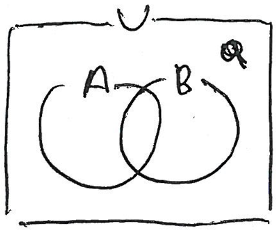
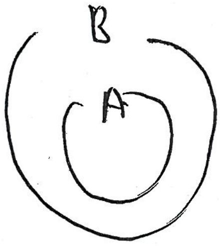
1일차 과제

1. 지우네 반 학생 35명 중에서 영어를 좋아하는 학생은 21명, 수학을 좋아하는 학생은 27명이다. 이때 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.



$a=0$ 일때

$n(A\cap B)$ 최소 : 13.



일때 $n(A\cap B)$ 최대.

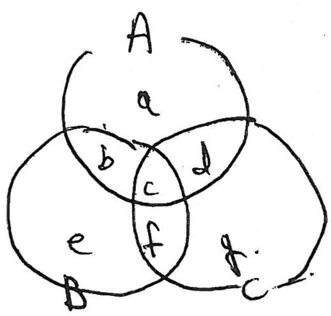
21.

2. 두 집합 X, Y에 대하여 연산 $\triangle$를

$$X\triangle Y=(X-Y)\cup(Y-X)$$

로 약속할 때, 세 집합 A, B, C가 $n(A\cup B\cup C)=65$ $n(A\triangle B)=36$, $n(B\triangle C)=38$, $n(C\triangle A)=32$ 를 만족시킨다. 이 때 $n(A\cap B\cap C)$를 구하여라.

12.



$a+b+c+d+e+f=65$

$a+d+e+f=36$

$b+e+d+g=38$

$a+b+f+g=32$.

다 더하면 $\cancel{2}(a+b+e+d+f+g)=\cancel{106}\ 53$

이므로.

$c=12$.

3. 양수 x, y에 대하여 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)$은 $xy=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

$xy+\frac{16}{xy}+10$ 에서

산술기하 평균에 의해. $xy=\frac{16}{xy}$ 일때

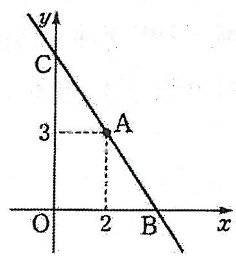
최소값이다. $(xy)^2=16$ 에서

$x>0$, $y>0$ 이므로 $xy=4$ 이고.

$b=18$ $a=4$.

$\therefore\ a+b=22$.

4. 아래 그림과 같이 좌표평면 위의 점A(2, 3)을 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 OBC의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$이다.)



$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$ 이고. $B(a,0)$ $C(0,b)$이므로

$\triangle OBC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$.

산술기하 평균에 의해

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{b}}=2\sqrt{\frac{6}{ab}}$

$ab\geq 24$.

$\therefore\ \frac{1}{2}ab=12$.

5. 두 집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여
$a\in A$, $b\in A$이고 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수
$f:A\to B$ 중에서 $f(1)f(4)=12$를 만족시키는 함수의 개수는?

① 60　　② 65　　③ 70
④ 75　　⑤ 80

i) $f(1)=2$ $f(4)=6$.

$_5H_2=15$ $\times$ $_2H_2=3$ $=45$

ii) $f(1)=3$ $f(4)=4$

$_2H_2=3$. $\times$ $_4H_2=10$ $=30$.

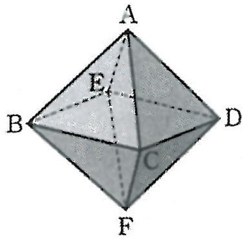
i) + ii) $=75$.

6. 다항식 $(a+b+c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

$a^p b^q c^r$ 에서 $p+q+r=5$ 이므로.

$_3H_5=21$.

7. 아래 그림과 같은 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 움직여 꼭짓점 F에 도착하는 방법의 수를 구하여라. (단, 한 번 지나간 꼭짓점은 다시 지나지 않는다.)



수형도를 그려보자.

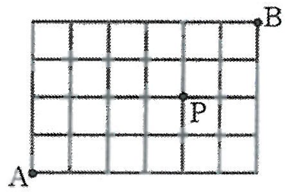
A→B
- C
  - D—F.
  - F
- E
  - D
    - C—F
    - F
  - F
- F

이고.

B · C · E–D는 대칭이므로

7×4 이다.

8. 아래 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



i) A→P

$\frac{6!}{4!2!}=15$

ii) P→B.

$\frac{4!}{2!2!}=6$. 이므로

A→P→B = 90 가지

9. 원소가 6개인 집합을 4개 이상의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구하여라.

i) $S(6.4) = 65$.

ii) $S(6.5) = 15$

iii) $S(6.6) = 1$

이므로 . 81가지.

10. 승객 6명이 타고 있는 버스가 세 정류장 A, B, C에 정차한다. 3개의 정류장 A, B, C 중에서 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구하여라. (단, 새로 타는 승객은 없다.)

i) 내릴 정거장 정하기 $= {}_3C_2$.

ii) 분할, 분배.

① 1명, 5명 ${}_6C_1 \times {}_5C_5 = 6$

② 2명, 4명 ${}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15$

③ 3명, 3명. ${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 10$.

$6+15+10=31$. 이고

정류장 분배 $2!$ 이므로.

$3 \times 2! \times 31 = 186$.

11. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+2}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하여라.

역수를 취하여 보면.

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}$ 이고.

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}n + \frac{5}{2}$ 이다.

$a_n = \frac{2}{n+5}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 2$ 이다.

12. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n\ (n=1,2,3,\cdots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}-4}{a_n}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$.

$= 1 + \frac{2^{n-1}-1}{2-1} \cdot 2$.

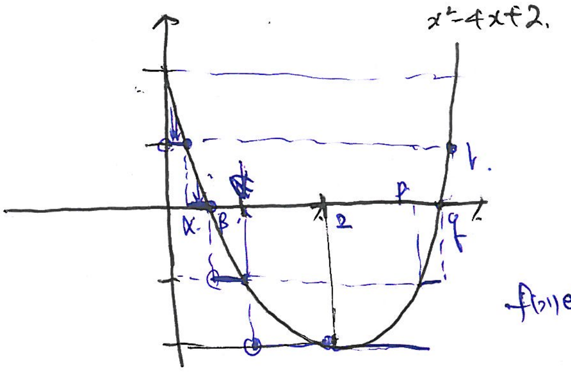
$= 2^n - 1$. 이므로

답: 4

1일차 과제

13. $0<x<4$일 때, 함수 $f(x)=[x^2-4x+2]$가 불연속이 되는 모든 x의 값의 합은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 4　　② 8　　③ 12
④ 16　　⑤ 18



f(x)의 그래프는

다음과 같고, 불연속 점들의 합은

α+β+γ+p+q+r 이다.

대칭성을 이용하면. 4+4+4=12이다.

14. 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$가 있다.

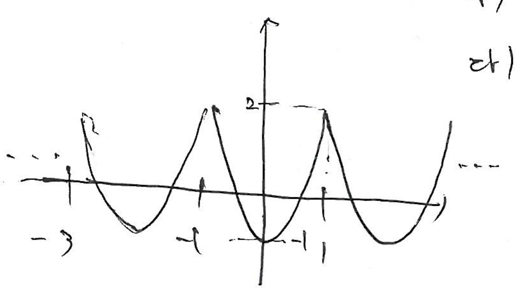
(가) $-1\le x\le 1$일 때, $f(x)=3x^2-1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$

이때 $0\le x\le 6$에서 함수 $y=[f(x)]$가 불연속이 되는 x의 값의 개수를 구하여라.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

그래프를 그려보자.

나) x=1 선대칭 표현.

다) y축 대칭.



이다.

13번과 마찬가지로 그려보고 대칭성을 이용해

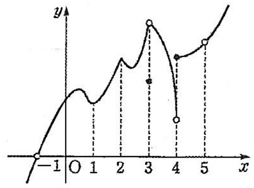
따져보면 15개이다.

15. 다음 중 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는?

① $f(x)=3$
② $f(x)=|x|^3$
③ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$
④ $f(x)=x+|x|$
⑤ $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x\ge 0)\\ 2x+1 & (x<0)\end{cases}$

'첨점'을 가진 그래프는 ④이다.

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 구간 $(-1,\ 5)$에서 함수 $f(x)$에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?



① 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개다.
② 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 3개다.
③ $f'(x)=0$인 점은 2개다.
④ $f'(0)>0$이다.
⑤ $\lim_{x\to 3}f(x)$의 값이 존재한다.

③ 에서 f'(x)=0 인점은

그래프에서 3개 존재하므로 오답.

17. 함수 $f(x)=[x]\cdot(x^2+ax+b)$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$x=1^+$ 일때 $[x]=1$ 이고. $f'(x)=2x+a$ 이므로.

우미분계수 $=2+a$

$x=1^-$ 일때. $[x]=0$ 이므로.

좌미분계수 $=0$ 이다.

$\therefore$ $2+a=0$ 이고. $a=-2$.

미분가능 연속성도 따져주면. $b=1$.

$a^2+b^2=5$

18. 두 곡선 $y=x^3+ax$, $y=2(x^2+2)$가 한 점에서 접할 때, 상수 a의 값은?

① -7　　② -5　　③ -3
④ 3　　⑤ 5

$x=t$ 에서 접한다고 하면.

$t^3+at=2t^2+4$ 이고, $3t^2+a=4t$.
(미분계수).

두식을 연립하여 a를 소거하고

t를 결정하면 $t=-1$.

따라서 $a=-7$ 이다.

19. 두 곡선 $f(x)=x^3$, $g(x)=2ax^2-bx$가 점 $(1, 1)$에서 만나고, 이 점에서의 접선이 서로 수직일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3　　② $-\frac{7}{3}$　　③ $-\frac{5}{3}$
④ -1　　⑤ $-\frac{1}{3}$

$2a-b=1$ 이고.

$f'(1)\times g'(1)=-1$ 이므로.

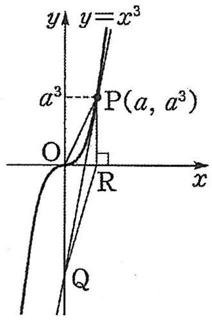
$3\times(4a-b)=-1$.

두식을 연립하면.

$a=-\frac{2}{3}$ $b=-\frac{7}{3}$.

$\therefore$ $a+b=-3$.

20. 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $P(a, a^3)$ 에서의 접선과 y축이 만나는 점을 Q, x축에 내린 수선의 발을 R라 할 때, 삼각형 OPQ 와 삼각형 PQR 의 넓이의 비는? (단, $a>0$이고, O는 원점이다.)



① $2:1$　　② $5:2$　　③ $3:1$
④ $3:2$　　⑤ $4:3$

P에서의 접선의 방정식은

$y=3a^2(x-a)+a^3$ 이므로.

$Q(0,-2a^3)$ 이다.

$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\cdot 2a^3\cdot a=a^4$

$\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot a^3\cdot a=\frac{1}{2}a^4$ 이므로.

$\triangle OPQ:\triangle PQR=a^4:\frac{1}{2}a^4=2:1$ 이다.