정승준T 2018학년도 6월 평가원 대비 문수 모의고사 2회

수학 영역[나형]

<6월 평가원 대비 문수 모의고사 제2회 해설>

1	②	2	⑤	3	④	4	①	5	②
6	⑤	7	①	8	③	9	④	10	③
11	⑤	12	②	13	③	14	①	15	④
16	②	17	④	18	③	19	⑤	20	①
21	②	22	4	23	34	24	60	25	15
26	20	27	126	28	7	29	74	30	81

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+6n+3}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{2+0+0}{1+0}=2$

정답: ②

2. $\log_2\frac{8}{3}+\log_2 12=\log_2\left(\frac{8}{3}\times 12\right)=\log_2 32$
$=\log_2 2^5=5$

정답: ⑤

3. $A-B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로 $n(A-B)=4$

정답: ④

4. 여섯 종류의 음료 중 하나를 고르는 방법은 6가지이다. 마찬가지로 세 종류의 빵 중 하나를 고르는 방법은 3가지이다. 따라서 곱의 법칙에 의해 음료와 빵을 하나씩 주문하는 경우의 수는 $6\times 3=18$

정답: ①

5. $y=\frac{3x+2}{x+1}=\frac{3(x+1)-1}{x+1}=\frac{-1}{x-(-1)}+3$이므로
$p=-1,\ q=3$이다. 따라서 $p+q=2$

정답: ②

6. $3\log_a c=\log_b c$에서 $\frac{\log_a c}{\log_b c}=\frac{1}{3}$

$\log_a c=\frac{1}{\log_c a}$이고, $\log_b c=\frac{1}{\log_c b}$이므로

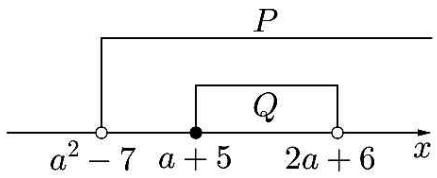
$\frac{\log_a c}{\log_b c}=\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b$

$\therefore\ \log_a b=\frac{1}{3}$

정답: ⑤

7. p는 q이기 위한 필요조건이므로 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $Q\subset P$이다.

$Q\subset P$를 만족하는 그림은 다음과 같다.



따라서 $a^2-7<a+5$이다.
$a^2-a-12<0$
$(a-4)(a+3)<0$
$-3<a<4$에서 a가 양의 정수이므로 a는 1, 2, 3이 가능하다.
$\therefore$ a의 최댓값은 3

정답: ①

8. $\lim_{x\to 2+}f(x)=1$이고 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=1$에서
$\lim_{x\to 0}f(x)=1$이다.
$\lim_{x\to 2+}f(x)+\lim_{x\to 0}f(x)=1+1=2$

정답: ③

9. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 분모 x^2+ax+4가 항상 0보다 커야한다.
따라서 이차함수 x^2+ax+4의 판별식이 0보다 작아야 한다.
$D=a^2-16<0$
$a^2<16$에서 $-4<a<4$
$\therefore$ 정수 a의 개수는 7

정답: ④

10. $a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n(n+2)}$에서 $\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$
이므로 $a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$a_2=a_1+\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$a_3=a_2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$a_4=a_3+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$a_5=a_4+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$

각 변을 더하면 $a_5=a_1+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$a_1=1$이므로 $a_5=\frac{32}{15}$

정답: ③

11. 민서와 유진이가 이웃할 확률을 p라 하자.
6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=120$
민서와 유진이가 이웃할 때, 둘을 묶어서 보면 탁자에 앉는 방법은 $(5-1)!=24$
이때, 민서와 유진이가 자리를 바꾸는 배열 $2!$을 곱하면 된다.
따라서 $p=\dfrac{24\cdot 2!}{120}=\dfrac{2}{5}$
그러므로 민서와 유진이가 이웃하지 않을 확률은
$1-p=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$ 이다.

정답: ⑤

12. 점 $\mathrm{P}(n,\ 3n^2+4n+4)$에서 y축에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $\mathrm{H}(0,\ 3n^2+4n+4)$이다.
삼각형 OPH는 $\angle\mathrm{OHP}=90^\circ$인 직각삼각형이므로
$S(n)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{HP}}\times\overline{\mathrm{OH}}$ 이다.
따라서 $S(n)=\dfrac{1}{2}\times n\times(3n^2+4n+4)=\dfrac{3}{2}n^3+2n^2+2n$
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S(n)}{n^3}=\dfrac{3}{2}$

정답: ②

13. 모든 자연수 n에 대하여
$\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n=\log_2 2a_n$ 이므로
수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이고 로그의 진수조건에 의하여 $a_n>0$이다.
$a_1=k\ \ (k>0)$라 하면
$a_1\cdot a_2=a_3+6$에서
$k\cdot 2k=4k+6$이다.
$2k^2=4k+6$
$k^2-2k-3=0$
$(k-3)(k+1)=0$
$k>0$이므로 $k=3$
따라서 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$이고 첫째항부터 제5항까지의 합은 $\dfrac{3\cdot(2^5-1)}{2-1}=93$

정답: ③

14. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하다.
따라서 $\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1-}f'(x)$에서
$\lim\limits_{x\to1+}(2x+a)=\lim\limits_{x\to1-}3$이므로 $2+a=3,\ a=1$
$x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)$에서
$\lim\limits_{x\to1+}(x^2+x+3)=\lim\limits_{x\to1-}(3x+b)$이므로 $5=3+b,\ b=2$
따라서 $a+b=3$이다.

정답: ①

15. 남학생 200명 중 수학을 좋아하는 학생 수를 a라 하면 아래의 표와 같이 나타낼 수 있다.

	남학생	여학생	계
수학을 좋아함	a	30	$a+30$
수학을 안 좋아함	$200-a$	110	$310-a$
계	200	140	340

3학년 학생 중 수학을 좋아하는 학생은 $a+30$명이므로
$\dfrac{a}{a+30}=\dfrac{4}{7}$, 즉 $a=40$
따라서 아래의 표와 같이 나타낼 수 있다.

	남학생	여학생	계
수학을 좋아함	40	30	70
수학을 안 좋아함	160	110	270
계	200	140	340

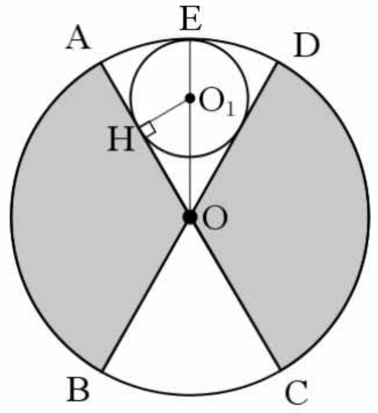
남학생 중 160명이 수학을 좋아하지 않고, 여학생 중에선 110명이 수학을 좋아하지 않는다.
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{160}{160+110}=\dfrac{16}{27}$이다.

정답: ④

16. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.
$S_7=\dfrac{7\cdot\{-17+(-17+6d)\}}{2}<0$에서
$-34+6d<0,\ d<\dfrac{17}{3}$
$S_8=\dfrac{8\cdot\{-17+(-17+7d)\}}{2}>0$에서
$-34+7d>0,\ d>\dfrac{34}{7}$
$\dfrac{34}{7}$보다 크고 $\dfrac{17}{3}$보다 작은 정수는 5뿐이므로 $d=5$
$\therefore\ a_{11}=a_1+(11-1)d=-17+10\cdot5=33$

정답: ②

17. 부채꼴 AOB에서 $\overline{\mathrm{AO}}=6$이고, 중심각이 120°이므로 넓이는 $36\pi\times\dfrac{120}{360}=12\pi$이다.
따라서 그림 R_1에 색칠된 넓이는 $12\pi\times2=24\pi$



그림에서 새로 그려진 원의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 반지름을 r, 두 원의 접점을 E, 점 $\mathrm{O_1}$에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{O_1H} = \overline{O_1E} = r$ 이고,
$\angle AOD = 60^\circ$ 에서 $\angle O_1OH = 30^\circ$ 이므로
$\angle OO_1H = 60^\circ$ 이다.
직각삼각형 OO_1H 에서 $\overline{O_1H} = r$, $\angle OO_1H = 60^\circ$ 이므로
$\overline{OO_1} = 2r$ 이다.
선분 OE는 큰 원의 반지름이므로 그 길이가 6이다.
따라서 $\overline{OE} = \overline{OO_1} + \overline{O_1E} = 2r + r = 3r = 6$
$\therefore\ r = 2$
따라서 두 원의 닮음비가 $3 : 1$ 이므로 넓이비는 $9 : 1$ 이다.
n번째 새로 그려지는 원의 개수가 $n-1$번째에서 그려지는 원의 개수보다 2배 많으므로 공비에 2를 곱한다.
따라서 공비는 $\frac{1}{9} \times 2 = \frac{2}{9}$ 이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{24\pi}{1-\frac{2}{9}} = \frac{216}{7}\pi$$

정답: ④

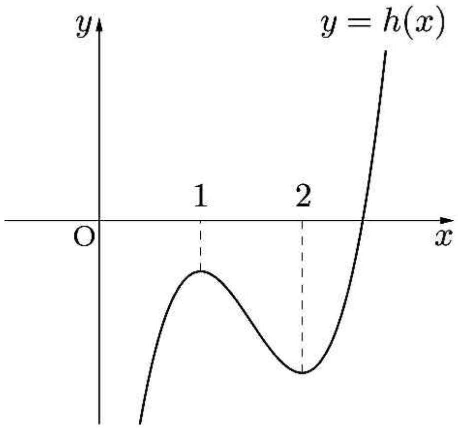
18. 집합 C는 두 집합 $A-B$, $B-A$에 속한 원소를 가지면 안 된다.
예를 들어, $A-B = \{2,\ 4\}$ 에서 $2 \in C$ 라면
$2 \in A \cap C$ 인데 $2 \notin B \cap C$ 이므로 조건을 성립하지 않는다.
따라서 집합 C는 원소 2, 4, 5, 7, 9를 반드시 포함하지 않아야 한다.
즉, 집합 C는 $\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 으로 만들 수 있는 부분집합 중 $n(A \cap C) > 0$ 을 만족하는 것이다.
$n(A \cap C) > 0$ 을 만족하려면 원소 1 또는 3을 적어도 하나 가져야하므로 $\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 으로 만들 수 있는 부분집합 중 1과 3을 둘 다 가지지 않을 때를 뺀다.
$\therefore\ 2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$

정답: ③

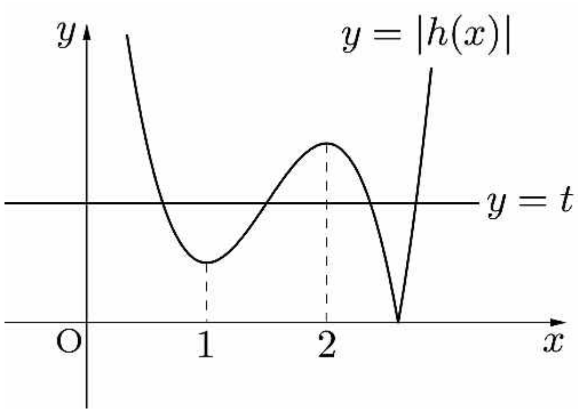
19. (ⅰ) 1부터 9까지의 숫자 중 중복을 허락하여 3개를 고르는 방법의 수는 ${}_9H_3 = {}_{9+3-1}C_3 = {}_{11}C_3 = 165$
(ⅱ) 0부터 9까지의 숫자 중 중복을 허락하여 3개를 고르는 방법의 수는 ${}_{10}H_3 = {}_{10+3-1}C_3 = {}_{12}C_3 = 220$ 이고,
$a = b = c = 0$ 인 1가지 경우를 빼면 219
이때 (ⅰ), (ⅱ)에서 중복된 세 자리 자연수는
$a = b = c$ 인 경우이다.
따라서 중복된 세 자리 자연수의 개수는
111, 222, ⋯, 999의 9가지이고, 중복하여 셌으므로 빼야한다.
따라서 $m = 165$, $n = 219$, $k = 9$ 이므로
$m + n + k = 165 + 219 + 9 = 393$

정답: ⑤

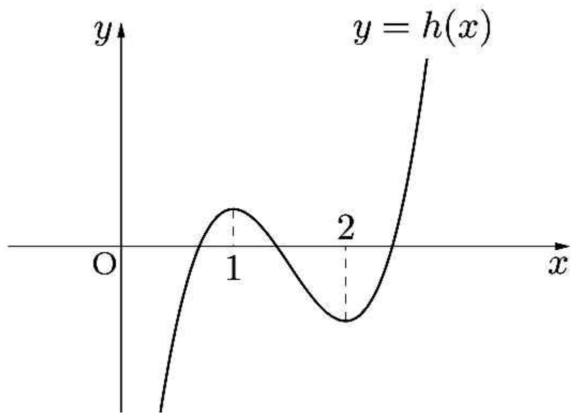
20. ㄱ. $f'(x)$은 모든 실수 x에 대하여 0보다 크기 때문에 $f(x)$는 증가함수이고, 극댓값과 극솟값을 둘 다 갖지 않는다. (거짓)
ㄴ. $h(x) = f(x) - g(x)$ 에서 $h'(x) = f'(x) - g'(x)$
$x = 2$ 에서 $h'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄷ. (ⅰ) $h(1) \le 0$ 인 경우
$y = h(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



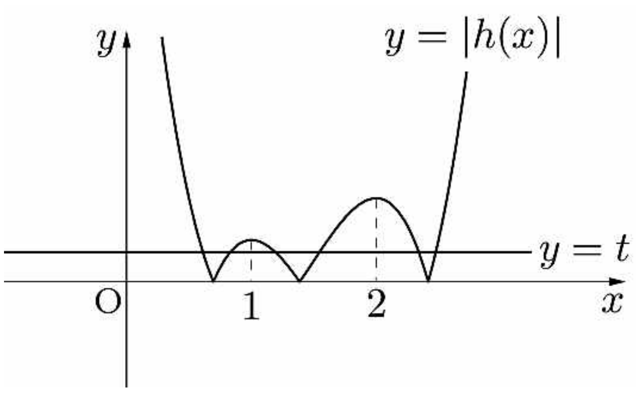
따라서 $y = |h(x)|$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



이때 위와 같이 t를 잡을 때 방정식 $|h(x)| = t$ 를 만족시키는 실근의 개수가 최대가 되고 최댓값은 4이다.
(ⅱ) $h(1) > 0$ 인 경우
$y = h(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
(단, $|h(1)| < |h(2)|$)



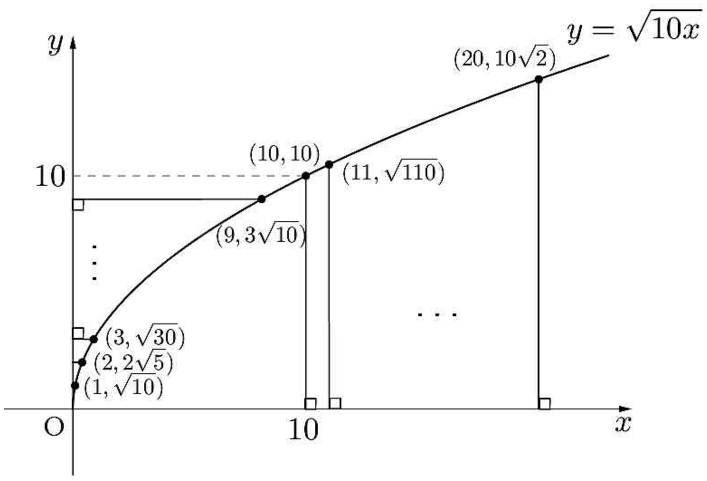
따라서 $y = |h(x)|$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



이때 위와 같이 t를 잡을 때 방정식 $|h(x)|=t$를 만족시키는 실근의 개수가 최대가 되고 최댓값은 6이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식 $|h(x)|=t$를 만족시키는 실근의 개수의 최댓값은 6이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

정답: ①

21. $n=10$일 때, 점 P의 좌표가 $(10,\ 10)$이므로 x축까지의 거리와 y축까지의 거리가 같다.



따라서 위 그림과 같이 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$일 때는 y축에 수선의 발 H를 내리고, $n=10,\ 11,\ 12,\ \cdots$ 일 때는 x축에 수선의 발 H를 내린다.

(ⅰ) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$일 때
$\mathrm{N}(1)$의 값은 $x=0,\ 1$일 때이므로 2
$\mathrm{N}(2)$의 값은 $x=0,\ 1,\ 2$일 때이므로 3
$\mathrm{N}(3)$의 값은 $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$일 때이므로 4
⋮
$\mathrm{N}(9)$의 값은 $x=0,\ 1,\ \cdots,\ 9$일 때이므로 10

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{9}\mathrm{N}(k)=2+3+4+\ \cdots\ +10=54$

(ⅱ) $n=10,\ 11,\ \cdots,\ 20$일 때
$n=10$일 때, $f(10)=10$이므로 $y=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$이 가능하다. $\mathrm{N}(10)=11$
$n=11$일 때, $f(11)=\sqrt{110}$, $10\le\sqrt{110}<11$이므로 $y=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$이 가능하다. $\mathrm{N}(11)=11$
즉, $f(10),\ f(11),\ f(12),\ \cdots,\ f(20)$의 정수 부분을 구하면 된다.
한편 $y=f(x)$의 그래프는 $11=\sqrt{121}$, $12=\sqrt{144}$, $13=\sqrt{169}$, $14=\sqrt{196}$, $15=\sqrt{225}$에서
점 $(12.1,\ 11)$, $(14.4,\ 12)$, $(16.9,\ 13)$, $(19.6,\ 14)$, $(22.5,\ 15)$를 지난다.
따라서 $n=10,\ 11,\ 12$일 때는 $y=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$
$n=13,\ 14$일 때는 $y=0,\ 1,\ \cdots,\ 11$
$n=15,\ 16$일 때는 $y=0,\ 1,\ \cdots,\ 12$
$n=17,\ 18,\ 19$일 때는 $y=0,\ 1,\ \cdots,\ 13$
$n=20$일 때는 $y=0,\ 1,\ \cdots,\ 14$가 가능하다.
즉, $\mathrm{N}(10)=\mathrm{N}(11)=\mathrm{N}(12)=11$
$\mathrm{N}(13)=\mathrm{N}(14)=12$
$\mathrm{N}(15)=\mathrm{N}(16)=13$
$\mathrm{N}(17)=\mathrm{N}(18)=\mathrm{N}(19)=14$
$\mathrm{N}(20)=15$이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=10}^{20}\mathrm{N}(k)=11\times3+12\times2+13\times2+14\times3+15=140$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $54+140=194$

정답: ②

22. $4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^{2\cdot\frac{3}{2}}=2^3$이므로
$2^{-1}\cdot4^{\frac{3}{2}}=2^{-1}\cdot2^3=2^{-1+3}=2^2=4$

정답: 4

23. $f(x)=2x^3+10x+5$에서 $f'(x)=6x^2+10$이므로
$f'(-2)=6\cdot(-2)^2+10=34$

정답: 34

24. $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r\cdot(2x^2)^r\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^{6-r}$
$={}_6\mathrm{C}_r\cdot2^r\cdot x^{2r}\cdot(-1)^{6-r}\cdot x^{r-6}$
$={}_6\mathrm{C}_r\cdot(-1)^{6-r}\cdot2^r\cdot x^{3r-6}$
상수항은 $3r-6=0$일 때이므로 $r=2$
$\therefore\ {}_6\mathrm{C}_2\cdot(-1)^4\cdot2^2=15\cdot1\cdot4=60$

정답: 60

25. 함수 $f(x)=\sqrt{2x-6}+k$는
모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{2x-6}\ge0$이므로 $2x-6=0$일 때 최솟값을 갖는다.
$2x-6=0$에서 $x=3$이므로 $a=3$
$f(3)=0+k=5$이므로 $k=5$

$\therefore\ ak=3\cdot5=15$

정답: 15

26. $\mathrm{P}(A\cap B)=p$ 이므로 $2\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A^C\cap B)$ 에서
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=2p$ …… ㉠
이때 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$ 라 할 수 있으므로
$\mathrm{P}(B)=p+2p=3p$ …… ㉡
두 사건 A, B 가 독립이므로 $\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$ 이다.
$2\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A^C\cap B)$ 이므로 $2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A^C\cap B)$
㉠, ㉡에 의해 $2\mathrm{P}(A)\cdot3p=2p$ 에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$ 이므로
$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+2p$
$\therefore\ p=\frac{1}{6}$ 이므로 $120p=20$

정답: 20

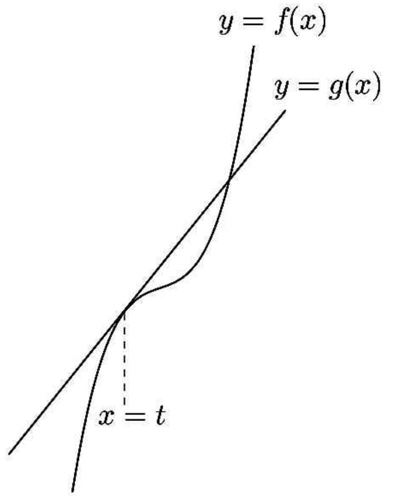
27. 두 자동차에 짝수 명이 있도록 탑승하는 인원은 (2명, 6명) 이거나 (4명, 4명) 이다.
(i) 8명을 (2명, 6명)으로 분할하는 방법의 수는
${}_8\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_6=28$
이때 두 자동차 A, B 에 분배하는 방법이 $2!$ 이므로
$28\times2!=56$
(ii) 8명을 (4명, 4명)으로 분할하는 방법의 수는
${}_8\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_4\times\frac{1}{2!}=35$
이때 두 자동차 A, B 에 분배하는 방법이 $2!$ 이므로
$35\times2!=70$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $56+70=126$

정답: 126

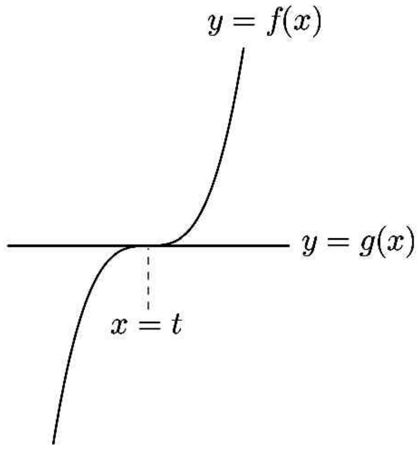
28. 조건 (가)에 의하여 삼차함수 $f(x)$ 를
$f(x)=ax^3+bx$ 라 할 수 있다. (단, a, b 는 상수, $a\neq0$)
조건 (나)에서 $f(2x)=a(2x)^3+b(2x)=8ax^3+2bx$ 이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8ax^3+2bx}{x^3}=8a$
따라서 $8a=32$ 이므로 $a=4$
식을 다시 정리하면 $f(x)=4x^3+bx$
조건 (다)에서 $f\left(\frac{1}{n}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+b\cdot\frac{1}{n}=\frac{4}{n^3}+\frac{b}{n}$
$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}+b\right)=0+b$ 이므로 $b=3$
$\therefore\ f(x)=4x^3+3x$ 이므로 $f(1)=7$

정답: 7

29. 함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq0$ 이다.



위 그림과 같이 $f'(t)>0$ 이면 $g(x)$ 는 기울기가 양수인 일차함수이므로 $h(x)$ 가 최솟값을 가질 수 없다.
따라서 다음과 같이 $f'(t)=0$ 이어야 한다.



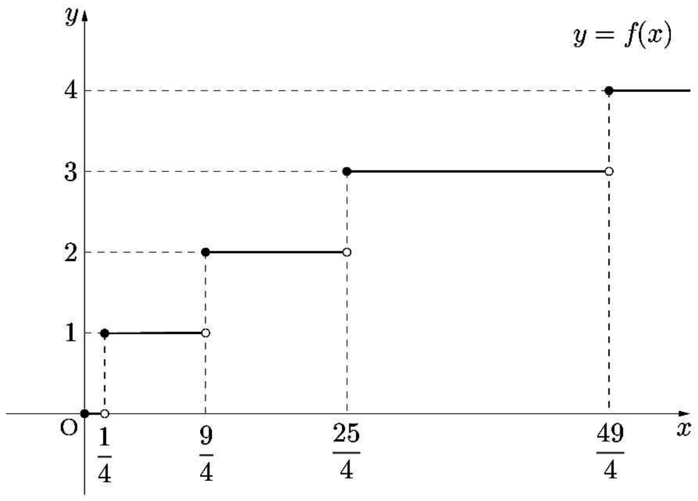
이때 $h(x)$ 의 최솟값은 $f(t)$ 이므로 $f(t)=8$ …… ㉠
이다.
$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로
$f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.
모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq0$ 이고 $f'(t)=0$ 이므로
$f'(x)=3(x-t)^2=3x^2-6tx+3t^2$ …… ㉡
함수 $f(x)$ 를 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면
$f(0)=0$ 이므로 $c=0$ 이다.
$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 에서 ㉡에 의하여
$2a=-6t,\ b=3t^2$ 이다.
즉, $f(x)=x^3-3tx^2+3t^2x$ 이고, ㉠에 의하여
$f(t)=t^3-3t^3+3t^3=t^3=8$ 이므로 $t=2$
$\therefore\ f(x)=x^3-6x^2+12x$
$h(6)=f(6)=72$ 이므로 $t+h(6)=2+72=74$

정답: 74

30. $y=f(x)$ 의 그래프를 구해보자.
$f(x)=0$ 이 되는 x 의 범위는
$0\leq\sqrt{x}<\frac{1}{2}$ 이어야 하므로 $0\leq x<\frac{1}{4}$ 이다.
$f(x)=1$ 이 되는 x 의 범위는
$\frac{1}{2}\leq\sqrt{x}<\frac{3}{2}$ 이어야 하므로 $\frac{1}{4}\leq x<\frac{9}{4}$ 이다.
같은 방법으로 자연수 n 에 대하여 $f(x)=n$ 이 되는 x 의 범위는

$n-\frac{1}{2} \le \sqrt{x} < n+\frac{1}{2}$ 에서 $\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \le x < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



방정식 $f(x)=g^{-1}(x)$가 근을 가지려면 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g^{-1}(x)$가 교점을 가져야 한다. …(★)

$g(x)=x^3+x^2+2x-k$에서 $g'(x)=3x^2+2x+2$이고 이차함수 $3x^2+2x+2$의 판별식은

$\frac{D}{4}=1-6=-5<0$이므로 함수 $g(x)$는 증가함수이다.

따라서 역함수 $g^{-1}(x)$ 또한 증가함수이다.

(ⅰ) 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g^{-1}(x)$가

구간 $\left[0, \frac{1}{4}\right)$에서 교점을 가지려면

$g^{-1}(0) \le 0,\ g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) > 0$ …… ㉠여야 한다.

㉠에서 함수 $g(x)$가 증가함수이므로

$g(g^{-1}(0)) \le g(0),\ g\left(g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right) > g(0)$이 성립한다.

$0 \le g(0),\ \frac{1}{4} > g(0)$에서

$0 \le -k < \frac{1}{4}$

이때 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ⅱ) 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g^{-1}(x)$가

구간 $\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$에서 교점을 가지려면

$g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \le 1,\ g^{-1}\left(\frac{9}{4}\right) > 1$여야 한다.

위와 같은 방법으로 $\frac{1}{4} \le g(1),\ \frac{9}{4} > g(1)$에서

$\frac{1}{4} \le 4-k < \frac{9}{4}$

$\therefore\ \frac{7}{4} < k \le \frac{15}{4}$

이때 자연수 k는 2, 3이 가능하다.

(ⅲ) 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g^{-1}(x)$가

구간 $\left[\frac{9}{4}, \frac{25}{4}\right)$에서 교점을 가지려면

$g^{-1}\left(\frac{9}{4}\right) \le 2,\ g^{-1}\left(\frac{25}{4}\right) > 2$여야 한다.

같은 방법으로 $\frac{9}{4} \le g(2),\ \frac{25}{4} > g(2)$에서

$\frac{9}{4} \le 16-k < \frac{25}{4}$

$\therefore\ \frac{39}{4} < k \le \frac{55}{4}$

이때 자연수 k는 10, 11, 12, 13이 가능하다.

(ⅳ) 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g^{-1}(x)$가

구간 $\left[\frac{25}{4}, \frac{49}{4}\right)$에서 교점을 가지려면

$g^{-1}\left(\frac{25}{4}\right) \le 3,\ g^{-1}\left(\frac{49}{4}\right) > 3$여야 한다.

같은 방법으로 $\frac{25}{4} \le g(3),\ \frac{49}{4} > g(3)$에서

$\frac{25}{4} \le 42-k < \frac{49}{4}$

$\therefore\ \frac{119}{4} < k \le \frac{143}{4}$

이때 k는 30 이하의 자연수이므로

30, 31, 32, 33, 34, 35 중 30만 가능하다.

따라서 (ⅰ)~(ⅳ)에서 가능한 자연수 k의 값은

2, 3, 10, 11, 12, 13, 30이고 합은 81이다.

참고) (★)에서 두 그래프 $y=f(x)$, $y=g^{-1}(x)$를 모두 $y=x$에 대하여 대칭이동하여

$y=f(x)$의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점을 구하면 쉽다.

정답: 81

정승준 수학연구소 예상 등급컷	
1등급	88점
2등급	78점
3등급	65점

현장강의 수강생 문항별 오답률 Best 5			
등수	문항	전체 오답률(%)	상위권 오답률(%)
1위	30번	89%	64%
2위	29번	78%	45%
3위	21번	53%	9%
4위	20번	39%	9%
5위	27번	36%	0%

* 해설강의는 SKYEDU 정승준 선생님 홈페이지에서 무료로 수강 가능합니다.