서 2 이하의 눈의 수가 나온 횟수가 4이므로 이 확률은 ${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{3^4}$

따라서 이 경우의 확률은 $\frac{4}{2^4}\times\frac{1}{3^4}=\frac{4}{6^4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{65}{6^4}+\frac{4}{6^4}=\frac{69}{6^4}$이므로 $p=69$

49) 답 ⑤

[해설] 한 개의 주사위를 5번 던지는 시행이므로

$m+n=5$ $\cdots$㉠

$i^{|m-n|}=-i$를 만족시키려면 $-i=i^3$이므로 $|m-n|=3$

$m-n=-3$ 또는 $m-n=3$

(ⅰ) $m-n=-3$인 경우

㉠과 연립하여 풀면 $m=1$, $n=4$

따라서 이 경우의 확률은 주사위를 5번 던질 때 3의 배수인 눈의 수가 1번, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 4번 나올 확률이므로

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{3^5}$$

(ⅱ) $m-n=3$인 경우

㉠과 연립하여 풀면 $m=4$, $n=1$

따라서 이 경우의 확률은 주사위를 5번 던질 때 3의 배수인 눈의 수가 4번, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 1번 나올 확률이므로

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3^5}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{80}{3^5}+\frac{10}{3^5}=\frac{90}{3^5}=\frac{10}{27}$$

50) **정답** ②

한 개의 주사위를 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 6(가지) 이다.

이 때 방정식이 유리수인 해를 가지려면 이차방정식의 판별식 a^2-16이 완전제곱수가 되어야 한다.

$a=1,\ 2,\ 3$인 경우 $a^2-16<0$으로 유리수인 해를 갖지 않는다.

$a=4$인 경우 $a^2-16=4^2-16=0$

$a=5$인 경우 $a^2-16=5^2-16=9$

$a=6$인 경우 $a^2-16=6^2-16=20$

으로 $a=4$또는 $a=5$인 경우 유리수인 해를 갖는다.

즉, 유리수인 해를 가지는 경우의 수는 2(가지)이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

51) **정답** ④

두 장의 카드를 꺼내는 모든 경우의 수는 $5\times5=25$

이 중 두 장의 카드에 쓰인 수의 곱이 실수가 되는 경우의 수는 다음 표와 같이 17가지이다.

	0	1	-1	i	$-i$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	-1	i	$-i$
-1	0	-1	1	$-i$	i
i	0	i	$-i$	-1	1
$-i$	0	$-i$	i	1	-1

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{25}$이다.

52) **정답** ④

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적힌 9장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 택하는 모든 경우의 수는

$${}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$$
$$=84\text{(가지)}$$

두 번째로 큰 수 b가 5이하가 되는 경우의 수는

(i) a,b,c가 모두 5보다 작거나 같은 경우

$${}_5\mathrm{C}_3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$$
$=10$(가지)

(ii) a, b는 5보다 작거나 같고, c는 5보다 큰 경우

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=\frac{5\times4}{2\times1}\times4$$
$=40$(가지)

(i), (ii)에서
$10+40=50$(가지)
따라서 구하는 확률은
$$\frac{50}{84}=\frac{25}{42}$$
다른 풀이
$b=2$일 때,
a를 택하는 경우의 수는 ${}_1\mathrm{C}_1$이고 c를 택하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_1$
$b=3$일 때,
a를 택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$이고 c를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_1$
$b=4$일 때,
a를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$이고 c를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1$
$b=5$일 때,
a를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1$이고 c를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1$
즉, $b\le5$인 경우의 수는
$${}_1\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=50$$

53) **정답** ④
한 개의 주사위를 2번 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)
두 수의 곱이 양수인 경우는 두 수가 모두 양수인 경우와 두 수가 모두 음수인 경우이다.
$a-2>0,\ b-4>0$인 사건을 A,
$a-2<0,\ b-4<0$인 사건을 B
라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.
$a>2,\ b>4$에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{4\times2}{36}=\frac{8}{36}$
$a<2,\ b<4$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1\times3}{36}=\frac{3}{36}$
이 때 $A\cap B=\phi$ 이므로
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{8}{36}+\frac{3}{36}=\frac{11}{36}$$

54) **정답** ①
$(2x-a)(5x-4a)=0$
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}a$ 또는 $x=\frac{4}{5}a$
이므로 자연수 a가 2의 배수 또는 5의 배수이면 주어진 방정식은 적어도 하나의 정수인 해를 갖는다.
1부터 100까지의 자연수 중에서 2의 배수가 나오는 사건을 A, 5의 배수가 나오는 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 10의 배수가 나오는 사건이다.
$n(A)=50,\ n(B)=20,\ n(A\cap B)=10$
이므로 구하는 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{50}{100}+\frac{20}{100}-\frac{10}{100}\\&=\frac{60}{100}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

55) **정답** ①
10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 택하는 모든 경우의 수는
$${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$$
$=120$(가지)
카드에 적힌 숫자가 모두 홀수인 사건을 A, 모두 짝수인 사건을 B라
하면 두 사건은 서로 배반사건이고 1부터 10까지의 자연수 중 홀수가5개, 짝수가 5개 있으므로
$$\begin{aligned}n(A)&={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2\\&=\frac{5\times4}{2\times1}=10\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}n(B)&={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2\\&=10\end{aligned}$$
이때 $A\cap B=\phi$이므로 구하는 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{10}{120}+\frac{10}{120}\\&=\frac{20}{120}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

56) **정답** ④
세 눈의 수의 곱이 2의 배수일 사건을 A, 5의 배수일 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.
주사위의 눈 중에서 2의 배수는 2, 4, 6으로 세 눈의 수의 곱이 2의 배수가 되려면 적어도 하나의 눈의 수가 2의 배수이면 되므로 그
여사건 A^c은 세 눈의 수 모두 2의 배수가 아닌 사건이다.
즉, 세주사위 모두 1, 3, 5중에서 하나의 눈의 수가 나오면 되므로 사건 A^c이 일어날 확률은
$$\mathrm{P}(A^c)=\frac{3^3}{6^3}$$
같은 방법으로 5의 배수는 5만 있으므로 세 주사위 모두 5의 배수의 눈의 수가 나오지 않을 확률은
$$\mathrm{P}(B^c)=\frac{5^3}{6^3}$$
2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 눈의 수는 1, 3으로 2가지 이므로
$$\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\frac{2^3}{6^3}$$
$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A^c\cap B^c)&=1-\mathrm{P}((A\cap B)^c)=1-\mathrm{P}(A^c\cup B^c)\\&=1-\{\mathrm{P}(A^c)+\mathrm{P}(B^c)-\mathrm{P}(A^c\cap B^c)\}\\&=1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3\right\}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

57) **정답** ④
$(a-b)(b-c)\ne0$의 여사건은 $(a-b)(b-c)=0$이므로
$(a-b)(b-c)=0$이 되는 확률을 구한다.
(i) $a=b$일 때, c는 임의의 수이므로 경우의 수는
$6\times6=36$(가지)
(ii) $b=c$일 때, a는 임의의 수이므로 경우의 수는
$6\times6=36$(가지)
(iii) $a=b=c$일 경우의 수는 6가지
따라서 $(a-b)(b-c)=0$일 확률은
$$\frac{36+36-6}{216}=\frac{11}{36}$$

이므로 $(a-b)(b-c) \neq 0$ 일 확률은

$1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$

다른 풀이

$a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이므로

구하는 확률은

$\frac{6\times5\times5}{6\times6\times6}=\frac{25}{36}$

58) **정답** ③

두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$ (가지)

$ab>a+b$ 가 일어날 사건을 E 라 하면

$ab-a-b>0$

$ab-a-b+1>1$

$(a-1)(b-1)>1$

그러므로 사건 E^c 은 $(a-1)(b-1)\leq 1$ 이 되는 경우로

(i) $(a-1)(b-1)=0$ 일 때

$a=1$ 또는 $b=1$ 인 경우의 수는

$6+6-1=11$ (가지)

(ii) $(a-1)(b-1)=1$ 일 때

$a=2,\ b=2$ 인 경우의 수는 1 가지

그러므로 (i), (ii)에 의하여 $n(E^c)=11+1=12$ 이다.

$\mathrm{P}(E^c)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=1-\mathrm{P}(E^c)$

$=1-\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{3}$

다른 풀이

$(a-1)(b-1)>1$ 인 경우는 $a\geq 2,\ b\geq 2$ 인 경우 중

$a=b=2$ 인 경우를 제외하면 되므로

${}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1-1=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$

59) **정답** ③

임의로 두 장의 카드를 차례로 뽑을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$10\times9=90$ (가지)

$a+b=8$ 에서 $a=i$ 라 하면 $b=8-i$

$1\leq a\leq 10,\ 1\leq b\leq 10,\ a\neq b$ 에서 $i=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7$ 로

6 가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$

60) **정답** ③

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 중에서 임의로 서로 다른 3 개의 수를 선택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 ${}_5\mathrm{P}_3$ 이다.

이 중 홀수가 되는 경우는 일의 자리의 숫자가 홀수 $1,\ 3,\ 5$ 중 하나인

경우이므로 홀수인 자연수의 개수는

$3\times{}_4\mathrm{P}_2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3\times{}_4\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_3}=\frac{3\times4\times3}{5\times4\times3}$

$=\frac{3}{5}$

다른 풀이

서로 다른 3 개의 수를 선택하여 만든 세 자리의 자연수 중

일의 자리의 숫자가 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 인 자연수의 개수는 서로 같다.

세 자리의 자연수가 홀수인 경우는 일의 자리의 숫자가 홀수인 경우

이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{5}$ 이다.

61) **정답** ④

9 개의 공 중에서 2 개의 공을 택하는 모든 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\times8}{2\times1}$

$=36$ (가지)

두 수의 곱이 홀수인 사건을 A, 6 의 배수인 사건을 B 라 하면

사건 A 는 홀수가 적힌 공 중에서 2 개를 꺼내 곱하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{36}$

$=\frac{3}{36}$

$=\frac{1}{12}$

사건 B 는 3 이 적힌 공을 하나, 짝수가 적힌 공을 하나 꺼내

곱하는 사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{36}$

$=\frac{3\times6}{36}$

$=\frac{1}{2}$

$A\cap B=\phi$ 이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}$

$=\frac{7}{12}$

62) **정답** 35

해가 존재하지 않을 조건은

$\frac{1}{2}=\frac{a}{b}\neq\frac{3}{b}$

이므로 $b=2a,\ b\neq 6$

$a,\ b$ 를 순서쌍 $(a,\ b)$ 로 나타내면

$(1,\ 2),\ (2,\ 4)$

주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $6^2=36$ 이므로

해가 존재하지 않을 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 해가 존재할 확률은

$1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$

$\therefore p=18,\ q=17$

$\therefore p+q=18+17$

$=35$

63) **정답** ④

10 개의 제비 중 임의로 2 개의 제비를 동시에 뽑을 때, 2 개 모두

당첨제비가 뽑히지 않을 확률은

$\dfrac{{}_{10-k}C_2}{{}_{10}C_2}$ 이므로

$1-\dfrac{{}_{10-k}C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{{}_{10-k}C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{1}{3}$

$$\dfrac{\dfrac{(10-k)(9-k)}{2\times1}}{\dfrac{10\times9}{2\times1}}=\dfrac{1}{3}$$

$k^2-19k+60=0$

$(k-4)(k-15)=0$

$k=4$ 또는 $k=15$

$\therefore k=4\,(\because 0\le k\le 10)$

64) **정답** ②

최솟값이 3이므로 세 주사위의 각 눈의 수는 3, 4, 5, 6중 하나의
값을 갖는다.
이때 3이 적어도 한 개는 나와야 하므로 세 주사위의 각 눈의 수가
모두 4, 5, 6중 하나의 값을 가지는 경우는 제외한다.
따라서 구하는 확률은

$\dfrac{4^3}{6^3}-\dfrac{3^3}{6^3}=\dfrac{64-27}{6^3}=\dfrac{37}{216}$

다른 풀이

(i) 3의 눈이 한 개 나온 경우

3의 눈이 나올 주사위를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$,
그 각각에 대하여 나머지 두 주사위는 4, 5, 6중 하나의
눈이 나오면 되므로 경우의 수는 3^2이다.
그러므로 구하는 경우의 수는

${}_3C_1\times3^2=3^3$

(ii) 3의 눈이 두 개 나온 경우

${}_3C_2\times3=3^2$

(iii) 3의 눈이 세 개 나온 경우

1

(i), (ii), (iii)에서 모든 경우의 수는

$3^3+3^2+1=37$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{37}{216}$

65) **정답** ③

7장의 카드 중에서 임의로 4장의 카드를 동시에 뽑는 모든 경우의 수는

${}_7C_4=\dfrac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}$

$=35$(가지)

이 중 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는
(홀수 1개, 짝수 3개), (홀수 3개, 짝수 1개)
가 적힌 카드를 뽑는 경우이다.
1부터 7까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개이고
짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_3C_3+{}_4C_3\times{}_3C_1$

$=4\times1+4\times3$

$=16$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{16}{35}$

66) **정답** 14

주머니에는 $n+2n=3n$개의 공이 들어 있으므로 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{3n}C_2$

2개 모두 흰 공일 경우의 수는 ${}_nC_2$,
2개 모두 검은 공일 경우의 수는 ${}_{2n}C_2$이므로

2개 모두 흰 공이 나올 확률은 $\dfrac{{}_nC_2}{{}_{3n}C_2}$,

2개 모두 검은 공이 나올 확률은 $\dfrac{{}_{2n}C_2}{{}_{3n}C_2}$

따라서 같은 색의 공이 나오는 확률 $\mathrm{P_n}$은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n&=\dfrac{{}_nC_2}{{}_{3n}C_2}+\dfrac{{}_{2n}C_2}{{}_{3n}C_2}\\&=\dfrac{\dfrac{n(n-1)+2n(2n-1)}{2\times1}}{\dfrac{3n(3n-1)}{2\times1}}\\&=\dfrac{5n^2-3n}{9n^2-3n}\\&=\dfrac{5n-3}{9n-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n&=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5n-3}{9n-3}\\&=\dfrac{5}{9}\end{aligned}$$

$\therefore p=9, q=5$

$\therefore p+q=9+5$

$=14$

67) **정답** ④

발표를 마치고 다같이 돌아와 6명이 한 줄로 다시 앉는 경우의 수는
$6!$(가지)
처음 자리와 같은 자리에 앉을 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$

$=20$(가지)

나머지 3명이 모두 처음 자리와 다른 자리에 앉는 경우의 수는
2(가지)
그러므로 처음 자리와 같은 자리에 앉은 학생이 3명만 있는 경우의 수는
$20\times2=40$(가지)
따라서 구하는 확률은

$\dfrac{40}{6!}=\dfrac{40}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$

$=\dfrac{1}{18}$

참고
3명이 모두 처음 자리와 다른 자리에 앉는 경우의 수는
3명을 A, B, C라 하고 처음 앉아 있던 자리를 각각 1, 2, 3이라 하면

1	2	3
B	C	A
C	A	B

와 같이 앉는 2가지 경우가 있다.

68) **정답** ①

20개의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 선택할 모든 경우의 수는

${}_{20}C_3=\dfrac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=1140$(가지)

서로 다른 세 수를 차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3\,(a_1<a_2<a_3)$이라 하면
$a_1,\ a_2,\ a_3$이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}$

즉, a_1+a_3은 짝수이다.

1부터 20까지의 자연수 중 짝수가 10개, 홀수가 10개 있으므로

(i) a_1, a_3이 모두 짝수인 경우

$${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}$$
$$=45\text{(가지)}$$

(ii) a_1, a_3이 모두 홀수인 경우

$${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}$$
$$=45\text{(가지)}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{45+45}{{}_{20}C_3}=\frac{90}{1140}$$
$$=\frac{3}{38}$$

다른 풀이

등차수열이 되는 경우는 공차가 1인 경우

$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $\cdots$, $(18,\ 19,\ 20)$

공차가 2인 경우

$(1,\ 3,\ 5)$, $(2,\ 4,\ 6)$, $\cdots$, $(16,\ 18,\ 20)$

⋮

공차가 d인 경우

$(1,\ 1+d,\ 1+2d)$, $\cdots$, $(20-2d,\ 20-d,\ 20)$

⋮

공차가 9인 경우

$(1,\ 10,\ 19)$, $(2,\ 11,\ 20)$

그러므로 등차수열이 되는 경우의 수는

$$\sum_{d=1}^{9}(20-2d)=20\times9-2\times\frac{9\times10}{2}$$
$$=180-90$$
$$=90\text{(가지)}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{90}{{}_{20}C_3}=\frac{90}{1140}=\frac{3}{38}$$

69) **정답** ②

9장의 카드 중에서 임의로 3장을 선택하는 모든 경우의 수는

$${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84\text{(가지)}$$

3장의 카드를 뒤집을 때, 앞면이 보이는 카드 3장 중에서 m장, 뒷면이 보이는 카드 6장 중에서 n장을 뒤집었다고 하면

$0\le m\le3,\ 0\le n\le3$

$m+n=3$ ⋯⋯ ㉠

$m+(6-n)=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$m=1, n=2$

그러므로 뒷면이 보이는 카드가 5장이 되는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_6C_2=3\times\frac{6\times5}{2\times1}=45$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_3C_1\times{}_6C_2}{{}_9C_3}=\frac{45}{84}=\frac{15}{28}$$

70) **정답** ④

사각형을 만들 수 있는 모든 경우의 수는

$${}_7C_2\times{}_7C_2=\left(\frac{7\times6}{2\times1}\right)^2=(7\times3)^2\text{ 가지}$$

정사각형의 개수는 한 변의 길이가 $i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$인 정사각형의 개수가

$(7-i)^2$

이므로 한 변의 길이가 1부터 6까지인 정사각형의 개수는

$$\sum_{i=1}^{6}(7-i)^2=\sum_{k=1}^{6}k^2$$
$$=\frac{6\times7\times13}{6}$$
$$=7\times13$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{7\times13}{(7\times3)^2}=\frac{13}{7\times9}$$
$$=\frac{13}{63}$$

71) **정답** 193

주사위를 4번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

6^4(가지)

두 선분이 만나려면

$a-c\ \ge\ 0,\ b-d\ \le 0$

$a\ge c,\ b\le d$

$a\ge c$를 만족시키는 a, c의 순서쌍 $(a,\ c)$의 개수는 1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 두 수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2$$
$$={}_7C_2$$
$$=\frac{7\times6}{2\times1}$$
$$21\text{(가지)}$$

같은 방법으로 $(b,\ d)$를 선택하는 경우의 수도

${}_6H_2=21$(가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{21\times21}{6^4}=\frac{49}{144}$$

$\therefore\ p=144,\ q=49$

$\therefore\ p+q=144+49=193$

다른 풀이

$a\ge c$를 만족시키는 a, c의 순서쌍 $(a,\ c)$는

$(1,\ 1)$,

$(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$,

$(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$,

$(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$, $(4,\ 4)$,

$(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(5,\ 4)$, $(5,\ 5)$,

$(6,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 6)$

이므로 a, c의 순서쌍 $(a,\ c)$의 개수는

$$1+2+3+4+5+6=\frac{6\times7}{2}$$
$$=21$$

같은 방법으로 $b\le d$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ d)$의 개수도 21이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{21\times21}{6^4}=\frac{49}{144}$$

$\therefore\ p=144,\ q=49$

$\therefore\ p+q=144+49=193$

정답 및 해설

72) **정답** ⑤

강좌를 수강한 경험이 있는 회원 중 임의로 택한 한 회원이 과학 강좌를 수강한 경험이 있는 회원일 사건을 A, 영어 강좌를

수강한 경험이 있는 회원일 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
영어 강좌를 수강한 경험이 있는 회원의 수는 과학 강좌를 수강한 경험이 있는 회원의 수의 3배이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$$

영어 강좌를 수강한 경험이 있는 회원 중 20%는 과학 강좌를 수강한 경험이 있으므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0.2,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.2\mathrm{P}(B)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.2\mathrm{P}(B)}{\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)}=0.6$$

<다른 풀이>
회원 중 과학 강좌를 수강한 경험이 있는 회원의 수를 a라 하면 주어진 조건을 만족시키도록 오른쪽과 같이 표를 만들 수 있다.

(단위 : 명)

	B	B^C	계
A	$0.2\times3a$		a
A^C			
계	$3a$		

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{0.2\times3a}{a}=0.6$$

73) 정답 28
줄다리기에 참가할 학생일 사건을 A, 배드민턴에 참가할 학생일 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{38}{60}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{60}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{18}{60}}{\frac{38}{60}}=\frac{18}{38}=\frac{9}{19}$$

$\therefore\ p=19,\ q=9$
$\therefore\ p+q=19+9=28$

74) 정답 ④
처음 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 B, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 W라 하면

$$\mathrm{P}(W)=\mathrm{P}(B\cap W)+\mathrm{P}(B^C\cap W)$$

(i) 처음 꺼낸 공이 검은 공일 확률은 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$
검은 공을 하나 추가하여 주머니 속에 넣으면 이제 주머니 속에 검은 공 3개와 흰 공 3개가 들어 있게 되므로 여기서 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(W|B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B\cap W)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(W|B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$$

(ii) 처음 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5}$
흰 공을 하나 추가하여 주머니 속에 넣으면 이제 주머니 속에 검은 공 2개와 흰 공 4개가 들어 있게 되므로 여기서 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(W|B^C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B^C\cap W)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(W|B^C)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(W)=\mathrm{P}(B\cap W)+\mathrm{P}(B^C\cap W)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

75) 정답 ③
주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 짝수인 사건을 X, 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수의 합이 홀수인 사건을 Y라 하자.
(i) 주머니 A에서 짝수인 공을 한 개 꺼내 주머니 B에 넣고 주머니 B에서 짝수인 공 한 개, 홀수인 공 한 개를 동시에 꺼내는 경우의 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\cap Y)&=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{2}{5}\times\frac{9}{15}\\&=\frac{6}{25}\end{aligned}$$

(ii) 주머니 A에서 홀수인 공을 한 개 꺼내 주머니 B에 넣고 주머니 B에서 짝수인 공 한 개, 홀수인 공 한 개를 동시에 꺼내는 경우의 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^C\cap Y)&=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{3}{5}\times\frac{8}{15}\\&=\frac{8}{25}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y)&=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)\\&=\frac{6}{25}+\frac{8}{25}\\&=\frac{14}{25}\end{aligned}$$

76) 정답 ③
ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(B^C|A)=\mathrm{P}(B^C)$이고, $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)$이므로 $\mathrm{P}(B|A)=1-\mathrm{P}(B^C|A)$가 성립한다. (참)
ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
그런데 $0<\mathrm{P}(A\cup B)\le1$이므로 $0<\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le1$이다. (참)
ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=0$
이때 $\mathrm{P}(A)\ne0$, $\mathrm{P}(B)\ne0$에서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)>0$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)\ne\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$에서 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

77) 정답 ④
사건 A는 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

사건 A와 사건 B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ n(B)=4$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$에서

$n(A\cap B)=2$

따라서 사건 B는 A의 원소 중에서 2개, 여사건 A^C의 원소 중에서 2개로 이루어져 있으므로 구하는 사건 B의 개수는

$${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=\left(\frac{4\times3}{2\times1}\right)^2$$
$$=36$$

78) **정답** ②

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{3}{8}+\mathrm{P}(B)-\frac{3}{8}\mathrm{P}(B)\\&=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\mathrm{P}(B)\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\frac{5}{8}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}-\frac{3}{8}$$

$$\frac{5}{8}\mathrm{P}(B)=\frac{9}{40}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{9}{25}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{9}{25}\right)\\&=\frac{3}{8}\times\frac{16}{25}\\&=\frac{6}{25}\end{aligned}$$

79) **정답** 163

다항식 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지려면 $f(1)=0$

$f(1)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=0$

즉, 8번 중 앞면이 4번, 뒷면이 4번 나와야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}{}_8\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4&={}_8\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^8\\&=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^8\\&=70\times\frac{1}{256}\\&=\frac{35}{128}\end{aligned}$$

$\therefore\ p=128,\ q=35$

$\therefore\ p+q=128+35=163$

80) **정답** 485

정육면체 모양의 상자를 한 번 던질 때 나온 수가 홀수일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고, 짝수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

이 상자를 5번 던질 때, 나온 다섯 개의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 나온 다섯 개의 수의 곱이 홀수인 사건이고, 5번 모두 홀수가 나와야 하므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C)&={}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0\\&=\frac{1}{243}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{1}{243}\\&=\frac{242}{243}\end{aligned}$$

$\therefore\ p=243,\ q=242$

$\therefore\ p+q=243+242$
$=485$

81) **정답** ①

한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 독립시행의 확률에 의하여 한 개의 주사위를 9번 던져서 3의 배수의 눈이 k번 나올 확률 P_k는

$\mathrm{P}_k={}_9\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{9-k}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{9}{}_9\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{9-k}\cdot x^k\\&=\sum_{k=0}^{9}{}_9\mathrm{C}_k\left(\frac{x}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{9-k}\\&=\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)^9\end{aligned}$$

$\therefore\ f(4)=2^9$

82) **정답** ②

$\mathrm{P}(B^C)=0.4$에서

$\mathrm{P}(B)=1-0.4=0.6$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.8=0.3+0.6-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

83) **정답** ③

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$가 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

<다른 풀이>

두 사건 A, B가 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\ (\because\ \mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B))\\&=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

84) **정답** ④

100 이하의 자연수 중에서 4의 배수는 25개다.
첫 번째 꺼낸 카드가 4의 배수일 사건을 A, 두 번째 꺼낸 카드가 4의 배수일 사건을 B라 할 때, 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{25}{100}\times\frac{24}{99}+\frac{75}{100}\times\frac{25}{99}\\&=\frac{25}{100}\left(\frac{24}{99}+\frac{75}{99}\right)\\&=\frac{25}{100}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

<참고>
두 번째 꺼낸 카드가 4의 배수일 확률은 첫 번째 꺼낸 카드가 4의 배수일 확률 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$과 같다.

85) **정답** ③
앞면이 나온 횟수를 a라 하면 6번의 시행 후 점 P의 위치는
$a-(6-a)=2a-6$
그러므로 $2a-6<-3$에서
$2a<3$
$\therefore\ a<\frac{3}{2}$
a는 음이 아닌 정수이므로
$a=0$ 또는 $a=1$
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}{}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6&=\left({}_6\mathrm{C}_0+{}_6\mathrm{C}_1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6\\&=(1+6)\times\frac{1}{64}\\&=\frac{7}{64}\end{aligned}$$

86) **정답** ④
앞면이 한 번만 나오거나 뒷면이 한 번만 나올 확률은
$$2\times{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=2\times\frac{10}{2^{10}}$$
앞면만 나오거나 뒷면만 나올 확률은
$$2\times{}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=2\times\frac{1}{2^{10}}$$
따라서 구하는 확률은
$$1-2\left(\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}\right)=\frac{501}{502}$$

87) **정답** ⑤
(i) 주사위를 처음 던질 때 5 이상의 눈의 수가 나올 확률은
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
(ii) 처음에 3 이하의 눈의 수가 나오고 두 번째로 던진 주사위에서 5 이상의 눈의 수가 나올 확률은
$\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$
따라서 구하는 확률은
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

88) **정답** ⑤
두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A^C과 B, A와 B^C, A^C과 B^C도 서로 독립이다.
또한 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$이 성립한다.
$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이고
$\mathrm{P}(B)=x$라 하면 $\mathrm{P}(B^C)=1-x$이다.
$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)+\frac{1}{3}$에서
$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)+\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}(1-x)+\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}(1-x)+\frac{1}{3}$$
$\therefore\ x=\frac{2}{3}$
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}x$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\\&=\frac{3+8-2}{12}\\&=\frac{9}{12}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

89) **정답** 703
4번째 게임에서 최종 우승자가 결정되려면 이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×로 나타낼 때
○×○○
와 같이 게임이 진행되어야 한다.
이때 한 번의 게임에서 승민이가 이길 확률이 $\frac{3}{5}$이므로 한번의 게임에서 준성이가 이길 확률은 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$이다.
(i) 승민이가 최종 우승자가 되는 경우
$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{54}{625}$
(ii) 준성이가 최종 우승자가 되는 경우
$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{24}{625}$
(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은
$$\frac{54}{625}+\frac{24}{625}=\frac{78}{625}$$
$\therefore\ p=625,\ q=78$
$\therefore\ p+q=625+78=703$

90) **정답** ①
한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.
4번 시행 후 다시 처음 위치로 돌아오는 경우는
$90^\circ+90^\circ+90^\circ+90^\circ=360^\circ$,
$90^\circ-30^\circ-30^\circ-30^\circ=0^\circ$
으로 90° 회전을 4번 하는 경우와 90° 회전을 한 번하고 -30° 회전을 3번 하는 경우가 있다.
독립시행의 확률에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3&=\frac{1}{81}+\frac{32}{81}\\&=\frac{33}{81}\\&=\frac{11}{27}\end{aligned}$$

91) **정답** ③

(i) D가 A와 첫 경기를 할 확률은 $\frac{1}{3}$

이때 D가 1차전에서 A를 이기고 다른 조의 1차전 승자와 경기하여 이길 확률은

$$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{18}$$

(ii) D가 B 또는 C와 첫 경기를 할 확률은 $\frac{2}{3}$

이때 D가 1차전에서 B 또는 C에게 이기고 다른 조의 1차전에서 A가 이기는 경우 또는 다른 조의 1차전에서 A가 지는 경우 그 승자에게 이기면 되므로

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\left\{\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{7}{54}$$

(i), (ii)에서 각 사건은 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{18}+\frac{7}{54}=\frac{10}{54}$$
$$=\frac{5}{27}$$

<다른 풀이>

A가 우승하려면 두 번의 경기에서 모두 이기면 되므로 A가 우승할 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

A가 우승을 못하면 B, C, D 중 한 명이 우승을 하고 B, C, D끼리 서로 이길 확률이 같으므로 구하는 확률은

$$\left(1-\frac{4}{9}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{5}{27}$$

92) **정답** 23

유리와 성준이가 비길 사건을 A, 두 사람 모두 3점을 받을 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

두 사람이 비기는 경우는 두 사람이 같은 점수를 받는 경우이다.

두 사람 모두 n점이 나올 확률을 P_n이라 하면 주사위 눈에는 0, 7이 없으므로

$$\mathrm{P}_0=0,\ \mathrm{P}_7=0$$

$$\mathrm{P}_n=\frac{1}{6}\times{}_7\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{7-n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_3+\mathrm{P}_4+\mathrm{P}_5+\mathrm{P}_6+\mathrm{P}_7$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2^7}({}_7\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_6)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2^7}\times(2^7-2)$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{1}{6}\times{}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2^7}\times(2^7-2)}$$
$$=\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{2^7-2}$$
$$=\frac{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}{128-2}$$
$$=\frac{35}{126}$$
$$=\frac{5}{18}$$

$\therefore\ p=18,\ q=5$

$\therefore\ p+q=18+5$
$=23$

<참고>

$${}_7\mathrm{C}_0+{}_7\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_6+{}_7\mathrm{C}_7=2^7$$

93) **정답** ④

B를 검은 바둑돌, W를 흰 바둑돌이라 하자.

(i) 첫 번째 시행에서 서로 같은 바둑돌을 선택하는 경우

$(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

첫 번째 시행에서 서로 같은 색의 바둑돌을 선택하고 두 번째 시행에서도 서로 같은 색의 바둑돌을 선택하여 교환하여야 하므로 흰 바둑돌을 선택하는 경우와 검은 바둑돌을 선택하는 경우로 2가지 경우가 있고 각 상자에서 하나의 바둑돌을 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$$\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

(ii) 첫 번째 시행에서 서로 다른 색의 바둑돌을 선택하는 경우

$(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to(B,\ B),\ (W,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

한 상자에서 바둑돌을 한 개 선택하면 다른 한 상자에서 그와 다른 색 바둑돌을 한 개 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$, 두 번째 시행에서 네 상자 중에서 $(B,\ B)$, $(W,\ W)$인 상자를 선택한 다음 바둑돌을 하나씩 꺼내 교환하면 되므로

$$\left(1\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\times1=\frac{1}{12}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

94) **정답** 220

동전 A가 앞면이 a 번 나오고, 동전 B가 앞면이 b번 나왔다고 하면 이동된 점 P의

x좌표는 $a-(6-a)=2a-6\ (0\le a\le6)$

y좌표는 $b-(6-b)=2b-6\ (0\le b\le6)$

이 된다.

옮겨진 점이 직선 $x+y=6$ 위에 있으므로

$(2a-6)+(2b-6)=6$에서

$a+b=9$

조건을 만족시키는 a, b를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(6,\ 3),\ (5,\ 4),\ (4,\ 5),\ (3,\ 6)$

동전 A가 앞면이 a번, 동전 B가 앞면이 b번 나올 확률은

$${}_6\mathrm{C}_a\left(\frac{1}{2}\right)^6\times{}_6\mathrm{C}_b\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{{}_6\mathrm{C}_a\cdot{}_6\mathrm{C}_b}{2^{12}}$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_6\cdot{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_5\cdot{}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_4\cdot{}_6\mathrm{C}_5+{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_6\mathrm{C}_6}{2^{12}}$$
$$=\frac{2({}_6\mathrm{C}_6\cdot{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_5\cdot{}_6\mathrm{C}_4)}{2^{12}}$$

$= \dfrac{2(1\times20+6\times15)}{2^{12}}$

$= \dfrac{220}{2^{12}}$

$\therefore\ p = \dfrac{220}{2^{12}}$

$\therefore\ 2^{12}\times p = 2^{12}\times\dfrac{220}{2^{12}}$

$= 220$

95) [정답] ②

8개의 숫자 중에서 임의로 서로 다른 5개의 숫자를 뽑아 다섯자리

의 자연수를 만드는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{P}_5$

천의 자리의 수와 십의 자리의 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수가 모

두 홀수이어야 하므로 $1,3,5,7$의 4개의 숫자에서 서로 다른 2개

를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수와 같고, 만의 자리, 백의 자리,

일의 자리의 수는 남은 6개의 숫자 중에서 서로 다른 3개을 뽑아

일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 구하는 확률은

$\dfrac{{}_4\mathrm{P}_2\times{}_6\mathrm{P}_3}{{}_8\mathrm{P}_5} = \dfrac{4\times3\times6\times5\times4}{8\times7\times6\times5\times4} = \dfrac{3}{14}$

96) [정답] ④

9개의 숫자 중에서 임의로 서로 다른 3개의 숫자를 뽑아 세 자리의

자연수를 만드는 경우의 수는

${}_9\mathrm{P}_3 = 9\times8\times7 = 504$

각 자리의 수 중 어느 두 수의 합이 9가 되는 세 자리의 자연수의

개수는 다음과 같다.

1부터 9까지의 자연수 중 합이 9가 되는 두 수의 쌍은

$(1,8),(2,7),(3,6),(4,5)$의 4개다.

이 4개의 쌍 중 하나를 택하고 9개의 숫자 중 이미 택한 2개의 숫

자를 제외한 7개의 숫자 중 하나를 택하여 3개의 숫자를 얻는다.

이렇게 얻은 3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$4\times7\times{}_3\mathrm{P}_3 = 4\times7\times6 = 168$

따라서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는

$504-168=336$이므로 구하는 확률은

$\dfrac{336}{504} = \dfrac{2}{3}$

97) [정답] ②

한 개의 주사위를 던질 때 1 또는 2의 눈이 나오는 사건을 A, 3

또는 4의 눈이 나오는 사건을 B, 5 또는 6의 눈이 나오는 사건을

C라 하자. 예를 들어 ABC는 주사위를 세 번 던졌을 때 일어난 사

건을 순서대로 왼쪽에서 오른쪽으로 나열한 것이다. 따라서 ab를 적

는 경우는 ABC, ACB, CAB의 세 가지 경우이다.

이때 ABC, ACB, CAB가 나오는 경우의 수는 각각 $2\times2\times2=8$

이므로 ab를 적는 경우의 수는 $8\times3=24$이다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{24}{6\times6\times6} = \dfrac{1}{9}$

98) [정답] ③

$1,2,2,3,3,3$의 여섯 개의 숫자를 모두 배열하여 만들 수 있는

여섯 자리의 자연수의 개수는

$\dfrac{6!}{2!3!} = 60$

숫자 $3,1,3,3$을 같은 문자 a,a,a,a로 생각하여 배열한 후 두 번째 a또는 세 번째 a에 1을 대입하고 나머지 a에 3을 대입하면 된다.

따라서 $a,a,a,a,2,2$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!4!} = 15$

두 번째 a 또는 세 번째 a에 1을 대입하는 경우가 2가지 있으므

로 구하는 확률은

$\dfrac{15\times2}{60} = \dfrac{1}{2}$

다른 풀이

여섯 자리 중 두 자리를 선택하여 2를 대입한 후 남은 자리에

$3,1,3,3$또는 $3,3,1,3$을 대입하면 되므로

${}_6\mathrm{C}_2\times = 15\times2 = 30$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$

99) [정답] 77

3개의 공에 적힌 수의 합이 12가 되는 경우는 3개의 공에 적혀 있

는 수가 $(4,4,4),(2,5,5),(3,4,5)$인 경우이다.

(ⅰ) $4,4,4$가 나올 확률

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \dfrac{4}{455}$

(ⅱ) $2,5,5$가 나올 확률

$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \dfrac{2\times10}{455} = \dfrac{20}{455}$

(ⅲ) $3,4,5$가 나올 확률

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \dfrac{3\times4\times5}{455} = \dfrac{60}{455}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{4}{455}+\dfrac{20}{455}+\dfrac{60}{455} = \dfrac{84}{455} = \dfrac{12}{65}$

따라서 $p=65, q=12$

$p+q=65+12=77$
100) [정답] ②
상자에서 차례로 한 개씩 두 번 구슬을 꺼낼 때 나올수 있는 순서쌍
(a,b)의 개수는 ${}_5\Pi_2=5^2=25$
$\log_2 a-\log_4 b=\log_4\frac{a^2}{b}$이 정수이어야 하므로
$\frac{a^2}{b}=4^k$(k는 정수) 꼴이어야 한다.
(ⅰ) $b=1$일 때 $a=1,2,4$
(ⅱ) $b=4$일 때 $a=1,2,4$
(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 구하는 확률은
$\frac{3+3}{25}=\frac{6}{25}$
101) [정답] ③
3^a의 일의 자리의 수는 $3,9,7,1$이 반복되고 4^b의 일의 자리의 수
는 $4,6$이 반복된다. 3^a+4^b의 값이 5의 배수가 되는 경우는 다음
과 같다.
(ⅰ) 3^a의 일의 자리의 수는 1이고 4^b의 일의 자리의 수는 4인
경우
$a=4$, $b=1,3,5$이므로 $\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$
(ⅱ) 3^a의 일의 자리의 수는 9이고 4^b의 일의 자리의 수는 6인
경우
$a=2,6$, $b=2,4$이므로 $\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$
(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 구하는 확률은
$\frac{1}{10}+\frac{2}{15}=\frac{7}{30}$
102) [정답] ④
(ⅰ) 상자 A에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률은
$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}$
이때 상자 B에는 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있으므로
상자 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 2개일 확률은
$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}$
따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}\times\frac{6}{21}=\frac{6}{147}$
(ⅱ) 상자 A에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 모두 검은 공일 확률은
$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}$
이때 상자 B에는 흰 공 2개, 검은 공 5개가 들어 있으므로
상자 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 2개일 확률은
$\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}$
따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}=\frac{6}{21}\times\frac{1}{21}=\frac{2}{147}$
(ⅲ) 상자 A에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 1개,
검은 공 1개일 확률은
$\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}$
이때 상자 B에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있으므로
상자 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 2개일 확률은
$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}$
따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{12}{21}\times\frac{3}{21}=\frac{12}{147}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은
$\frac{6}{147}+\frac{2}{147}+\frac{12}{147}=\frac{20}{147}$
103) [정답] ①
a_1,a_2,a_3은 모두 자연수이므로 a_1+a_2와 a_2a_3은 모두 자연수이고
$2\le a_1+a_2\le 12, 1\le a_2a_3\le 36$이다.
포물선 $y^2=4x$위의 점 중에서 x좌표가 2 이상 12 이하의 자연수이고, y좌표가 1 이상 36 이하의 자연수인 점은 $(4,4),(9,6)$이다.
(ⅰ) $a_1+a_2=4, a_2a_3=4$를 만족시키는 순서쌍 (a_1,a_2,a_3)은
$(2,2,2),(3,1,4)$의 2가지이다.
(ⅱ) $a_1+a_2=9, a_2a_3=6$을 만족시키는 순서쌍 (a_1,a_2,a_3)은
$(3,6,1),(6,3,2)$의 2가지이다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은
$\frac{2+2}{6^3}=\frac{1}{54}$
104) [정답] ④
7명의 학생을 3명, 4명의 두 팀으로 나누는 경우의 수는
${}_7C_3\times{}_4C_4=35$
(ⅰ) A, B가 3명, C가 4명인 팀에 배정되는 경우
D, E, F, G 중 1명을 A, B와 같은 팀에 넣는 경우와 같으므로
$\frac{4}{35}$
(ⅱ) A, B가 4명, C가 3명인 팀에 배정되는 경우
D, E, F, G 중 2명을 A, B와 같은 팀에 넣는 경우와 같으므로

$\dfrac{{}_4C_2}{35}=\dfrac{6}{35}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{4}{35}+\dfrac{6}{35}=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$

105) [정답] ④

적어도 한 개의 구슬에 적힌 수가 짝수인 사건을 A라 하면 A^c은 2개의 구슬에 적힌 수가 모두 홀수인 사건이다.

따라서 $P(A^c)=\dfrac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{2}{7}$이므로 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^c)=1-\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$

106) [정답] ④

$a+b+c$, $a\times b\times c$ 중 적어도 하나가 짝수인 사건을 A라 하면 A^c은 $a+b+c$, $a\times b\times c$가 모두 홀수인 사건이므로 다음과 같다.

	$a+b+c$	$a\times b\times c$	$a,\ b,\ c$
A	짝수	짝수	$a,\ b,\ c$ 중 2개의 수가 홀수이거나 모두 짝수이다.
	홀수	짝수	$a,\ b,\ c$ 중 1개의 수가 홀수이다.
	짝수	홀수	이 사건이 일어날 확률은 0이다.
A^c	홀수	홀수	$a,\ b,\ c$가 모두 홀수이다.

$a,\ b,\ c$가 각각 1 또는 3 또는 5 중의 하나가 나오면 되므로

$P(A^c)=\dfrac{3\times3\times3}{6^3}=\dfrac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

다른 풀이

$a,\ b,\ c$가 각각 1 또는 3 또는 5 중의 하나가 나올 확률은 각각 $\dfrac{1}{2}$이므로

$P(A^c)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

107) [정답] ⑤

함수 f 중에서 임의로 한 개의 함수를 택할 때, 치역의 원소의 개수가 3 이상인 사건을 A라 하면 함수 f 중에서 임의로 한 개의 함수를 택할 때, 치역의 원소의 개수가 2 이하인 사건은 A^c이다.

$f(2)=a,\ f(3)=b,\ f(5)=c,\ f(6)=d$라 하면 모든 함숫값의 합은 15이고 $f(1)=2,\ f(4)=3$이므로

$a+b+c+d=10$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 1 이상 6 이하의 자연수)을 만족시킨다.

이때 $a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$로 놓으면 $a'+b'+c'+d'=6$ ($a',\ b',\ c',\ d'$은 음이 아닌 5 이하의 정수)

따라서 함수 f의 개수는 4개에서 중복을 허락하여 6개를 뽑는 조합의 수에서 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$이 $(6,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 6,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 6,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 0,\ 6)$의 4가지를 빼주어야 하므로

$${}_4H_6-4={}_9C_6-4={}_9C_3-4$$
$$=84-4=80$$

한편 $f(1)=2,\ f(4)=3$이므로 치역의 원소의 개수가 1인 경우는 없고, 치역의 원소의 개수가 2인 경우는 $a,\ b,\ c,\ d$의 값이 2 또는 3이면 $a+b+c+d=10$을 만족시키는 경우이므로 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore\ \dfrac{4!}{2!2!}=6$

$\therefore\ P(A^c)=\dfrac{6}{80}=\dfrac{3}{40}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^c)$$
$$=1-\dfrac{3}{40}$$
$$=\dfrac{37}{40}$$

108) [정답] ④

$5\times a\times b$가 홀수일 사건을 A, $5\times a\times b$가 15 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$5\times a\times b$가 홀수이면 a와 b가 모두 홀수이므로 1 또는 3이 적혀 있는 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같다.

$$\therefore\ P(A)=\dfrac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{\dfrac{6\times5}{2\times1}}{\dfrac{10\times9}{2\times1}}=\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$$

$5\times a\times b$가 홀수이면서 15 이상인 경우는 $(a,\ b)$의 순서쌍이 $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 3)$ 중의 하나이어야 하므로 1 또는 3이 적혀 있는 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수에서 1이 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우의 수를 빼면 된다.

$$\therefore\ P(A\cap B)=\dfrac{{}_6C_2-{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{\dfrac{6\times5}{2\times1}-\dfrac{4\times3}{2\times1}}{\dfrac{10\times9}{2\times1}}$$
$$=\dfrac{15-6}{45}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{5}$$

109) [정답] ②

학생 100명 중에서 임의로 뽑은 1명이 1학년 학생인 사건을 A, 유치원을 선택한 학생인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B^c \mid A)=\frac{\mathrm{P}(B^c \cap A)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{a}{a+35}$$
$$=\frac{3}{8}$$
$8a=3a+105,\ 5a=105$

$\therefore\ a=21$

$$\mathrm{P}(A^c \mid B)=\frac{\mathrm{P}(A^c \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$
$$=\frac{b}{35+b}$$
$$=\frac{5}{12}$$
$175+5b=12b,\ 7b=175$

$\therefore\ b=25$

$\therefore\ b-a=25-21=4$

110) [정답] ②

남학생의 수를 a, 여학생의 수를 b라 하면

$a+b=600$ …… ㉠

연극을 선호하는 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하자.

이때 연극을 선호하는 남학생의 수와 여학생의 수는 각각 $0.2a,\ 0.8b$이므로

$p_1=\mathrm{P}(B^c \mid A)$
$$=\frac{\mathrm{P}(B^c \cap A)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{0.8b}{0.2a+0.8b}$$
$$=\frac{8b}{2a+8b}$$
$$=\frac{4b}{a+4b}$$
또 영화를 선호하는 남학생의 수와 여학생의 수는 각각 $0.8a,\ 0.2b$이므로

$p_2=\mathrm{P}(B \mid A^c)$
$$=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^c)}{\mathrm{P}(A^c)}$$
$$=\frac{0.8a}{0.8a+0.2b}$$
$$=\frac{8a}{8a+2b}$$
$$=\frac{4a}{4a+b}$$
$4p_1=3p_2$이므로
$$4\times\frac{4b}{a+4b}=3\times\frac{4a}{4a+b}$$
$$\frac{4b}{a+4b}=\frac{3a}{4a+b}$$
$16ab+4b^2=3a^2+12ab$

$3a^2-4ab-4b^2=0$

$(a-2b)(3a+2b)=0$

$\therefore\ a=2b$ 또는 $a=-\dfrac{2}{3}b$

$a>0,\ b>0$이므로 $a=2b$

이것을 ㉠에 대입하면

$2b+b=3b=600$

따라서 $b=200$이므로 여학생의 수는 200이다.

111) [정답] ①

10개의 상자에서 한 개의 상자를 택하여 임의로 한 개의 공을 꺼냈을 때 이 공이 흰 공인 사건을 A, 네 번째 상자를 택하는 사건을 B라 하자.

10개의 상자에 들어 있는 흰 공과 검은 공을 모두 합치면 흰 공의 개수는 55, 검은 공의 개수는 45이다. 각 상자를 택할 확률이 모두 같으므로 사건 A는 흰 공 55개, 검은 공 45개가 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼냈을 때 이 공이 흰 공인 사건과 같으므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{55}{100}$$
네 번째 상자에서 흰 공이 나올 확률은
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{4}{100}$$
이므로 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{100}}{\frac{55}{100}}=\frac{4}{55}$$
112) [정답] ③

두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$$=2\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{8}$$
$$\{\mathrm{P}(B)\}^2=\frac{1}{16}$$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{4+2-1}{8}=\frac{5}{8}$$
113) [정답] ④

두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로 두 사건 $A,\ B^c$과 $A^c,\ B^c$도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(B^c \mid A)+\mathrm{P}(A^c \mid B^c)=\dfrac{5}{4}$에서
$$\mathrm{P}(B^c)+\mathrm{P}(A^c)=\frac{5}{4}$$
$$1-\mathrm{P}(B)+1-\mathrm{P}(A)=\frac{5}{4}$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$$
114) [정답] ②

두 사건 A, C가 서로 독립이므로 두 사건 A^c, C도 서로 독립이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A^c \cap C) = \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A^c) \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{10}$

따라서 $\mathrm{P}(A^c) = \dfrac{3}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

115) **[정답]** ②

B열	B−1	B−2	B−3		
A열	A−1	A−2	A−3	A−4	A−5

(ⅰ) 갑이 A열 A−1번과 A−5번, B열 B−1번과 B−3번 중 한 자리에 앉게 되는 경우에 을의 자리는 자동으로 결정된다.

$\therefore\ \dfrac{4}{8} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{14}$

(ⅱ) 갑이 A열의 A−2, A−3, A−4, B열의 B−2에 앉게 경우에 을의 자리는 A가 앉은 자리 양 옆의 두 자리 중 한 자리에 앉으면 된다.

$\therefore\ \dfrac{4}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{1}{7}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{14}$

다른 풀이

갑과 을이 같은 열에 이웃하여 앉는 경우는

A열 (A−1, A−2), (A−2, A−3), (A−3, A−4)
(A−4, A−5)

B열 (B−1, B−2), (B−2, B−3)

의 6가지이다.

이때 갑과 을이 자리를 바꾸어 앉는 경우가 2가지이고 나머지 6명이 6자리에 앉는 경우의 수가 6!이므로 구하는 확률은

$\dfrac{6 \times 2 \times 6!}{8!} = \dfrac{6 \times 2}{8 \times 7} = \dfrac{3}{14}$

116) **[정답]** ①

(ⅰ) $a < b$인 경우의 수는

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자에서 2개의 숫자를 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_2 = 15$

$\therefore\ \dfrac{15}{36} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{24}$

(ⅱ) $a \le b$인 경우의 수는

$36 - 15 = 21$

$\therefore\ \dfrac{21}{36} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{48}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{5}{25} + \dfrac{7}{48} = \dfrac{17}{48}$

117) **[정답]** ⑤

한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$이고, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$이다.

점 P가 60°만큼 이동하는 횟수를 a, 120°만큼 이동하는 횟수를 b로 놓으면 점 P가 한 바퀴를 돌아 점 A에 도착하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $a = 6$인 경우

${}_5\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = \dfrac{1}{64}$

(ⅱ) $a = 4$, $b = 1$인 경우

${}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = \dfrac{5}{32}$

(ⅲ) $a = 2$, $b = 2$인 경우

${}_4\mathrm{C}_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

(ⅳ) $b = 3$인 경우

${}_3\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{1}{64} + \dfrac{5}{32} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{43}{64}$

118) **[정답]** ②

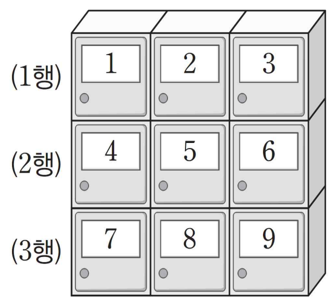
한 개의 주사위를 던졌을 때 나올 수 있는 6의 약수의 눈은 1, 2, 3, 6이므로 한 개의 주사위를 던졌을 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$이고 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다. 흰 공이 3개 들어 있는 경우는 마지막 칸에 흰 공이 들어 있고 나머지 5개의 칸 중 2개의 칸에 연속하여 흰 공이 2개 들어 있는 경우이므로 주사위를 4번 던졌을 때 6의 약수의 눈이 1번 나와야 한다.

$\therefore\ {}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{81}$

119) **정답** ③

9개의 사물함 중 3개를 선택하여 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_3 \times 3!$

맨 윗줄을 1행, 그 아랫줄을 2행, 맨 아랫줄을 3행이라 하면 세 개의 사물함이 서로 이웃하지 않는 경우는 다음과 같다.

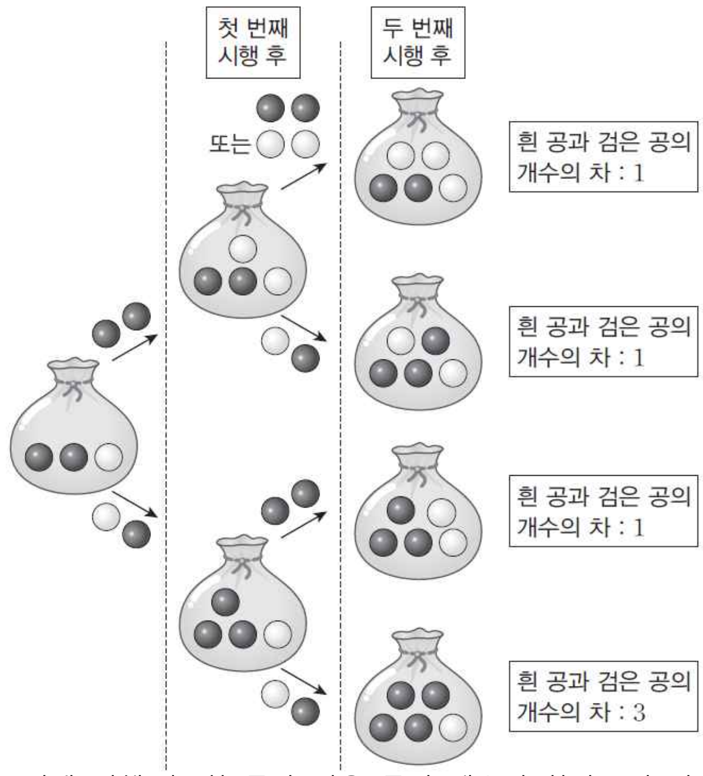


(ⅰ) 1, 2, 3행에서 각각 1개씩 선택하는 경우
1, 2, 3행의 순서대로 하나씩 선택한다면 1행에서 1개를 선택할 수 있는 경우의 수는 3개이고, 2행에 1개를 선택할 수 있는 경우의 수는 2이며, 3행에서 1개를 선택할 수 있는 경우의 수는 2이므로 3개의 사물함이 이웃하지 않도록 선택하는 경우의 수는 $3\times2\times2=12$
(ⅱ) 1, 2행 또는 2, 3행에서 3개를 선택하는 경우
1행에서 1개, 2행에서 2개를 선택하는 경우의 수는 1이고 2행에서 1개, 1행에서 2개를 선택하는 경우의 수도 1이므로 1, 2행을 선택할 때 경우의 수는 2이다.
마찬가지로 2, 3행을 선택할 때 경우의 수는 2이다.
따라서 3개의 사물함이 이웃하지 않도록 선택하는 경우의 수는 $2+2=4$
(ⅲ) 1, 3행에서 3개를 선택하는 경우
1행에서 1개, 3행에서 2개를 선택하는 경우의 수는 $3\times1=3$
1행에서 2개, 3행에서 1개를 선택하는 경우의 수는 $1\times3=3$
따라서 3개의 사물함이 이웃하지 않도록 선택하는 경우의 수는 $3+3=6$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 세 사물함이 서로 이웃하지 않도록 배정하는 경우의 수는 $(12+4+6)\times3!=22\times3!$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{22\times3!}{{}_9C_3\times3!}=\dfrac{22}{\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}=\dfrac{11}{42}$

120) **정답** ⑤
문자 A가 적혀있는 카드를 a, 문자 B가 적혀 있는 카드를 b, 문자 C가 적혀있는 카드를 c라 하자.
a, a, a, b, b, c의 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$
적어도 한 종류의 카드가 2장 이상 연속하게 나열되는 사건을 X라 하면 X의 여사건 X^C은 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않은 것이다.
$a, a, a,$ 를 ①a②a③a④와 같이 나열한 후 ①, ②, ③, ④의 자리에 b, b, c를 놓는 경우의 수를 구한다.
(ⅰ) ②, ③에 각각 1개의 문자를 놓는 경우
②, ③에 각각 b, b를 놓으면 c는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 2가지

②, ③에 각각 b, c또는 c, b를 놓으면 b는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 $2\times2=4$(가지)
따라서 같은 종류의 카드끼리는 2장이상 연속해서 나열되지 않는 경우의 수는 6이다.
(ⅱ) ②, ③에 한곳에는 2개의 문자, 다른 한 곳에는 1개의 문자를 넣는 경우
②에 bc또는 cb를 놓으면 ③에 b를 놓아야 하므로 2가지
③에 bc또는 cb를 놓으면 ②에 b를 놓아야 하므로 2가지
따라서 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않는 경우의 수는 4이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않는 경우의 수는 $6+4=10$ 이므로
$\mathrm{P}\left(X^C\right)=\dfrac{10}{60}=\dfrac{1}{6}$
따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}\left(X^C\right)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

121) **정답** ③
두 번째 시행 후 주머니의 공의 상태를 나타내면 다음 그림과 같다.



두 번째 시행 후 흰 공과 검은 공의 개수의 차가 1이 아닌 경우는 두 번의 시행 모두 서로 다른 색의 공을 꺼내는 것이다. 첫 번째 시행에서 서로 다른 색의 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째 시행에서 서로 다른 색일 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P((A\cap B)^c)$이다.
$P(A)=\dfrac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}=\dfrac{2}{3}$, $P(B|A)=\dfrac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{2}$이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$
따라서 두 번째 시행 후 흰 공과 검은 공의 개수의 차가 1일
확률은 $P((A\cap B)^c)=1-P(A\cap B)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

122) **정답** ③
한 경기에서 C팀이 A팀을 상대해서 이기는 사건을 X라 하

면 $P(X)=\dfrac{1}{2}$
한 경기에서 C팀이 B팀을 상대해서 이기는 사건을 Y라

하면 $P(Y)=\frac{2}{3}$

C팀의 성적이 3승 1패인 경우는 다음 2가지 경우이다.

(i) A팀한테 1패를 당하는 경우

각각의 경기에서 이기거나 지는 사건은 독립이고 A팀 과의 경기 결과인 1승 1패는 순서가 바뀔 수 있으므로 A팀한테 1승 1패, B팀한테 2승을 거둘 확률은

$$\{{}_2\mathrm{C}_1\times P(X)P(X^c)\}\quad\times P(Y)P(Y)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{9}$$

(ii) B팀한테 1패를 당하는 경우

각각의 경기에서 이기거나 지는 사건은 서로 독립이고 B팀과의 경기 결과인 1승 1패는 순서가 바뀔 수 있으므로 A팀한테 2승, B팀한테는 1승 1패를 거둘 확률은

$$P(X)P(X)\times\{{}_2\mathrm{C}_1\times P(Y)P(Y^c)\}\quad=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{9}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

123) **정답** ②

두 번의 시행으로 넓이가 4인 정사각형 모양의 퍼즐을 만들 수 있는 퍼즐 조각을 가져가는 사건을 X, 직각이등변 삼각형 모양의 퍼즐 조각만을 가져가는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 P$(Y|X)$이다. 동전의 면과 주사위의 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 사건 X가 일어날 확률은 다음과 같이 구분하여 구할 수 있다.

(i) 정사각형 모양의 퍼즐 조각만 사용하는 경우

두 번의 시행으로 정사각형 모양의 퍼즐 조각만 4개를 가져가야 한다.

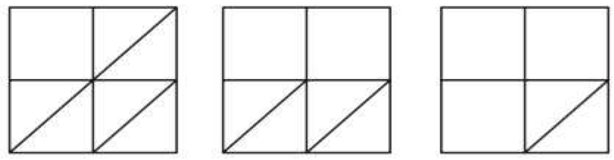
첫 번째 시행	두 번째 시행
(앞, 1)	(앞, 3)
(앞, 2)	(앞, 2)
(앞, 3)	(앞, 1)

따라서 구하는 확률은 $3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$

(ii) 두 가지 모양의 퍼즐 조각을 모두 사용하는 경우

두 번의 시행으로 정사각형 모양의 퍼즐 조각과 직각이등변 삼각형 모양의 퍼즐 조각을 각각 1개, 6개 또는 2개, 4개 또는 3개, 2개를 가져가야 한다.

첫 번째 시행	두 번째 시행
(앞, 1)	(뒤, 6)
(앞, 2)	(뒤, 4)
(앞, 3)	(뒤, 2)

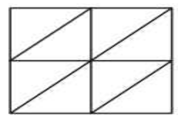


위의 표에서 첫 번째 시행과 두 번째 시행이 바뀌는 경우도 있으므로 구하는 확률은 $2\times3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$

(iii)직각 이등변삼각형 모양의 퍼즐 조각만 사용하는 경우

두 번의 시행으로 직각이등변삼각형 모양의 퍼즐 조각만 8개를 가져가야 한다.

첫 번째 시행	두 번째 시행
(뒤, 2)	(뒤, 6)
(뒤, 3)	(뒤, 5)
(뒤, 4)	(뒤, 4)
(뒤, 5)	(뒤, 3)
(뒤, 6)	(뒤, 2)



따라서 구하는 확률은 $5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(X)=3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2+2\times3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2+5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$$

$=14\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$ 이고 $P(X\cap Y)=5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$이므로

$$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2}{14\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{5}{14}$$

124) **정답** 27

집합 A의 원소의 개수를 a, 집합 B의 원소의 개수를 b, 집합 $A\cap B$의 원소의 개수를 c라 하면

$P(A)=\frac{a}{6},\ P(B)=\frac{b}{6},\ P(A\cap B)=\frac{c}{6}$

두사건 A, B가 서로 독립이므로 $P(A)P(B)=P(A\cap B)$가 성립해야 한다. 즉, $\frac{ab}{36}=\frac{c}{6}$이다.

c의 값에 따라 집합 X의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $c=1$, 즉 $A\cap B=\{8\}$ 일 때

$\frac{ab}{36}=\frac{1}{6}$에서 $ab=6$이고 $6\not\in X$이어야 한다.

$a\le3, b\le4$ 이므로 a, b는 다음 2가지 경우이다.

① $a=2, b=3$인 경우

집합 A의 개수는 $2, 4$ 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_2C_1=2$

집합 B의 개수는 $5, 7, 9$ 중 2개를 택하는 조합의 수와

같으므로 ${}_{3}C_{2}=3$

이때 $n(A\cup B)=4$이므로 집합 X의 나머지 2개의 원소는 1, 3 이다. 따라서 집합 X의 개수는 $2\times3=6$

② $a=3, b=2$인 경우

집합 A의 개수는 $\{2, 4, 8\}$의 1

집합 B의 개수는 5, 7, 9 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{3}C_{1}=3$

이때 $n(A\cup B)=4$이므로 집합 X의 나머지 2개의 원소는 1, 3 이다. 따라서 집합 X의 개수는 $1\times3=3$

(ii) $c=2$, 즉 $A\cap B=\{6, 8\}$일 때 $\frac{ab}{36}=\frac{2}{6}$에서 $ab=12$ 이고

$a\le4, b\le5$이므로 a, b는 다음 2가지 경우이다.

① $a=3, b=4$인 경우

집합 A의 개수는 2, 4 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{2}C_{1}=2$, 집합 B의 개수는 5, 7, 9 중 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{3}C_{2}=3$

이때 $n(A\cup B)=5$이므로 집합 X의 나머지 1개의 원소는 1 또는 3이다. 따라서 집합 X의 개수는 $2\times3\times2=12$

② $a=4, b=3$인 경우

집합 A의 개수는 $\{2, 4, 6, 8\}$의 1, 집합 B의 개수는 5, 7, 9 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{3}C_{1}=3$

이때 $n(A\cup B)=5$이므로 집합 X의 나머지 1개의 원소는 1 또는 3 이다. 따라서 집합 X의 개수는 $1\times3\times2=6$

(i),(ii)에서 구하는 집합 X의 개수는 $6+3+12+6=27$

125) **정답** 864

한 번의 게임에서 갑이 이기는 경우의 수를 구한다.

갑, 을, 병 세 사람이 뽑은 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하면 $b+c=n\ (n=2, 3, 4, \cdots, 9)$이 되는 경우의 수는

$(b,c)=(1,n-1),(2,n-2),\ \cdots,\ (n-1,1)$ 의 $(n-1)$개다.

따라서 $a=3$일 때, $b+c=2$이므로 1가지

$a=4$일 때, $b+c=2, 3$이므로 $1+2$(가지)

$a=5$일 때, $b+c=2, 3, 4$이므로 $1+2+3$(가지)

$\vdots$

$a=10$일 때, $b+c=2, 3, 4, \cdots, 9$이므로 $1+2+3+\ \cdots\ +8$(가지)

따라서 한 번의 게임에서 갑이 이기는 경우의 수는

$$\sum_{k=1}^{8}(1+2+3+\ \cdots\ +k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k^2+k)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{8\times9}{2}\right)$$

$$=120$$

마찬가지로 한 번의 게임에서 을, 병이 이기는 경우의 수도 각각 120가지이다. 따라서 한 번의 게임에서 갑, 을, 병이 이길 확률은 각각 $\frac{120}{10^3}=\frac{3}{25}$이므로 비길 확률은 $1-3\times\frac{3}{25}=\frac{16}{25}$이다. 3번 게임을 했을 때 갑이 이기고, 을이 이기고, 비기는 세 경우의 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 확률은 $6\times\left(\frac{3}{25}\right)^2\times\frac{16}{25}=\frac{864}{5^2}$ 이므로

$a=864$

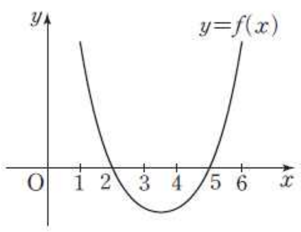
126) ④

[해설]

{출제 의도}

확률의 뜻을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하여 확률을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}



한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차함수 $f(x)=x^2-7x+10$의 그래프에서

$f(1)>0,\ f(6)>0,\ f(3)<0,\ f(4)<0$이므로 $f(a)f(b)<0$인 경우는 다음과 같다.

(i) $f(a)>0, f(b)<0$인 경우

$a=1$ 또는 $a=6$이고 $b=3$ 또는 $b=4$일 때이므로

$2\times2=4$

(ii) $f(a)<0,\ f(b)>0$인 경우

$a=3$ 또는 $a=4$이고 $b=1$ 또는 $b=6$일 때이므로

$2\times2=4$

(i), (ii)에서 $f(a)f(b)<0$인 경우의 수는

$4+4=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

127) ①

[해설]

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$a+b$의 값이 10 이상인 경우를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면 (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

128) ③

[해설]

임의로 한 장씩 2장의 카드를 차례로 뽑을 때 나오는 모든 경우의 수는

$9\times8=72$

$|a-b|=5$에서 $a-b=5$ 또는 $a-b=-5$

이때 $1\le a\le9,\ 1\le b\le9$이므로 $a=b+5$인 경우를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

(6, 1), (7, 2), (8, 3), (9, 4)

$a=b-5$인 경우를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)

따라서 $|a-b|=5$인 경우의 수는 $4+4=8$이므로 구하는 확률은

$\frac{8}{72}=\frac{1}{9}$

129) 13

[해설]

한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$2a=b+c$가 성립하는 경우는 다음과 같다.

$2a$	$b+c$
2	$1+1$
4	$1+3$,$2+2$, $3+1$
6	$1+5$, $2+4$, $3+3$,$4+2$, $5+1$
8	$2+6$, $3+5$, $4+4$, $5+3$, $6+2$
10	$4+6$, $5+5$, $6+4$
12	$4+6$, $5+5$, $6+4$

$2a=b+c$인 경우의 수는 $1+3+5+5+3+1=18$이므로 구하는 확률은

$\frac{18}{216}=\frac{1}{12}$

따라서 $p=12$, $q=1$이므로

$p+q=12+1=13$

130) ④

[해설]

7개의 공을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

짝수가 적힌 공끼리 서로 이웃하지 않도록 배열하려면 홀수가 적힌 공 4개를 먼저 원형으로 배열하고, 홀수 사이에 짝수가 적힌 공을 배열하면 된다.

홀수가 적힌 공 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

홀수 사이의 4개의 자리 중 3개의 자리를 택하여 짝수가 적힌 공 3개를 배열하는 경우의 수는

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6\times24}{720}=\frac{1}{5}$

131) ②

[해설]

8명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는 8!이다.

(ⅰ) 여학생 2명이 맨 앞과 맨 뒤를 제외한 여섯 자리 중 두 자리에 서는 경우의 수는

${}_6P_2$

(ⅱ) 여학생 2명이 서고 남은 여섯 자리에 여학생 2명을 제외한 남학생 6명이 서는 경우의 수는

6!

(ⅰ), (ⅱ)에서 맨 앞과 맨 뒤를 제외한 자리에 여학생 2명이 서는 경우의 수는

${}_6P_2\times6!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_6P_2\times6!}{8!}=\frac{6\times5}{8\times7}=\frac{15}{28}$

132) 10

[해설]

1부터 6까지의 자연수로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_6P_4=6\times5\times4\times3=360$

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되도록 네 장의 카드를 뽑는 경우는

(1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 5), (1, 3, 5, 6), (2, 3, 4, 6), (3, 4, 5, 6)

의 다섯 가지이고, 각 경우에서 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$4!=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5\times24}{360}=\frac{1}{3}$

즉, $p=3$, $q=1$이므로

$p^2+q^2=3^2+1^2=10$

133) ②

[해설]

10장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

뽑은 2장의 카드에 적혀 있는 두 수가 모두 홀수일 때 두 수의 곱이 홀수이므로 홀수가 적혀 있는 5장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

134) 17

[해설]

10명의 토론 동아리 회원 중에서 토론 대회에 참가할 학생 4명을 임의로 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

A와 B가 모두 토론 대회에 참가해야 하므로 A와 B를 제외한 8명의 토론 동아리 회원 중에서 2명의 학생을 임의로 뽑는 경우의 수는

${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

따라서 구하는 확률은

$\frac{28}{210}=\frac{2}{15}$

즉, $p=15$, $q=2$이므로

$p+q=15+2=17$

135) ⑤

[해설]

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^3=8$이므로 서로 다른 두 부분집합을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

선택된 두 부분집합의 합집합이 집합 A가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 공통인 원소의 개수가 0인 경우

두 집합의 원소의 개수는 각각 0, 3 또는 1, 2이므로 그 경우의 수는

${}_3C_0\times{}_3C_3+{}_3C_1\times{}_2C_2=1+3=4$

(ⅱ) 공통인 원소의 개수가 1인 경우

공통인 원소를 1개 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

두 집합의 공통인 원소를 제외한 나머지 원소의 개수는 각각 0, 2 또는 1, 1이므로 그 경우의 수는

${}_2C_0\times{}_2C_2+{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=1+1=2$

즉, 구하는 경우의 수는

$3\times2=6$

(ⅲ) 공통인 원소의 개수가 2인 경우

공통인 원소를 2개 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

두 집합의 공통인 원소를 제외한 나머지 원소의 개수는 각각 0, 1이므로 그 경우의 수는

${}_1C_0\times{}_1C_1=1$

즉, 구하는 경우의 수는

$3\times1=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 선택된 두 부분집합의 합집합이 집합 A가 되는 경우의 수는 $4+6+3=13$이므로 구하는 확률은 $\frac{13}{28}$ 이다.

136) ④

[해설]

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$

이때 $A\subset B^C$이므로

$P(A\cap B^C)=P(A)=\frac{1}{4}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$이므로

$\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+P(B)$

따라서 $P(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

137) ②

[해설]

9개의 구슬에서 임의로 3개의 구슬을 동시에 꺼내는 경우의 수

는

$${}_{9}C_{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

(ⅰ) 노란색 구슬을 3개 꺼내는 경우의 수는

$${}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$$

(ⅱ) 파란색 구슬을 3개 꺼내는 경우의 수는

$${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{4}{84}+\frac{10}{84}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

138) 5

[해설]

네 자리의 자연수가 3000보다 작은 사건을 A, 5000보다 큰 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

1, 2, 3, 4, 5, 6으로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_{5}P_{4}=6\times5\times4\times3=360$$

사건 A가 일어나는 경우는 천의 자리의 수가 1 또는 2인 경우이므로 그 경우의 수는

$$2\times{}_{5}P_{3}=2\times(5\times4\times3)=120$$

사건 B가 일어나는 경우는 천의 자리의 수가 5 또는 6인 경우이므로 그 경우의 수는

$$2\times{}_{5}P_{3}=2\times(5\times4\times3)=120$$

이때 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{120}{360}+\frac{120}{360}\\&=\frac{240}{360}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=5$

139) ⑤

[해설]

11개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_{11}C_{4}=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

파란 공이 홀수 개인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 파란 공이 1개, 노란 공이 3개인 경우의 수는

$${}_{7}C_{1}\times{}_{4}C_{3}=7\times4=28$$

(ⅱ) 파란 공이 3개, 노란 공이 1개인 경우의 수는

$${}_{7}C_{3}\times{}_{4}C_{1}=35\times4=140$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{28}{330}+\frac{140}{330}=\frac{168}{330}=\frac{28}{55}$$

140) 83

[해설]

이차방정식 $(2x-n)(3x-n)=0$에서

$x=\frac{n}{2}$ 또는 $x=\frac{n}{3}$

적어도 하나의 정수인 해를 가지려면 n은 2의 배수 또는 3의 배수이어야 한다.

이때 n이 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

집합 S= {n|n은 50 이하의 자연수}의 원소 중에서 2의 배수는 25개, 3의 배수는 16개, 2와 3의 공배수인 6의 배수는 8개이므로

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{25}{50}+\frac{16}{50}-\frac{8}{50}\\&=\frac{33}{50}\end{aligned}$$

따라서 $p=50$, $q=33$이므로

$p+q=50+33=83$

141) 4

[해설]

6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$6\neq720$

6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 (1, 6), (2, 5), (3, 4) 세 쌍의 합이 각각 7이므로 $a_i+a_{a+1}\neq7$이 성립하려면 이 세 쌍의 수는 각각 서로 이웃하지 않아야 한다.

(ⅰ) 세 쌍 (1, 6), (2, 5), (3, 4) 중 각각 한 개의 수가 a_1, a_2, a_3에 배열되는 경우

a_1, a_2, a_3의 자리에 숫자를 배열하는 방법의 수는

$2^3\times3!=48$이고

a_4, a_5, a_6의 자리에 숫자를 배열하는 방법의 수는

$2\times2\times1=4$이므로

주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$48\times4=192$

(ⅱ) 세 쌍 (1, 6), (2, 5), (3, 4) 중 한 쌍의 수가 a_1, a_3에 배열되고, 나머지 두 쌍 중 한 개의 수가 a_2에 배열되는 경우

a_1, a_2, a_3의 자리에 숫자를 배열하는 방법의 수는

${}_{3}C_{!}\times2\times4=24$이고

a_4, a_5, a_6의 자리에 숫자를 배열하는 방법의 수는

$2\times1\times1=2$이므로

주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$24\times2=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 $i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$에 대하여

$a_i+a_{a+1}\neq7$이 성립할 확률은

$$\frac{192}{720}+\frac{48}{720}=\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=1$이므로

$p+q=3+1=4$

142) ④

[해설]

$(A\cap B^C)\cup B=A\cup B$이고 두 사건 $A\cap B^C$과 B는 서로 배반사건

이므로

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A\cap B^C)+P(B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\\&=\frac{11}{15}\end{aligned}$$

143) ③

[해설]

남학생과 여학생을 각각 한 명 이상 뽑는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 3명 모두 남학생을 뽑거나 3명 모두 여학생을 뽑는 사건이다.

11명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{11}C_{3}=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

(ⅰ) 3명 모두 남학생을 뽑는 경우의 수는

$${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(ⅱ) 3명 모두 여학생을 뽑는 경우의 수는

$${}_{6}C_{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$P(A^C)=\frac{10+20}{165}=\frac{2}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(A^C)\\&=1-\frac{2}{11}\\&=\frac{9}{11}\end{aligned}$$

144) ①

[해설]

10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

여자를 2명 이상 뽑는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 모두 남자를 뽑거나 여자를 1명 뽑는 사건이다.

(ⅰ) 4명 모두 남자를 뽑는 경우의 수는

$_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$
(ⅱ) 남자 3명, 여자 1명을 뽑는 경우의 수는
$_6C_3 \times {}_4C_1 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times4 = 80$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$P(A^C) = \frac{15}{210}+\frac{80}{210}=\frac{19}{42}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)$
$=1-\frac{19}{42}$
$=\frac{23}{42}$
145) ⑤
[해설]
볼펜 2개를 꺼낼 때, 서로 다른 색의 볼펜을 꺼내는 사건을 A라 하면 A의 여사건 □A^C은 서로 같은 색의 볼펜을 꺼내는 사건이다.
9개의 볼펜 중에서 2개의 볼펜을 꺼낼 때, 서로 같은 색의 볼펜을 꺼내는 경우는 파란색 볼펜 4개에서 2개를 꺼내거나 검은색 볼펜 3개에서 2개를 꺼내거나 빨간색 볼펜 2개에서 2개를 꺼내는 경우이므로 그 확률은
$P(A^C)=\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}+\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_9C_2}$
$=\frac{6+3+1}{36}$
$=\frac{5}{18}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)$
$=1-\frac{5}{18}$
$=\frac{13}{18}$
{다른 풀이}
9개의 볼펜 중에서 2개의 볼펜을 꺼낼 때, 서로 다른 색의 볼펜을 꺼낼 확률은
$\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1+{}_4C_1\times{}_2C_1+{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_9C_2}=\frac{12+8+6}{36}=\frac{13}{18}$
146) ⑤
[해설]
두 직선이 일치하거나 한 점에서 만나는 사건의 여사건은 두 직선이 평행한 사건이다. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
두 직선 $6x+ay=4$, $3x+by=a$가 평행할 조건은
$\frac{6}{3}=\frac{a}{b}\neq\frac{4}{a}$
이므로 $a=2b$, $a\neq2$
이때 a, b를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면 (4, 2), (6, 3)이므로 두 직선이 평행할 확률은
$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
따라서 구하는 확률은
$1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$
147) 16
[해설]
방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$
$xyz=0$인 사건은 x, y, z 중 적어도 하나가 0인 사건으로 그 여사건은 x, y, z 중 0이 하나도 없는 사건이다.
이때 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$
따라서 구하는 확률은
$1-\frac{36}{66}=\frac{5}{11}$
따라서 $p=11$, $q=5$이므로
$p+q=11+5=16$
148) ⑤
[해설]
{출제 의도}
조건부확률의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$이므로
$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^{C})=\frac{13}{16}-\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$
따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{13}{16}}=\frac{9}{13}$
149) ⑤
[해설]
$P(A^C\cup B^C)=1-P(A\cap B)$이므로
$P(A\cap B)=1-P(A^C\cup B^C)=1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$
따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{8}}=\frac{5}{6}$
150) ②
[해설]
두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$
$P(B|A)+P(B|A^C)$
$=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}+\frac{P(A^c\cap B)}{P(A^C)}$
$=0+\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}$
$=\frac{P(B)}{1-P(A)}=\frac{P(B)}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}P(B)$
$\frac{4}{3}P(B)=\frac{4}{9}$이므로 $P(B)=\frac{1}{3}$
따라서
$P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$
151) ④
[해설]
$P(A^C\cup B)-P(A\cap B^C)$
$=P(A^C)+P(B)-P)A^C\cap B)-P(A\cap B^C)$
$=1-P(A)+P(B)-\{P(B)-P(A\cap B)\}-\{P(A)-P(A\cap B)\}$
$=1-2P(A)+2P(A\cap B)$
$=1-2\times\frac{3}{8}+2P(A\cap B)$
$=\frac{1}{4}+2P(A\cap B)=\frac{5}{8}$
이므로 $P(A\cap B)=\frac{3}{16}$
따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{2}$
{다른 풀이}
$P(A^C\cup B)=P((A\cap B^C)^C)=1-P(A\cap B^C)$
$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$이므로
$P(A^C\cup B)-P(A\cap B^C)=1-2P(A\cap B^C)$

$=1-2P(A)+2P(A\cap B)$

$=1-2\times\frac{3}{8}+2P(A\cap B)$

$=\frac{5}{8}$

에서 $P(A\cap B)=\frac{3}{16}$

따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{2}$

152) 30

[해설]

{출제 의도}

조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

두 상자 A, B에서 꺼낸 구슬의 색이 모두 흰 색인 사건을 E, 구슬의 색이 서로 같은 사건을 F라 하면

$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P(E\cap F)}{P(E\cap F)+P(E^C\cap F)}$

$=\frac{\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}}{\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}+\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}}$

$=\frac{100-2a}{300-4a}=\frac{2}{9}$

$900-18a=600-8a$

$10a=300$

따라서 $a=30$

153) ④

[해설]

이 학급 전체 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 점심 급식을 신청한 학생인 사건을 A, 저녁 급식을 신청한 학생인 사건을 B라 하면 점심급식을 신청하지 않고 저녁 급식을 신청한 학생인 사건은 $A^C\cap B$이고

학생 수는 학급 전체 학생 수의 20 %이므로 $20\times0.2=6$이다.

따라서 이 학급의 급식 신청 학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	A	A^C	합계
B	14	6	20
B^C	8	2	10
합계	22	8	30

따라서 구하는 확률은

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

$=\frac{14}{20}$

$=\frac{7}{10}$

154) ②

[해설]

신입생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 남학생인 사건을 A, 수시모집으로 입학한 학생인 사건을 B라 하자.

신입생 중에서 남학생 수를 $3a$, 여학생 수를$2a$, 정시모집으로 입학한 학생 수를 b, 수시모집으로 입학한 학생 수를 $2b$라 하면 $5a=3b$이다.

한편, 수시모집으로 입학한 여학생 수를 x라 하면 신입생 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 수시모집으로 입학한 학생이었을 때 이 학생이 여학생일 확률은

$P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{n(A^C\cap B)}{n(B)}=\frac{3}{10}$이 므 로

$\frac{x}{2b}=\frac{3}{10}$

따라서 $x=\frac{3}{5}b$, $5a=3b$이므로 이 대학의 신입생 인원 수는 다음 표와 같다.

	A	A^C	합계
B	$\frac{7}{5}b=\frac{7}{3}a$	$x=\frac{3}{5}b=a$	$2b$
B^C	$\frac{2}{3}a$	a	b
합계	$3a$	$2a$	$5a(=3b)$

따라서 신입생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 정시모집으로 입학한 남학생일 확률은

$P(A\cap B^C)=\frac{\frac{2}{3}a}{5a}=\frac{2}{15}$

155) ②

[해설]

이 학교 학생 중 1명을 임의로 선택할 때 남학생인 사건을 A, 직업체험 전과 후 진로 희망을 바꾸지 않은 학생인 사건을 B, 이 학교 여학생의 수를 x라 하면 직업체험 전과 후 진로 희망 변화에 따른 남녀 학생 수는 다음 표와 같다.

(단위 : 명)

	A	A^C	합계
B	$(600-x)\times0.4$	$x\times0.6$	$240+0.2x$
B^C	$(600-x)\times0.6$	$x\times0.4$	$360-0.2x$
합계	$600-x$	x	600

이 학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 직업체험 후 진로 희망을 바꾸지 않은 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률이 p_1이므로

$p_1=P(A^C|B)$

$=\frac{n(A^C\cap B)}{n(B)}$

$=\frac{0.6x}{240+0.2x}$

이 학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 직업체험 후 진로 희망을 바꾼 학생일 확률이 pp_2이므로

$p_2=1-0.4=0.6$

$6p_1=5p_2$이므로

$6\times\frac{0.6x}{240+0.2x}=5\times0.6$

$\frac{x}{240+0.2x}=\frac{5}{6}$에서 $6x=1200+x$이므로 $x=240$

따라서 여학생의 수는 240이다.

156) ③

[해설]

{출제 의도}

두 사건 A와 B가 서로 종속일 때, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다

{풀이}

갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 을이 뽑은 카드에 적힌 수보다 작은 경우는 다음과 같은 두 가지 경우가 있다.

(ⅰ) 갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 수가 1, 2인 경우

을이 3 또는 4를 뽑으면 되므로 구하는 확률은

$\frac{1}{{}_4C_2}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{6}$

(ⅱ)갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 수가 1, 3인 경우

을이 4를 뽑으면 되므로 구하는 확률은

$\frac{1}{{}_4C_2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

157) ④

[해설]

주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 짝수인 사건을 X, 주머니 B에서 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 짝수인 사건을 Y라 하면 사건 Y는 두 개의 공에 적혀 있는 두 수 중 적어도 하나는 짝수인 사건과 같다.

(ⅰ) 주머니 A에서 짝수가 적힌 공을 한 개 꺼내어 주머니 B에 넣고 주머니 B에서 두 개의 공을 꺼낼 때 적어도 하나는 짝수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$P(X\cap Y)=P(X)P(X|Y)$

$=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\right)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{14}{15}$

$=\frac{28}{75}$

(ⅱ)주머니 A에서 홀수가 적힌 공을 한 개 꺼내어 주머니 B에 넣고 주머니 B에서 두 개의 공을 꺼낼 때 적어도 하나는 짝수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$P(X^C\cap Y)=P(X^C)P(Y|X^C)$

$=\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\right)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{12}{15}$

$=\frac{12}{25}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$P(Y)=P(X\cap Y)+P(X^C\cap Y)=\frac{28}{75}+\frac{12}{25}$

$=\frac{64}{75}$

158) ①

[해설]

첫 번째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가 (1, 2) 또는 (3, 4) 또는 (1, 4) 또는 (2, 3)이면 두 번째 시행 후 상자 안이 비어있게 된다.

따라서 2회째 시행 후 상자 안이 비어 있게 될 확률은 $\frac{4}{{}_4C_2}\times1=\frac{2}{3}$이다.

첫 번째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가 (1, 3)이고 2회, 3회째 시행에서 위와 같은 경우가 되면 3회째 시행 후 상자 안이 비어있게 된다.

첫 번째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가 (1, 3)일 확률은

$\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

{다른 풀이}

2회째 시행 후 상자 안이 비어 있지 않고 3회째 시행 후 상자 안이 비어 있으려면 첫 번째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가 모두 홀수이어야 하고 2회째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수는 하나는 홀수, 나머지 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}$

$=\frac{1}{9}$

159) ③

[해설]

흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 처음 상자에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때 2개의 공이 같은 색인 사건을 A, 주어진 시행을 한 후 상자에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때 2개 모두 흰 공인 사건을 B라 하자.

$P(A)=\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}$

$=3+\frac{1}{10}$

$=\frac{2}{5}$

(ⅰ) 처음 상자에서 같은 색 공 2개를 꺼내는 경우

주어진 시행 후 상자에 들어 있는 공은 흰 공 4개, 검은 공 2개이므로 6개의 공 중에서 2개의 공을 꺼낼 때 2개 모두 흰 공일 확률은

$P(B|A)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}$

$=\frac{6}{15}$

$=\frac{2}{5}$

따라서$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

(ⅱ) 처음 상자에서 다른 색 공 2개를 꺼내는 경우

주어진 시행 후 상자에 들어 있는 공은 흰 공 3개, 검은 공 3개이므로 6개의 공 중에서 2개의 공을 꺼낼 때 2개 모두 흰 공일 확률은

$P(B|A)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}$

$=\frac{3}{15}$

$=\frac{1}{5}$

따라서 $P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$

$=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}$

$=\frac{7}{25}$

160) ③

[해설]

이 농장에서 생산된 과일 중에서 임의로 한 개를 선택하여 두 기계 A, B를 이용하여 당도검사를 하였을 때 고당도로 측정되는 사건을 각각 X, Y라 하자.

두 사건 X, Y가 서로 독립이므로 두 사건 X^C, Y도 서로 독립이고 두 사건 X, Y^C도 서로 독립이다.

두 사건 $X^C\cap Y$, $X\cap Y^C$은 서로 배반사건이므로 두 기계 A, B 중 한 기계에서만 고당도로 측정되었을 확률은

$P(X^C\cap Y)+P(X\cap Y^C)=P(X^C)P(Y)+P(X)P(Y^C)$

$=(1-p)q+p(1-q)$

$=p+q-2pq$

한편, 두 기계 모두에서 고당도로 측정되었을 확률은

$P(X\cap Y)=P(X)P(Y)=pq$

이때 $p+q-2pq=5pq$이므로

$p+q=7pq$

따라서 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=7$

161) ④

[해설]

{출제 의도}

두 사건 A, B가 서로 독립일 때, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$임을 이용하여 확률의 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$P(A^C)=1-P(A)=\frac{1}{4}$에서

$P(A)=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}$에서

$P(A)P(B)=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}P(B)=\frac{1}{2}$

즉, $P(B)=\frac{2}{3}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C과 B도 서로 독립이므로

$P(B|A^C) = P(B) = \dfrac{2}{3}$

162) ④

[해설]

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A|B^c) = P(A) = \dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &= P(A)+P(B)-P(A)P(B) \\ &= \frac{1}{4}+P(B)-\frac{1}{4}P(B) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\dfrac{3}{4}P(B) = \dfrac{5}{12}$에서 $P(B) = \dfrac{5}{9}$이므로

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)P(B) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{5}{9} \\ &= \frac{5}{36} \end{aligned}$$

163) ⑤

[해설]

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A|B)+P(B|A) = P(A)+P(B)$

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$P(A)+P(B) = \dfrac{2}{3}$에서 $P(B) = \dfrac{2}{3}-P(A) > 0$이므로

$0 < P(A) < \dfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &= P(A)+P(B)-P(A)P(B) \\ &= \frac{2}{3}-P(A)P(B) \\ &= \frac{2}{3}-P(A)\left\{\frac{2}{3}-P(A)\right\} \\ &= \{P(A)\}^2-\frac{2}{3}P(A)+\frac{2}{3} \\ &= \left\{P(A)-\frac{1}{3}\right\}^2+\frac{5}{9} \end{aligned}$$

따라서 $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{3}$일 때, $P(A\cup B)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{9}$이다.

{다른 풀이}

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A|B)+P(B|A) = P(A)+P(B)$

$P(A) > 0$, $P(B) > 0$이므로

$P(A)+P(B) \geq 2\sqrt{P(A)P(B)}$

$\dfrac{2}{3} \geq 2\sqrt{P(A)P(B)}$

$\dfrac{1}{3} \geq \sqrt{P(A)P(B)}$ (단, 등호는 $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{3}$일 때 성립한다.)

즉, $P(A)P(B) \leq \dfrac{1}{9}$이므로

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &\equiv P(A)+P(B)-P(A)P(B) \\ &= \frac{2}{3}-P(A)P(B) \geq \frac{5}{9} \end{aligned}$$

따라서 $P(A\cup B)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{9}$이다.

164) ①

[해설]

$P(A|B^C)+P(B^C|A) = \dfrac{3}{4}$이므로

$P(A)+P(B^C) = \dfrac{3}{4}$

$P(A)-\{1-P(B)\} = \dfrac{3}{4}$이므로

$P(A)-P(B) = -\dfrac{1}{4}$ ……㉠

또한 $P(A\cap B) = \dfrac{1}{8}$이므로

$P(A)P(B) = \dfrac{1}{8}$ ……㉡

㉠에서 $P(B) = P(A)+\dfrac{1}{4}$이므로 ㉡에 대입하여 정리하면

$\{P(A)\}^2+\dfrac{1}{4}P(A)+\dfrac{1}{8} = 0$

$\left\{P(A)+\dfrac{1}{2}\right\}\left\{P(A)-\dfrac{1}{4}\right\} = 0$이고 $P(A) > 0$이므로

$P(A) = \dfrac{1}{4}$

이때 $P(B) = \dfrac{1}{2}$이므로

$P(B^C) = 1-P(B) = \dfrac{1}{2}$

따라서 $P(A\cap B^C) = P(A)P(B^C) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

165) ①

[해설]

{출제 의도}

확률의 덧셈정리와 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 a, 뒷면이 나오는 횟수를 b라 하자.

이때 $a+b=5$, $a\times b=6$인 경우와 확률은 다음과 같다.

(ⅰ) $a=2$, $b=3$일 때

${}_5C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{5}{16}$

(ⅱ) $a=3$, $b=2$일 때

${}_5C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{5}{16}+\dfrac{5}{16} = \dfrac{5}{8}$

166) ①

[해설]

주사위 1개를 3회 던져 나온 눈의 수의 곱이 3의 배수인 사건을 A라 하면 사건 A는 주사위 1개를 3회 던져 나온 눈의 수 중 3의 배수가 1번 이상 나오면 된다.

따라서 사건 A^C은 주사위 1개를 3회 던져 나온 눈의 수 중 3의 배수가 한 번도 나오지 않는 사건이므로

$$\begin{aligned} P(A) &= 1-P(A^C) = 1-{}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= 1-\frac{8}{27} = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

{다른 풀이}

주사위 1개를 3회 던져 나온 눈의 수 중에서 3의 배수가 1번 이상일 확률은

$$\begin{aligned} &{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27} \\ &= \frac{19}{27} \end{aligned}$$

167) ④

[해설]

$S_3 = 2$인 사건을 A, $S_6 = 3$인 사건을 B라 하면

한 개의 동전을 6회 던져 앞면이 세 번 나타날 확률은

$P(B) = {}_6C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{5}{16}$

동전을 6회 던져 3회째까지 앞면이 두 번, 4회부터 6회째까지 앞면이 1번 나타날 확률은

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{8}\times\frac{3}{8} = \frac{9}{64} \end{aligned}$$

따라서 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{9}{64}}{\frac{5}{16}}=\dfrac{9}{20}$

168) ③

[해설]

흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때 두 공의 색이 서로 같은 사건을 A라 하면

$P(A)=\dfrac{{}_2C_2+{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1+3}{10}=\dfrac{2}{5}$이고, 두 공의 색이 서로 다를 확률은

$P(A^C)=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$이다.

4번의 시행에서 두 공의 색이 서로 같은 횟수를$a(0\le a\le 4)$라 하면 두 공의 색이 서로 다른 횟수는 $4-a$이므로 점 P는 x축의 방향으로

$2a-(4-a)=3a-4$만큼 이동하고, y축의 방향으로

$-a+2(4-a)=8-3a$만큼 이동한다.

따라서 4번의 시행 후 원점에서 출발한 점 P의 좌표는

$(3a-4,\ 8-3a)$이므로 점 P가 곡선 $y=-x^2+6$ 위에 있으면

$8-3a=-(3a-4)^2+6$

$9a^2-27a+18=0$

$a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$

즉, $a=1$ 또는 $a=2$

따라서 4번의 독립시행에서 두 공의 색이 서로 같은 횟수가 1회 또는 2회이면 점 P는 곡선 $y=-x^2+6$ 위에 있으므로 구하는 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3+{}_4C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}+\frac{216}{625}$$
$$=\frac{432}{625}$$

169) ③

[해설]

한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\dfrac{2}{3}$, 6의 약수가 아닐 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다. 6번의 게임 후 점수가 8이 되려면 5번의 게임후 점수가 6이어야 한다. 한 개의 주사위를 5회 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 a (a=0, 1, 2, 3, 4, 5)라 하면 6의 약수가 아닌 횟수는 $5-a$이므로 $2+2a-(5-a)=6$에서 $a=3$이다. 즉, 한 개의 주사위를 5회 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우가 3회, 6의 약수가 아닌 경우가 2회이고 6번째로 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이어야 점수가 8이 된다.

따라서 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우를 ○ 6의 약수가 아닌 경우를 ×로 나타낼 때 5번의 게임 후 점수가 6인 경우 중 게임도중에 점수가 0이 되는 경우는 순서대로 ×, ×, ○ ○ ○

로 1가지이고 게임도중에 점수가 8 이상이 되는 경우는 순서대로 ○ ○ ○ ×, ×로 1가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$({}_5C_3-2)\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=128\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

이므로

$k=128$

{다른 풀이}

한 개의 주사위를 6회 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 k (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)이라 하면 점수는

$2+2k-(6-k)=3k-4$

$3k-4=8$에서 $k=4$이므로 한 개의 주사위를 6회 던질 때 6의 약수가 4회 나와야 한다.

한편, 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우를 ○ 6의 약수가 아닌 경우를 ×로 나타낼 때 6번의 게임이 끝나기 전 점수가 0이 되는 경우와 8 이상이 되는 경우는 다음과 같다.

1회	2회	3회	4회	5회	6회
×	×	○	○	○	○
○	○	○	×	×	○
○	○	○	×	○	×
○	○	×	○	×	×
○	×	○	○	○	×
×	○	○	○	○	×

따라서 구하는 확률은

$$({}_6C_4-7)\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2=128\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

이므로

$k=128$

170) **정답** 30

A부서에 속해 있는 직원 20명의 50%가 여성이므로 A부서의 남자 직원과 여자 직원은 각각 10명씩이다. 또한 이 회사의 여성 직원의 수를 n명이라 하면 B부서에 속해 있는 여성 직원의 수는 $0.6n$명이다. 따라서 직원 60명을 두 부서 A, B와 남자, 여자로 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.

	A부서	B부서	계
남자	10		
여자	10	$0.6n$	n
계	20	40	60

$n=10+0.6n$ 에서 $n=25$

임의로 택한 직원이 B부서에 속해 있는 사건을 E, 여성 직원인 사건을 F라 하면

$P(E)=\dfrac{40}{60}=\dfrac{2}{3}$, $P(E\cap F)=\dfrac{0.6n}{60}=\dfrac{15}{60}=\dfrac{1}{4}$

이므로 구하는 확률은 $P(F|E)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(E)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{8}$

따라서 $p=\dfrac{3}{8}$이므로 $80p=80\times\dfrac{3}{8}=30$