[주제42] 한 평면에 포함되는 3개의 공간벡터에 대하여

[1] '공간에서', '평면에서'에 대한 구별

시점이 원점이고, 어느 두 벡터도 서로 평행하지 않은 세 위치벡터
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$
를 생각하자. (단, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$)

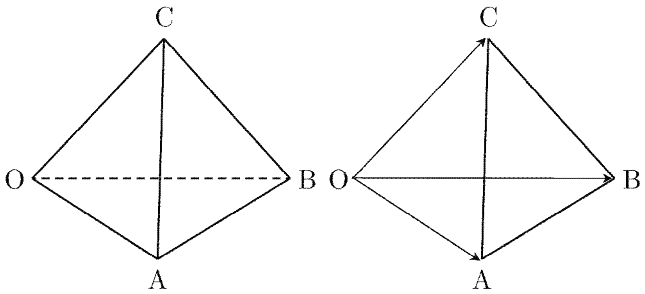
좌표공간에서 (혹은 공간에서) 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 주어지면 다음과 같은 두 가지의 경우를 생각해야 한다.

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 한 평면에 포함되지 않는 경우 …(가)
세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 한 평면에 포함되는 경우 …(나)

문제에서 '좌표공간에서 (혹은 공간에서)'라는 조건을 주었음에도 불구하고, 이를 '좌표평면에서 (혹은 평면에서)'로 착각하면 (나)의 경우로 한정하여 풀게 되므로 답을 구할 수 없을 가능성이 높아진다. 수능 시험에서는 '공간에서'라는 조건과 '평면에서'라는 조건을 구별할 수 있는가를 꾸준하게 평가하고 있으므로, 풀이를 시작하기 전에 평면벡터의 문제인지, 공간벡터의 문제인지를 명확하게 구별하는 것이 필요하다.

[2] 세 벡터가 한 평면에 포함되지 않는 경우 ((가)의 경우)

정사면체 OABC에서
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$
로 두면, (가)의 경우에 해당한다.

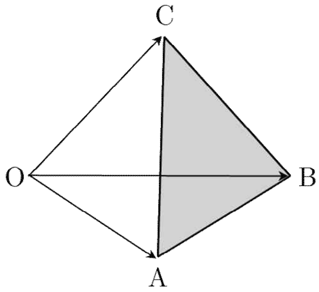


위의 그림에서 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 한 평면에 포함되지 않음은 자명하나, '이보다 까다로운 상황에 대한 대비를 위하여' 위의 상황을 아래의 네 가지의 관점에서 관찰해 보자.

- 평면의 결정조건 • 전개도 • 법선벡터 • 일차결합

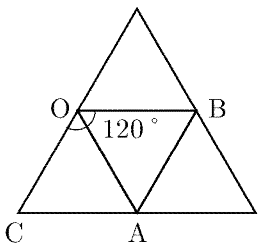
(1) 평면의 결정조건

한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C로 결정되는 한 평면 ABC 위에 점 O가 있지 않으므로, 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 한 평면에 포함되지 않는다.



(2) 전개도

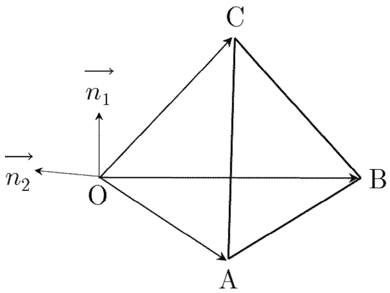
정사면체의 정의에 의하여 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에서 임의로 선택한 두 벡터가 이루는 각의 크기는 60° 이다.



세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 한 평면에 포함된다고 가정하자.

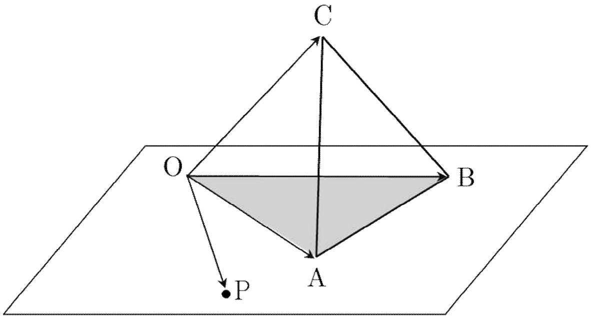
'평면에서' 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$가 이루는 각의 크기가 60° 이면 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$가 이루는 각의 크기는 120° 이다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 한 평면에 포함되지 않는다.

(3) 법선벡터



두 평면 OAB, OAC의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라고 하자. 벡터 $\overrightarrow{n_1}$은 점 C와 삼각형 OAB의 무게중심을 잇는 직선에 평행하고, 벡터 $\overrightarrow{n_2}$는 점 B와 삼각형 OAC의 무게중심을 잇는 직선에 평행하므로, 두 벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$는 서로 평행하지 않다. 즉, 네 점 O, A, B, C는 한 평면 위에 있지 않다. 다시 말하면 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 한 평면에 포함되지 않는다.

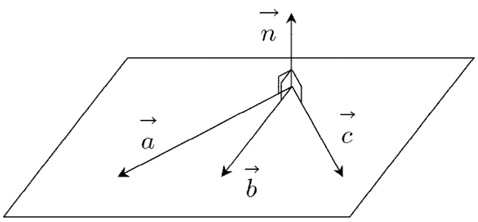
(4) 일차결합



평면 OAB 위의 임의의 점 P에 대하여
$\overrightarrow{OP} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ (일차결합)
인 상수 α, β가 항상 존재한다. (이 명제의 역도 성립한다.)
위의 그림에서 좌표공간을 도입하면
$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$
인 상수 α, β가 존재하지 않음을 보일 수 있다.
따라서 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 한 평면에 포함되지 않는다.

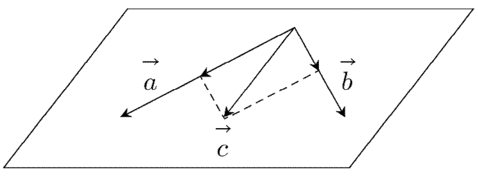
[3] 세 벡터가 한 평면에 포함되는 경우 ((나)의 경우)

(1) 법선벡터



두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 포함하는 평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$,
두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$를 포함하는 평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}$로 두자.
만약 두 벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 서로 평행하면
세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 한 평면에 포함된다. ((나)의 경우)
만약 두 벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 서로 평행하지 않으면
세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 한 평면에 포함되지 않는다. ((가)의 경우)

(2) 일차결합

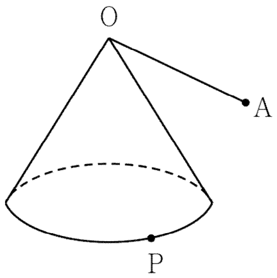


만약 일차결합
$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$

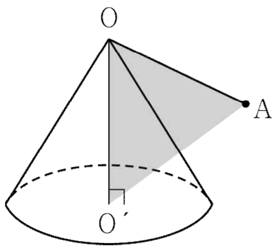
를 만족시키는 상수 α, β가 존재하면 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 한 평면에 포함된다. ((나)의 경우)
만약 일차결합
$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$
를 만족시키는 상수 α, β가 존재하지 않으면 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 한 평면에 포함되지 않는다. ((가)의 경우)

[4] 직원뿔과 공간벡터의 내적의 최대최소 ((나)의 경우)

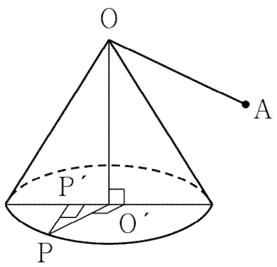
[문제] 꼭짓점이 O인 직원뿔의 밑면의 둘레를 움직이는 점 P에 대하여 두 벡터의 내적
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$
의 값이 최대일 때의 점 P의 위치와 최소일 때의 점 P의 위치를 각각 결정하시오.
(단, 점 A는 아래 그림과 같이 직원뿔의 외부에 있다.)



[풀이]
직원뿔의 밑면(원)의 중심을 O′라 하고, 직원뿔의 정의에 의하여 보조선 OO′를 긋는다.
이때, 점 O에서 직원뿔의 밑면에 내린 수선의 발은 O′이므로, 직선 OO′는 밑면에 대한 법선이다. 다시 말하면 밑면을 결정짓는 법선 OO′를 찾은 것이다. (←보조선은 도형의 결정조건임을 명심하자.)

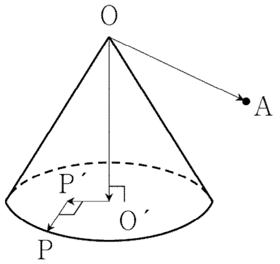


직선 OO′와 점 A로 결정되는 평면 AOO′를 생각하자. (평면의 결정조건 2번) 다시 말하면 직원뿔의 대칭축(입체도형의 결정조건)과 문제에서 주어진 점(조건)을 모두 포함하는 평면을 찾은 것이다.

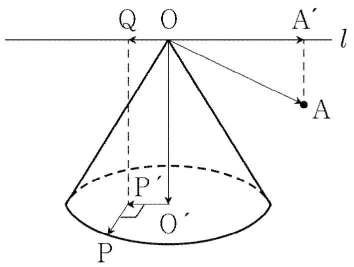


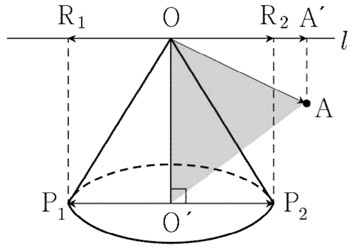
평면 AOO′와 직원뿔의 밑면을 포함하는 평면의 교선을 긋고, 점 P에서 이 교선에 내린 수선의

발을 P'라고 하자. 이때, $\overline{\mathrm{PP}'}\perp \mathrm{AOO}'$이다.
직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{OO}'}\perp\overline{\mathrm{O}'\mathrm{P}'}$, $\overline{\mathrm{OO}'}\perp\overline{\mathrm{P}'\mathrm{P}}$
이므로, 세 직선 OO', $\mathrm{O}'\mathrm{P}'$, $\mathrm{P}'\mathrm{P}$ 중에서 임의로 선택한 두 직선은 서로 수직이다.
세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}}$의 역할은 마치 좌표공간에서 단위벡터 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$의 역할과 같다.

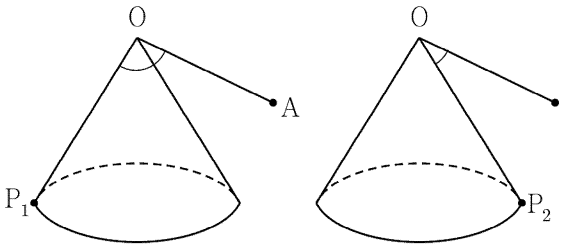


이제 아래와 같은 일차결합을 생각하자.
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO}'}+\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}'}+\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}}$
벡터의 내적의 성질에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OO}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $\cdots(*)$
$\overrightarrow{\mathrm{OO}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 값은 일정하고, $\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 최댓값을 가질 때, $(*)$는 최댓값을 갖고,
$\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 최솟값을 가질 때, $(*)$는 최솟값을 갖는다.
점 O를 지나고 직선 $\mathrm{O}'\mathrm{P}'$에 평행한 직선을 l, 두 점 A, P'에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 A', Q라고 하자.





벡터의 내적의 정의에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$
오른쪽 그림처럼 두 점 P, P'가 일치하는 두 점 중에서 점 A에서 멀리 떨어진 점을 P_1, 점 A에서 가까운 점을 P_2라고 하자. 그리고 두 점 P_1, P_2에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 R_1, R_2라고 하자.
벡터의 내적의 정의에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\le\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\le\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$
이므로, 이를 $(*)$에 대입하여 생각하자.
점 P가 점 P_1에 오면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 최솟값을 갖고,
점 P가 점 P_2에 오면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 최댓값을 갖는다.
이제 $\angle\mathrm{AOP}$의 크기를 관찰하자.



점 P가 점 P_1에 오면 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$는 최솟값을 가지므로
$\angle AOP$의 크기는 최대가 된다.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\underbrace{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|}_{\text{일정한 값}}\cos(\angle AOP)$

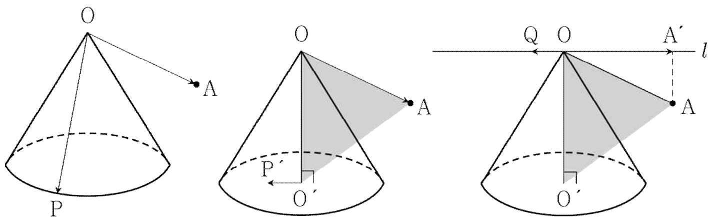
$\geq \underbrace{|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OA}|}_{\text{일정한 값}}\underbrace{\cos(\angle AOP_1)}_{\text{최소}}$

점 P가 점 P_2에 오면 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$는 최댓값을 가지므로
$\angle AOP$의 크기는 최소가 된다.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\underbrace{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|}_{\text{일정한 값}}\cos(\angle AOP)$

$\leq \underbrace{|\overrightarrow{OP_2}||\overrightarrow{OA}|}_{\text{일정한 값}}\underbrace{\cos(\angle AOP_2)}_{\text{최대}}$

위의 풀이과정에서 아래와 같은 관찰도 중요하다.

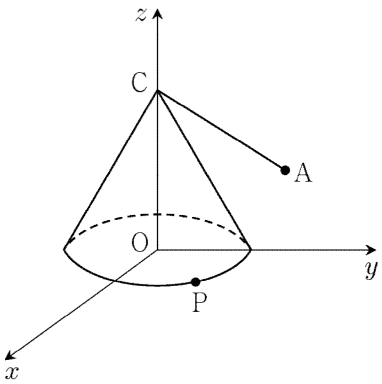


$\underbrace{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}_{\text{3차원(공간)}} \rightarrow \underbrace{\overrightarrow{O'P'}\cdot\overrightarrow{OA}}_{\text{2차원(평면)}} \rightarrow \underbrace{\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA'}}_{\text{1차원(직선)}}$

공간벡터의 내적에 대한 문제는 ‘차원을 낮추어’ 평면벡터의 내적에 대한 문제로 바꾸어야 한다.
이는 공간도형 문제는 ‘단면 관찰하여’ 평면도형 문제로 바꾸는 것과 맥락을 같이 한다.

좌표공간을 도입하여 위의 결과를 확인하자.

[참고]
문제에서 주어진 직원뿔의 꼭짓점을 C, 밑면의 중심을 O라고 하자.
두 점 A, C의 좌표가 각각
$A(0,\ a,\ b)$, $C(0,\ 0,\ c)$
이고, 직원뿔의 밑면의 중심이 원점이 되도록 좌표공간을 도입하자.
(단, $a>0$, $b>0$, $c>0$)
그리고 밑면의 반지름의 길이를 r이라고 하면
점 P의 좌표는 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$이다.
(단, $0\leq\theta<2\pi$)



성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여

$\overrightarrow{CP}=(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ -c)$, $\overrightarrow{CA}=(0,\ a,\ b-c)$

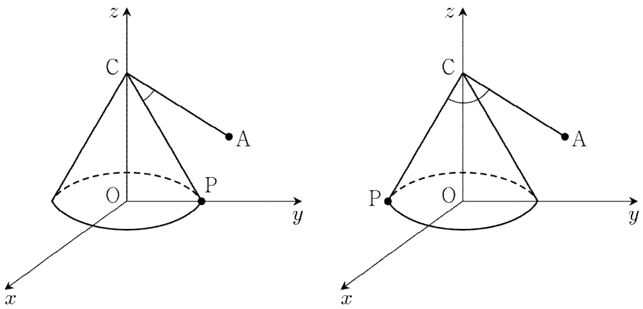
성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=ar\sin\theta-c(b-c)$ $\cdots(*)$

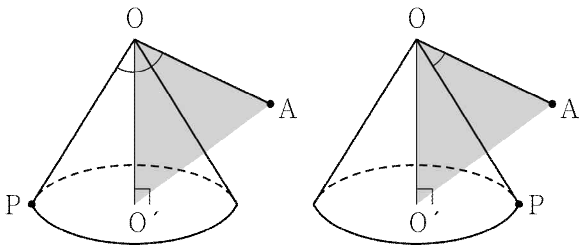
a, b, c, r은 양의 상수이므로

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $(\mathrm{P}(0,\ r,\ 0))$일 때, $(*)$는 최댓값을 갖고,

$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ $(\mathrm{P}(0,\ -r,\ 0))$일 때, $(*)$는 최솟값을 갖는다.



[요약 (각에 대한 관찰)]



위의 그림에서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OO'}$는 고정되어 있으며, 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 크기가 일정한 상태에서 방향이 바뀐다.

직원뿔의 대칭축 OO'와 문제에서 주어진 정점 A로 결정되는 평면 위에 점 P가 놓이면 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$는 최솟값 혹은 최댓값을 갖게 된다. 이때,

$\angle AOP$의 크기가 최대이면 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$는 최소이고, (왼쪽 그림)

$\angle AOP$의 크기가 최소이면 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$는 최대이다. (오른쪽 그림)

일부 문제에서는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OO'}$가 평면의 법선벡터로 주어지기도 한다.

[예제]

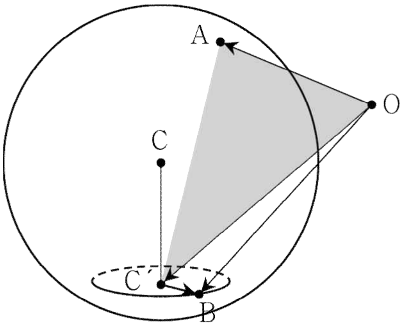
좌표공간에서 구 S: $x^2+y^2+(z-3)^2=4$와 평면 $x-y+z-6=0$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S 위의 점 $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3)$과 원 C 위를 움직이는 점 B에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오. (단, O는 원점이다.) (2015년(10)-수학B30) [4점][1)]

< 이동훈 기출문제집 기하와 벡터 연계 문항 >
T013, T014, T048, T049, T059

아래는 예제에 대한 풀이입니다.

---

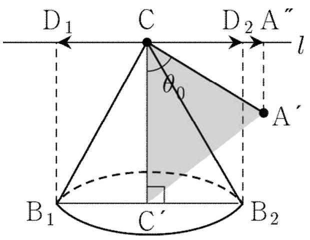
1) [풀이]
구 S의 중심을 C, 원 C의 중심을 C$'$라고 하자.



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OC'}} + \overrightarrow{\mathrm{C'B}})$

$= \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC'}}}_{\text{일정한 값}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'B}}$ $\quad \cdots (*)$

이제 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'B}}$의 최대최소를 생각하자.
한편 직선 CC$'$의 방정식은
$\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{-1} = \dfrac{z-3}{1} (=t)$이므로
점 C$'$의 좌표를 $(t,\ -t,\ t+3)$으로 두자.
점 C$'$는 평면 $x-y+z-6=0$ 위에 있으므로
$t-(-t)+t+3-6=0$ 풀면 $t=1$
점 C$'$의 좌표는 $(1,\ -1,\ 4)$이고, $\overline{\mathrm{CC'}} = \sqrt{3}$
$\overline{\mathrm{CB}} =$(구 S의 반지름의 길이)$=2$
직각삼각형 CC$'$B에서 특수각의 삼각비에 의하여
$\angle \mathrm{CBC'} = 60^\circ$
시점이 C이고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 같은 벡터의 종점을 A$'$,
$\angle \mathrm{A'CC'} = \theta_0$라고 하자.
점 C가 꼭짓점이고, 밑면이 C인 직원뿔을 생각하자.



위의 그림처럼 평면 A$'$CC$'$와 직원뿔의 밑면의 둘레가 만나서 생기는 두 점을 각각 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, 점 C를 지나고 직선 $\mathrm{B_1B_2}$에 평행한 직선을 l이라고 하자. 그리고 세 점 A$'$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 A$''$, $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{D_2}$라고 하자.
벡터의 내적의 정의에 의하여

$\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{C'B_1} \le \overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{C'B} \le \overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{C'B_2}$

(이때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{C'B}$)

이를 (*)에 대입하여 생각하면

점 B가 점 B_1에 올 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$는 최솟값을 갖고,

점 B가 점 B_2에 올 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$는 최댓값을 갖는다.

두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

$\cos\theta_0 = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CC'}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{CC'}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

이므로

$\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{C'B_1} = |\overrightarrow{CA'}||\overrightarrow{CD_1}|\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta_0\right)$

$= \sqrt{13} \times 1 \times \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}\right)$

$\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{C'B_2} = |\overrightarrow{CA'}||\overrightarrow{CD_2}|\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_0\right)$

$= \sqrt{13} \times 1 \times \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$

이를 (*)에 대입하면

$12 - \sqrt{10} \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \le 12 + \sqrt{10}$

($\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC'} = 12$)

따라서 구하는 값은 134이다.

답 134