5일차 과제

1. $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ 의 값은?

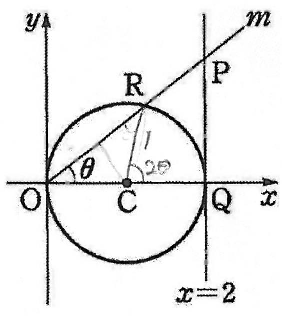
① 0 ② $\frac{\pi}{180}$ ③ $\frac{1}{\pi}$
④ 1 ⑤ $\frac{180}{\pi}$

$\lim_{★\to 0}\frac{\sin ★}{★} = 1$ 이므로.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ 이다.

★ 구조를 봅시다.

2. 아래쪽 그림과 같이 중심이 C(1, 0)이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 직선 $x=2$가 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선 m과 만나는 점을 P, x축과 만나는 점을 Q라 하고, 직선 m이 원과 만나는 원점이 아닌 점을 R라 하자. 직선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ, 호 RQ의 길이를 l이라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{PR}}{l^2}$ 의 값을 구하여라.



보조선 $\overline{CR}$을 이어보면 $\angle RCQ = 2\theta$ 임을 알수있다.

따라서 $l = 2\theta$ 이고 $\overline{PR} = \overline{OP} - \overline{OR}$

$\overline{OP} = 2\sec\theta$, $\overline{OR} = 2\cos\theta$ 이므로

$\overline{PR} = \frac{2}{\cos\theta} - 2\cos\theta = 2\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$ 이므로.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{PR}}{l^2} = \frac{\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}}{4\theta^2} = \frac{1}{2}$

3. 함수 $f(x) = 4\cos x - \cos 2x$ $(0 < x < 2\pi)$는 $x=a$에서 극솟값 b를 갖는다. 이때 ab의 값은?

① -5π ② -2π ③ 0
④ 2π ⑤ 5π

$f'(x) = -4\sin x + 2\sin 2x$

$= -4\sin x + 4\sin x\cos x = 4\sin x(\cos x - 1)$ 에서

$\sin x = 0$ 일때 or $\cos x = 1$ 일때 $f'(x) = 0$으로

극값을 갖는다. 이때, π에서 부호가

(−)에서 (+)로 변화하므로 $x=\pi$ 일때

극소값을 가진다.

$\therefore f(\pi) = -5$. $a = \pi$ 이므로.

$ab = -5\pi$.

4. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=6$ 으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이의 최솟값을 구하여라.

$f(x) = \sqrt{x}$ 이고 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이다.

P의 좌표를 $P(t, \sqrt{t})$라하면, 접선의 방정식은

$y - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t)$ 이다.

$x=2$ 일때 $y = \frac{t+2}{2\sqrt{t}}$ 이고,

$x=6$ 일때 $y = \frac{6+t}{2\sqrt{t}}$ 이다.

사다리꼴의 넓이는 $2\left(\frac{4}{\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right)$로 표현되고,

$t > 0$ 이므로 '산술기하 평균'을 이용하여

최소값을 구하면, $\frac{4}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \geq 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}} = 4$

5일차 과제

5. 정적분 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ 의 값과 반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 같을 때, r의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$

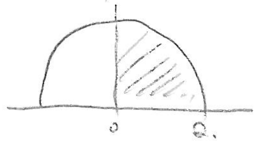
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

* $\sqrt{a^2-x^2}$ 일때는 $x=a\sin\theta$ or $\cos\theta$ 치환

$\sqrt{a^2+x^2}$ 일때는 $x=\tan\theta$ 치환으로.

'삼각치환'을 익혀둡시다.

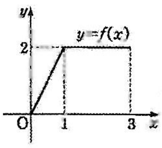
* 해당문항은 '반원' 해석하여.



색칠된 면적이므로

π이고 $r=1$ 이다.

6. $0 \le x \le 3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 정적분 $\int_0^2 e^x f(x+1)\,dx$의 값을 구하면?



① $2e^2-2$ ② $2e^2$ ③ $2e^2+1$

④ $3e^2-2$ ⑤ $3e^2-1$

* 평행 이동을 활용 하기.

$\int_0^2 e^x f(x+1)\,dx = \int_1^3 e^{x-1} f(x)\,dx$ 이고.

$f(x)$는 주어진 그래프에서 상수함수로서.

$1 \le x \le 3$ 에서 $f(x)=2$.

$\int_1^3 e^{x-1} f(x)\,dx = \frac{2}{e}\int_1^3 e^x\,dx$.

이므로 $2(e^2-1)$

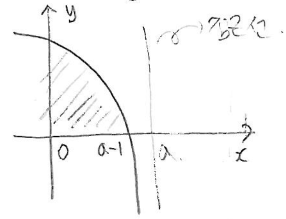
7. 곡선 $y=\ln(a-x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$)

① $\frac{1}{2}e$ ② e ③ $2e$

④ e^2 ⑤ $2e^2$

$dx = -d(-x)$

$= d(x-a) = d(x-2)$



주어진 면적은 $\int_0^{a-1} \ln(a-x)\,dx$ 로 표현되고

$\int_0^{a-1} \ln(a-x)\,dx = -\int_0^{a-1} \ln(a-x)\,d(a-x)$ 이므로

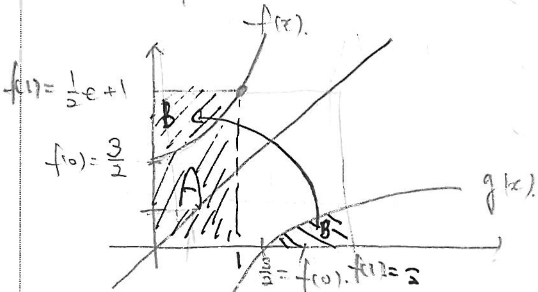
$= -\left[(a-x)\ln(a-x)-(a-x)\right]_0^{a-1} = 1$ 이므로. 계산하면.

$\therefore a=e$.

8. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}e^x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x)\,dx$의 값을 구하여라.

* 그래프를 그려보자.



$y=x$ 대칭이므로. $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x)\,dx$ = f(x)와

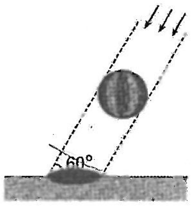
$y=\frac{1}{2}e+1$, $y=\frac{3}{2}$ 과 y축이 이루는 넓이와 같다.

따라서 주어진 넓이 A+B는 직사각형

넓이 이므로. $1\times(\frac{1}{2}e+1)$이다.

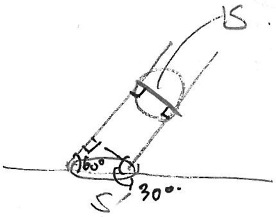
5일차 과제

9. 아래쪽 그림과 같이 구 모양의 애드벌룬이 하늘에 떠 있다. 태양이 지면과 $60°$의 각도로 비출 때, 지면 위에 생긴 애드벌룬의 그림자의 넓이는 $8\sqrt{3}\pi m^2$이다. 이때 애드벌룬의 반지름의 길이는 몇 m인지 구하여라.



* 정사영은 대상면이 수직입사하는 면이다.

정사영 ≠ 그림자 임을 명심하자.



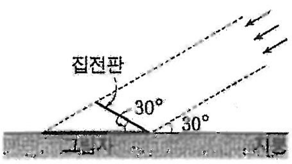
$S'\cos 30° = S$ 이므로.

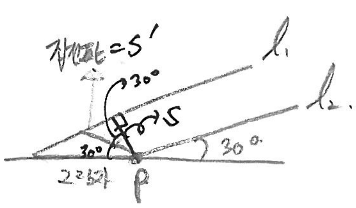
$S = 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$.

이고 $r = 2\sqrt{3}$.

10. 아래쪽 그림은 지붕과 $30°$의 각을 이루면서 설치되어 있는 태양열 집전판과 그 그림자를 나타낸 것이다. 지붕이 태양 빛과 이루는 각의 크기가 $30°$일 때, 지붕 위에 생긴 집전판의 그림자의 넓이가 21이다. 태양열 집전판의 넓이는?

① $3\sqrt{3}$　② $4\sqrt{3}$　③ $5\sqrt{3}$
④ $6\sqrt{3}$　⑤ $7\sqrt{3}$





p에서 l_1이 수선의 발을

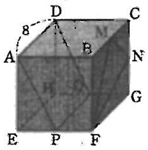
내리면 S가 우리가 찾아야할 정사영이다.

그림자의 넓이는 21이고 $21\cos 60° = S$ 이므로

$S = \frac{21}{2}$ 이고 $S'\cos 30° = \frac{21}{2} = S$ 이므로

$S' = 7\sqrt{3}$ 이다.

11. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8인 정육면체에서 네 모서리 EF, GH, BC, CG의 중점을 각각 P, Q, M, N이라 할 때, $\triangle FNM$의 평면 $APQD$ 위로의 정사영의 넓이는?



① $\frac{24}{5}$　② $\frac{24\sqrt{2}}{5}$　③ $\frac{48}{5}$
④ $\frac{24\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{48\sqrt{5}}{5}$

삼각형 FNM은 평면 BCGF 위에 있으므로.

평면 APQD와 평면 BCGF가 이루는 각을 구하면 된다. 이때, 평면 ADEH와 평면 BCGF는 평행하므로. 평면 AEHD와 APQD가 이루는 각과 동일하다.

따라서 $\overline{AP} = 4\sqrt{5}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

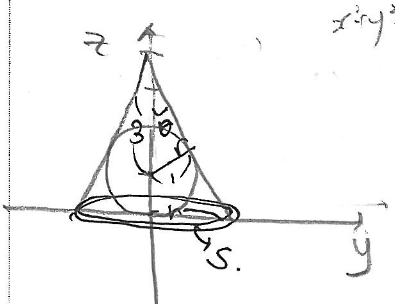
$\triangle FNM$의 넓이는 24이므로

$24 \cdot \cos\theta = 24 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{48\sqrt{5}}{5}$.

12. 점 $P(0,\ 0,\ 4)$에서 나온 빛에 의하여 xy평면에 구 $x^2+y^2+z^2-2z=0$의 그림자가 생긴다. 이 그림자의 넓이를 구하여라.

주어진 상황을 그림으로 표현하자 (편의상 y, z축만 그리겠다.)

$x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 이므로.



다음과 같고.

$\sin\theta = \frac{1}{3}$ 이므로.

그림자 S의 반지름을 r이라 할때,

$\tan\theta = \frac{r}{4} = \frac{1}{\sqrt{8}}$ 이므로

$r = \sqrt{2}$ 이다. 따라서 S의 넓이는 2π.

5일차 과제

13. 두 구 $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-6=0$,
$x^2+y^2+z^2-4x-10y-2z+a=0$이 만나지 않도록 하는 자연수 a의 개수는?

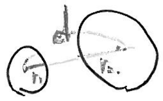
① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

$x^2+y^2+z^2-4x-10y-2z+a=0$ 에서

$(x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=30-a$ 이므로 반지름$=\sqrt{30-a}$

이다.

①

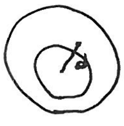


다음과 같은 상황일때,
$d > r_1+r_2$. 이고.

$\sqrt{30-a}+3<7$. 이므로 $14<a<30$ 이므로

$a=15, 16, \cdots, 29$ 로 15개 이다.

②



다음과 같은 상황은
$|r_2-r_1|>d$ 인데,
$|3-\sqrt{30-a}|>7$ 를 만족하는
자연수는 없다.

14. 구 $x^2+y^2+z^2+kx-6y+10z+18=0$이 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 S, yz평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 S'이라 하자. $S:S'=3:1$일 때, 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하여라.

S는 $z=0$ 일때 이므로

$(x+\frac{k}{2})^2+(y-3)^2=\frac{k^2}{4}-9$

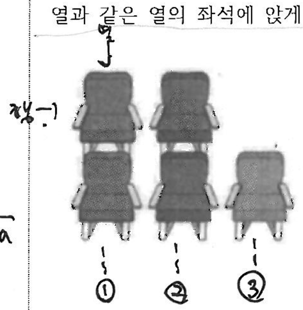
S'은 $x=0$ 일때이므로

$(y-3)^2+(z+5)^2=16$ 이다

$(\frac{k^2}{4}-9)\pi : 16\pi = 3:1$ 이므로

$k^2=228$

15. 아래쪽 그림과 같은 좌석에 다섯 명의 학생이 앉아 발레 공연의 일부를 관람했다. 10분간의 휴식 시간 후 2부 공연을 관람하기 위해 임의로 좌석에 앉을 때, 한 사람만 1부 공연에 앉은 열과 같은 열의 좌석에 앉게 되는 방법의 수를 구하여라.



3열의 의자는 1부때 결정되었음을 전제로 해서 5!를 곱하지 않습니다.

① 열에서 오는데 ① 열 그대로 갈때,

${}_2C_1 \times 2! \times 2! \times 2! = 16$ 가지

② 열에서 마찬가지 16 가지

③ 에서는 $2! \times 2! = 4$가지 . 이므로
(고정이므로)

36 가지이다.

16. 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열했을 때, 가장 작은 다섯 자리 자연수는 몇 번째 수인지 구하여라.

네자리이하의 자연수의 개수를 모두 세어내자.

i) 4, 0, 0, 0
$\frac{4!}{3!}=4$

ii) 3, 1, 0, 0
$\frac{4!}{2!}=12$

iii) 2, 0, 2, 0
$\frac{4!}{2!2!}=6$

iv) 2, 1, 1, 0
$\frac{4!}{2!}=12$

v) 1, 1, 1, 1 = 1 1개.

4자리 이하 자연수의 개수는 33 이므로

구하는 자연수는 36번째 수이다.

5일차 과제

17. 지우와 혜리가 각각 정답이 한 개인 오지선다형 문제 5개를 풀었는데 혜리는 1번 문제부터 5번 문제까지의 답을 각각 1, 2, 3, 4, 5로 택했고, 지우는 답을 모두 3으로 택했다. 이때 지우와 혜리 둘 다 3문제씩 맞히는 경우의 수를 구하여라.

둘다 세문제를 맞으려면. 3번문항은 공통으로 정답. 지우가 남은 4문제중 정답인경우 $_4C_2$ 이고 헤리는 남은 두문제를 모두 맞추어야한다.

$\therefore 6$

18. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 (A, B)의 개수는?

> (가) $A \cap B = \varnothing$
> (나) $n(A)=n(B)=2$
> (다) 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 집합 B의 원소 중 가장 큰 수보다 크다.

① 70 ② 84 ③ 90
④ 96 ⑤ 105

7개중. A와 B가 될 4개의 원소를 고른다. ⇒ $_7C_4$.

가장큰 원소는 A의 원소이다.

나머지 3개 중 B의원소2개를 고르면 된다. ⇒ $_3C_2$.

$_7C_4 \times {}_3C_2 = 105$

19. 10명의 회원으로 구성된 동아리에서 각 회원이 동아리 모임에 참석할 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 구성원의 $\frac{4}{5}$ 이상이 참석할 때 동아리 활동을 진행할 수 있다고 하면 동아리 활동이 진행될 확률이 $\frac{n}{2^7}$이다. 이때 자연수 n의 값을 구하여라.

※ 독립시행의 확률이다.

i) 8명 $_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{45}{2^{10}}$

ii) 9명 $_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{2^{10}}$

iii) 10명.

$_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^{10}}$

이므로. $n=7$

20. 한 개의 주사위를 60번 던질 때, 6의 약수가 k번 나올 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$의 값을 구하여라.

※ 독립시행의 확률이다.

$P(k) = {}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{60-k}$.

따라서 준식을 정리하면,

$\sum_{k=1}^{30}\{P(2k-1)-P(2k)\} = 0$.

※ 이항정리

$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$

를 활용하라.