2일차 과제

1. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2a_n}$의 값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2a_n}\times\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\frac{2+\frac{3}{n}}{na_n}$$

$$=\frac{2+0}{\frac{1}{2}}$$

$$=4$$

$\therefore 4$

2. 수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = -2$일때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}$의 값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}\times\frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{b_n}{a_n}}{1-2\frac{b_n}{a_n}}$$

$$=\frac{2+1}{1-2}$$

$\therefore -3$

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n+a_{n+1}=n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{n+2}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

$$a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2$$
$$-)\ a_n+a_{n+1}=n^2$$
$$a_{n+2}-a_n=2n+1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=2$$

$\therefore$ ⑤

4. 첫째항이 9인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1},\ \sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_{k+1}-a_k} = 2\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

준식 $= -2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+2$ ⇒ 요건 등비수열의 합이여~!

⇓

$$\sqrt{a_{n+1}-a_n} = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$a_{n+1}-a_n = 16\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

대입해.

$$a_2-a_1 = 16\cdot\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$a_3-a_2 = 16\left(\frac{1}{9}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$(+)\ a_n-a_{n-1} = 16\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$\therefore 11$

$$\lim_{n\to\infty}a_n = a_1+\frac{\frac{16}{9}}{1-\frac{1}{9}} = 9+2$$

2일차 과제

5. 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy$를 만족시키고 $f'(0)=-2$일 때, $f'(x)$를 구하면?

① $f'(x)=-2$ ② $f'(x)=-3x-2$
③ $f'(x)=2x-2$ ④ $f'(x)=x^2-2$
⑤ $f'(x)=-x^2-2$

$f(0)=0$ (∵ $x=y=0$ 대입)

$f(x+y)-f(x)=f(y)-3xy$.

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(y)}{y}-3x\right)$$

$f'(x)=f'(0)-3x$

∴ $f'(x)=-3x-2$

6. 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$$

를 만족시키고 $f'(1)=3$일 때, $f(-2)$의 값은?

① -15 ② -10 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

$f(0)=0$ (또 대입!)

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(y)}{y}-x\right)$$

$f'(x)=-x+f'(0)$

$f'(x)=-x+4$

∴ $f(x)=-\frac{x^2}{2}+4x$ (감동 ㅠㅠ)

∴ $f(-2)=-10$.

7. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+3)=f(x),\quad \int_1^4 f(x)dx=2$$

를 만족시킬 때, 정적분 $\int_1^{13} f(x)dx$의 값을 구하면?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

$f(x+3)=f(x)$ 는 주기$=3$.

$$\int_1^{13} f(x)dx = 4\int_1^4 f(x)dx.$$

구간 크기 $=12$

∴ ②

8. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$를 만족시킬 때, 다음 중 정적분 $\int_1^2 f(x)dx$와 그 값이 같은 것은?

① $\int_{2015}^{2016} f(x)dx$ ② $-\int_{2015}^{2016} f(x)dx$
③ $\int_{2016}^{2017} f(x)dx$ ④ $-\int_{2016}^{2017} f(x)dx$
⑤ $\int_{2017}^{2018} f(x)dx$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_{1+4}^{2+4} f(x)dx$$

⋮

$$=\int_{1+4\times 504}^{2+4\times 504} f(x)dx.$$

$$=\int_{2017}^{2018} f(x)dx$$

∴ ⑤

2일차 과제

9. 함수 $f(x)=x+2$에 대하여

$$\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-2}^{2}f(x)dx\right)^2$$

일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

좌변 $=\int_{-2}^{2}(x^2+4x+4)\,dx=2\int_{0}^{2}(x^2+4)\,dx=\frac{64}{3}$

우변 $=k\left(\int_{-2}^{2}(x+2)\,dx\right)^2=64k$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

10. 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=3,\quad \int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-2$$

가 성립할 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

$f(x)=ax+b$

$\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)\,dx=2\int_{0}^{1}ax^2dx$

$\frac{2}{3}a=3 \quad \therefore a=\frac{9}{2}$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{2}x^3+bx^2\right)dx=2\int_{0}^{1}bx^2dx$

$\frac{2}{3}b=-2 \quad \therefore b=-3.$

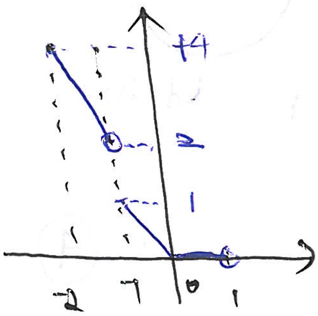
$f(x)=\frac{9}{2}x-3$

$\therefore f(2)=6.$

11. 다음 중 정의역이 $\{x\,|\,-2\le x<1\}$인 함수 $y=x[x]$의 치역의 원소가 아닌 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

$$x[x]=\begin{cases}-2x & (-2\le x<-1)\\ -x & (-1\le x<0)\\ 0 & (0\le x<1)\end{cases}$$



$\therefore$ ③

12. 실수 전체의 집합의 부분집합A에 대하여 함수 f_A를

$$f_A(x)=\begin{cases}2 & (x\in A)\\ 1 & (x\notin A)\end{cases}$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 데로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 집합 A에 관계없이 함수 f_A의 치역은 $\{1,\ 2\}$이다.
ㄴ. $f_{A^c}(x)=3-f_A(x)$
ㄷ. $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ　⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

ㄱ. $A=\phi$ 이면 $f_A(x)=1$ $\therefore$ F

ㄴ. $f_A(x)+f_{A^c}(x)=3.$

x가 누구여도 $f_A(x)=2$ 이면 $f_{A^c}(x)=1$

$f_A(x)=1$ 〃 $f_{A^c}(x)=2$

$\therefore$ T

ㄷ. $x\in A\cap B$ 이면

$2\ne 2+2.$ $\therefore$ F

$\therefore$ ②

13. 수열 $\{a_n\}$이

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$

으로 정의되고 $a_3=10$, $a_{10}=24$일 때, a_{15}의 값은?

① 29 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 35

$a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$ ⇒ 등차수열.

$a_3=10$, $a_{10}=24$, $a_{15}=34$

$7d=14$ $5d=10$

공차

∴ ④

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=50$, $a_{10}=23$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$의 값은?

① 196 ② 234 ③ 478
④ 576 ⑤ 689

$a_1=50$, $a_{10}=23$

$9d=-27$ $d=-3$

$a_n=-3n+53$

$a_{17}>0$, $a_{18}<0$

준식 $=(a_1+\cdots+a_{17})$

$-(a_{18}+\cdots+a_{30})$

$=\frac{50+2}{2}\times17-\frac{-1-37}{2}\times13$

$=689$ ∴ ⑤

15. 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열할 때, C와 D가 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는?

① 60 ② 80 ③ 120
④ 200 ⑤ 300

1st. A, A, A, B, B 나열.

$\frac{5!}{3!2!}=10$

2nd. c, d 자리고르고 나열.

∨1∨2∨3∨4∨5∨

${}_6C_2\times2!=30$

3rd. $10\times30=300$ ∴ ⑤

16. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하여라.

(가) $f(3)$의 값은 홀수이다.
(나) $x<3$이면 $f(x)>f(3)$이다.
(다) $x>3$이면 $f(x)<f(3)$이다.

$f(3)=3$ or 5

① $f(3)=3$이면

$f(1)$, $f(2)$는 4, 5, 6 中 택.

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$은 1, 2 中 택

$3^2\times2^3=72$

② $f(3)=5$이면

$f(1)$, $f(2)$는 6 고정

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$은 1, 2, 3, 4 中 택

$4^3=64$

$72+64=136$ ∴ 136

17. $\left(x+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$ 의 전개식에서 상수항이 존재하도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구하여라.

$\left(x+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$ 에서 차수만 봐.

r번 10-r번

10-r번 r번

$x^r \times (x^{-n})^{10-r} = x^{r-10n+nr}$

변수로군, 미안. 바꾸자.

$x^{10-r} \times (x^{-n})^r = x^{10-(n+1)r}$

$(n+1)r=10$ 이므로 약수중

최대인 n은 9 ∴ 9.

18. $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x의 계수는?

① 11 ② 22 ③ 33
④ 44 ⑤ 55

$${}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_{10}C_1 = {}_{11}C_2$$

난, 하키스틱 싫어해.

$${}_rC_r + {}_{r+1}C_r + \cdots + {}_nC_r = {}_{n+1}C_{r+1}$$

$${}_rP_r + {}_{r+1}P_r + \cdots + {}_nP_r = \frac{1}{r+1}\,{}_{n+1}P_{r+1}$$

요게 더 조아.

19. 빨간 공 3개와 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 집어넣는 것을 1회 시행이라 하자. 빨간 공이 나오면 1점, 노란 공이 나오면 2점을 얻을 때, 5회의 시행에서 7점을 얻을 확률은?

① ${}_5C_1\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^4$ ② ${}_5C_2\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)^3$

③ ${}_5C_3\left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{7}\right)^2$ ④ ${}_5C_4\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)$

⑤ ${}_5C_5\left(\frac{4}{7}\right)^5$

공 딱 빨간공 3번, 노란공 2번이지.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^3 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times {}_5C_3$$

∴ ③

20. 3부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 8개의 공이 들어있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 소수가 적힌 공이면 동전을 3번, 짝수가 적힌 공이면 동전을 4번 던진다. 이때 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구하여라.

배반이야.

① 소수 나와서 3번 던질 때,

$$\frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

② 짝수 나와서 4번 던질 때,

$$\frac{4}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} \times {}_4C_3$$

$$①+② = \frac{3}{64} + \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{11}{64}$$