



신재민의 수학공간 수학 영역

1

중위권을 위한 문제풀이법
- 4점문제를 풀어내자 -

안녕하세요 신SUN입니다.

이번 글은
중위권 학생들을 위한 매우 실전적인 문제를 푸는 방법에 대해서
얘기해드리려고 왔어요.

상위권 학생들은 가볍게 읽고 '맞아 내가 잘하고 있네'
확인만 하시면 되고,
중위권 분들은 눈 단디 뜨고 보세요.

리얼 개꿀일테니까.

'드디어 개념끝났다!' 하고 문제풀이에 박차를 가하는 여러분들
'6평 끝났다! 근데, 문제를 많이 안 풀어서 점수가 안 나온 것 같아.' 하며
바로 문제 문제! 하시는 분들

어때요?
풀어보니, 잘 풀리던가요?

대부분의 학생들이 이러시겠죠.

'개념은 알겠는데, 왜 대체 문제를 풀려고 하면 잘 안되는거야?
'3점문제는 이제 어느정도 되는데. 4점문제 왜케 어려워'

왜 이럴까요?

여러분, 생각해 보세요.

물론 틀린 문제의 답지를 보거나, 인강 들으면서
그 문제의 풀이방법을 아는 것도 중요한데

본인이 스스로 문제를 풀 수 있게 되야 하는거 아니에요?

기출말고,
처음보는 문제를 풀어내야 하는 거 아니냐구요.

그럼 문제를 푸는 순간에, 대충 의식의 흐름속에서 푸는 게 아니라
어떻게 푸는지 그 방법을 알아야 할 거 아닌가요?

여러분들 영어, 국어 지문 읽을 때 그냥 훑 읽고 생각없이 문제 푸나요?

본인만의 방법으로 열심히 읽고 생각하고 하잖아요.

마찬가지야

수학은 진짜 실시간으로 **생각하면서 풀어야** 하는데

여러분들이, 이 걸 안해.

그래서 풀어서 틀리고 답지 보고 알아도,
시간이 흐른 뒤에 다시 풀어보면 또 못 풀어.

왜?

**이 전에 내가 어떤 생각을 못해서 틀렸는지를 학습하지 않고
그냥 생각을 안하고 답지의 풀이법을 기억하려고만 하니까.**

안된다구요

본인이 개념공부를 열심히 했다하더라도

**실제로 문제 풀 때 배운 개념을 어떻게 활용해서 문제를 보고,
내가 어떤 행동을 취하면서 문제를 풀지 생각을 안하고 푸니까**

문제가 잘 안 풀리는 거예요.

부족한 부분을 메꾸면서 하지 않으니까요
밑 빠진 독에 물이 조금씩 채워지긴 하는데,
노력한 만큼 빠르게 채워지질 않는거죠

여러분은 제대로 문제 풀고 계신가요?

생각 하면서 풀고 계시냐는 말이에요.

'생각이야 당연히 하죠, 근데 생각해봤는데 모르니까 문제죠'
'흠... 좀 기계적으로 풀려고만 하는 것 같긴 한데요..'

본인이 어떻게 문제를 풀고있는지,
결국 문제를 어떻게 풀어야 하는지, 풀면서 무슨 생각을 해야 하는건지

이 글에서 배우고 가보자구요.



여러분이 해야 할 것

수학 공부하는 시간 중에 일부를 내서, 교과서 한 번씩만 보면서 내용정리

+ 문제 풀면서, 내가 해야 할 행동방식 생각 및 정리

교과서를 보면서 내용 정리 하는 건 무엇을 얘기인건가?

교과서의 학습목표를 꼭 읽으면서, 이 단원을 왜 배우는지 꼭 생각해보고

용어 및 내용 확실히 이해(암기) 하기.

기본적인 겁니다. 예를 들어볼까요?

1. 급수는 부분합의 극한값으로 생각한다.
(교과서에 있는 모든 급수에 관한 정리는 다 부분합의 극한으로 증명하고 있다.)

2. 함수의 증가 감소를 f' 의 관점으로 본다면 f' 의 부호로 판별한다.
그리고 f 함수에서 극값이 존재하려면, f 가 미분가능 하다고 할 때 $f' = 0$ 이 되는 점에서 좌,우의 f' 의 부호가 바뀌어야 한다. 꼭 체크

3. f 가 우함수라면 $f(x) = f(-x)$ 이고, y 축 대칭이고, f' 은 기함수이고, 우/기 함수를 판별하려면 $x \rightarrow -x$ 대입해서!

등등..

자세하게 알고계셔야 한다는 거예요.

그리고 꼭 '교과서에 수록되어있는 정의' 한 번씩 해보고 따져봐야 해요.
대체 무슨 과정을 거쳐 증명이 되는지.
단순암기 NO

예를 들어볼까요?

대충공부:

함수의 극한 단원에서 극한 꼴이 $\frac{\infty}{\infty}$ 일 때, 최고차항의 계수의 비

이렇게 알고 계신 분들에게
저거 왜 그런거야? 하면 얘기를 못해요

NONO 그러면 안됩니다.
원리를 알고 가시란 얘기에요.

모범답안:

함수의 극한을 계산하기 위해선, 극한 기본성질을 이용해서 구해야 하는데 이 기본성질은 함수가 수렴하는 경우에서만 가능하죠.

그러므로 $\frac{\infty}{\infty}$ 은 분모, 분자 모두 발산하는 형태이므로 쓸 수가 없어요.

그럼 어떻게 해야 수렴하는 형태로 바꿀 수 있을까?

아, 최고차항으로 분모 분자를 똑같이 나눠보자! 그럼 수렴할 수 있겠다!

따로 시간내서, 개념을 볼 때
이런 생각들! 해야 해요.

그냥 주먹구구식 공부 + 많은 문제를 풀기 는 분명 한계가 와요.

Killer 문제를 제대로 풀 수 없단 말입니다.

이렇게 생각하는 연습이 되어있어야, 궁극적으로

실제로 문제를 풀 때에 문제에 조건을 보고

'무슨 생각을 해야 하는지, 그 과정에서 어떤 추론을 하여 내가 알고 있는 개념과 접목시켜 뭘 써먹을 것인지!' 가 된단 말입니다.

참고로,

제가 기출문제 푸는 법에서 알려드린 STEP을 밟아가며
문제를 본격적으로 풀기 전에 어떤 개념을 써야할까 고민하고 들어가시면,

더 빠르게 사고하는 법을 익힐 수 있습니다.

그러면 문제를 풀면서는 어떻게 해야하나?

마치 문제와 얘기하듯 풀면서, 조건들을 보고 교과서를 통해 공부한 내용에 맞춰 해석하고, 하나씩 따지고 생각하면서 어떻게 개념을 활용할지 추론하면서 푼다.

문제에 주어진 조건을, 스스로 생각하면서

'엇 이 조건은 이렇게 정의되는데, 그럼 이 생각을 할 수 있겠지?
그렇다면 이 식을 결과적으로 써야겠구나!'

라고 말이에요.

예를들어,

'극값이 존재하지 않다' 라는 조건:

'엇 극값 존재하는 게 함수의 증감이 바뀌고, 그 애긴 도함수의 부호가 바뀌어야 하는것이니까, 반대로 극값이 존재하지 않으려면 증감이 바뀌지 않고 도함수의 부호도 바뀌지 않는거구나! 그 말은 증가함수 or 감소함수 이구나
다른 조건을 보니 증가함수 이구나! 그럼 난 결국 $f' \geq 0$ 이란 식을 써서 문제를 풀면되겠구나!'

라고 생각할 수 있어야 됩니다.

안해보셨다구요? 어려워 보인다구요?

어렵죠. 해본적이 없으니.

이 생각하는 연습을 충분히 하고 익숙해져야,
나중에 낯선 Killer 문제들을 풀 때도 이렇게 생각할 수 있게 되는데..

해야하지 않겠어요?

자, 말로만 얘기하니 좀 두루뭉술해 보이죠?

본격적으로 문제를 보면서 얘기해보죠.



Q. 이제 본격적이야?

A. 그래도 배워가는게 있을텐데 끝까지 보시죠~

제가 문제를 그냥 풀지않고,
조건을 해석하고 무슨 개념을 써먹을지 추론하는 과정을
시뮬레이션으로 보여드릴테니
보면서 '응 알아' 이러지 마시고 직접 해보시길 바랍니다.

28. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2x \int_0^1 f(t)dt$$

일 때, $f(0) = a$ 라 하자. $60a$ 의 값을 구하시오. [4점]

시뮬레이션

음.. 적분-미분 관계를 묻는 문제가 나왔네. 자주 보긴했어
두가지를 알아야하지. 1) 양변 미분 2) $x = 0$ 대입

미분을 해보니 $f(x) = 3x^2 - 4x - 2 \int_0^1 f(t)dt$ 가 되는구나.

$\int_0^1 f(t)dt$ 가 문제인데,

이 건 결국 정적분 값인 상수로 나오기 때문에 c 라고 봐도 돼!

$\therefore f(x) = 3x^2 - 4x - 2c$ 이고, $f(x)$ 를 $\int_0^1 f(t)dt = c$ 에 대입하면 끝!

이 문제는 쉬웠기 때문에 다 풀 수 있었겠지만,

생각! 추론! 에는 항상 근거가 있게!

다음 문제 보조. 풀고 보면 효과가 2배!

21. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a 의 최솟값은?

[4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

시뮬레이션

음.. 삼차함수 $f(x)$ 가 주어졌고 또 미분-적분 관계 문제이네

1) 양변 미분, 2) $x = 0$ 대입해야지

$F'(x) = f(x)$ 이고, $F(0) = 0$ 이야.

오직 하나의 극값을 가지라고 했고, 양수 a 의 최솟값이래.

그 말은 a 가 될 수 있는 수가 많나본데?

그 중 가장 작은 거 구하는 거구만

오직 하나의 극값? 이 건 $f(x)$ 가 다항함수니까 $F(x)$ 도 다항함수 이고,
다항함수는 모든 x 에 대해서 미분 가능 하지.

따라서 $F'(x) = 0$ 인 점에서 좌우 도함수 부호가 변화되는 곳이 딱 1개만
있어야 한다는 거네. 오케이

$F'(x) = f(x) = x^3 - 3x + a$ 일 때, $F'(x) = 0$ 이므로

방정식 $x^3 - 3x + a = 0$ 을 만족하는 실근이 딱 1개 있어야 한다.

이거 풀면 끝이죠. 근데 방정식에서 실근을 묻는 문제는

함수의 형태로 바뀌어서 만나는 교점의 x 좌표를 구하라고 교과서에서 나와있어.

$y = x^3 - 3x, y = -a$ 그래프 그려서 풀면 끝!

제가 계속 이거면 이거니까 저렇게 생각해야지 라면서
근거를 붙이려고 노력하는거 보이세요?

어떤식으로 문제를 푸는 연습을 해야할지
좀 감이 오세요?

그냥 푸는 법을 배우는게 아니라, 철저하게 조건을 보고 무슨 생각을 해야하며,
그 과정에서 어떤 추론을 통해 결국 난 뭘 해야 하는지

이 과정을 정리하고 학습하셔야 한다구요!

한 문제만 더 보조

21. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을
만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0) = -3$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $6x - 6 \leq f(x) \leq 2x^3 - 2$ 이다.

- ① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

시뮬레이션

최고차항 계수가 1이라고 주어진 다항함수네. 그리고 $f(3)$ 을 물어봤으니
함수를 결정하는 문제네. 근데 몇차 함수인지 모르니, 차수부터 결정해야겠다.

$f(x) = x^n + \dots$ 되겠지.

(가) 조건 됐고, (나) 조건 파악 하는게 핵심이구만.

저 절대부등식은 뭘 얘기하는 거지.

잠깐, 모든 양의실수 x 에 대해서 $f(x) \leq 2x^3 - 2$ 라는 건,

$f(x)$ 가 3차 이하의 함수라는 거 아닌가.

왜냐면, x 가 아무리 커져도 $f(x) \leq 2x^3 - 2$ 되야하는데 $f(x)$ 가 4차함수가

되어버리면 분명히 나중에 $2x^3 - 2$ 보다 큰 함수값이 있을 거 아냐. 맞네.

$f(x)$ 는 3차 이하의 함수.

근데, 그 다음 모르겠다.

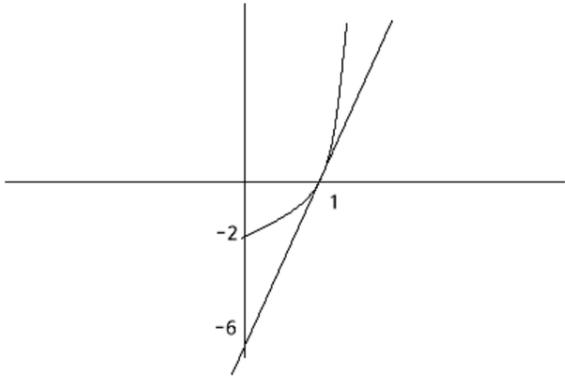


내가 교과서에서 배운 건, $f(x)$ 의 조건이 부등식으로 주어질 때, 샌드위치 정리 쓰는 것만 알고 있는데, 샌드위치 정리 쓰려면 맨 오른쪽 극한이 같아야 하는데 극한이 같아지게끔 식을 변형 해야하나..

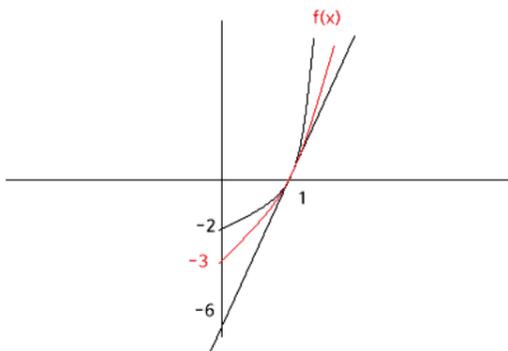
아 정확히 모르겠으니

우선 주어진 함수 $6x - 6, 2x^3 - 2$ 를 그려보자.

$x = 1$ 에서 둘다 함숫값이 0 이고 미분계수가 6으로 똑같아서 이렇게 그릴 수 있어.



그리고, 양의 실수 x 에 대해서 $f(x)$ 가 저 두 그래프 사이에 있어야 하니까 잘은 몰라도 $f(x)$ 가 이렇게 그려지겠다.



그리고, $f(x)$ 는 미분가능한 다항함수이고, 저 두 그래프 사이에 존재해야 하기 때문에, 사실 직관적으로 $f'(1) = 6$ 임을 알 수 있어 만약 수식적으로 보여준다고 한다면, (나)조건을 식을 변형하여 샌드위치로 보여줄 수 도 있지만, 그래프만 봐도 확인 가능해.

그럼 이제 3차이하의 함수 중에 몇 차 함수 여야 되는지 확인하면 끝!

1차함수면 안되고, 2차함수면 되나?

문제 조건에 따라 $f(x) = (x+3)(x-1)$ 임을 알 수 있고 $f'(1) = 4$ 이니까 안 되네!

결국 3차 함수 라는 것이군. 주어진 조건에 의해 $f(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$ 이겠다. 끝

계속 끊임없이 문제와 얘기하면서 생각.

이게 핵심입니다.

여기서 학생들이 실수 많이 하는 것! 주의해야할 점

습관적으로 (나) 조건 보고 미분을 그냥 해버리는 경우가 있어요.

$6 \leq f'(x) \leq 6x^2$ 이렇게 구해놓고 응? 뭐지 계속 이상한 생각한다구요

애초에 부등식, 방정식에선 미분하면 절대 안돼!

$x^3 = 5$ 를 양변 미분해봐 안되는 거 알겠죠? 얘기 안해도

그리고, 자꾸 식으로만 풀고 생각하는 것에 익숙한 친구들도 이 문제 잘 못풀었을 거예요.

함수가 나오면 항상 그래프 해석!

꼭 잊지map시다.

자 몇 문제 풀어보면서, 중위권 학생들이

문제를 제대로 풀기위해선 어떻게 해야하는 지 학습해 보았어요.

최대한 여러분의 입장에서 이해가 되게 시뮬레이션을 돌려봤는데 어떨지 모르겠네요.

이해 안되는 부분 있으면 언제든지 댓글~

부디 여러분에게 조금이나마 도움이 되길 바라며

여러분 후회스럽지 않게 공부합시다.

여러분의 수능 날까지 함께 하겠습니다.

